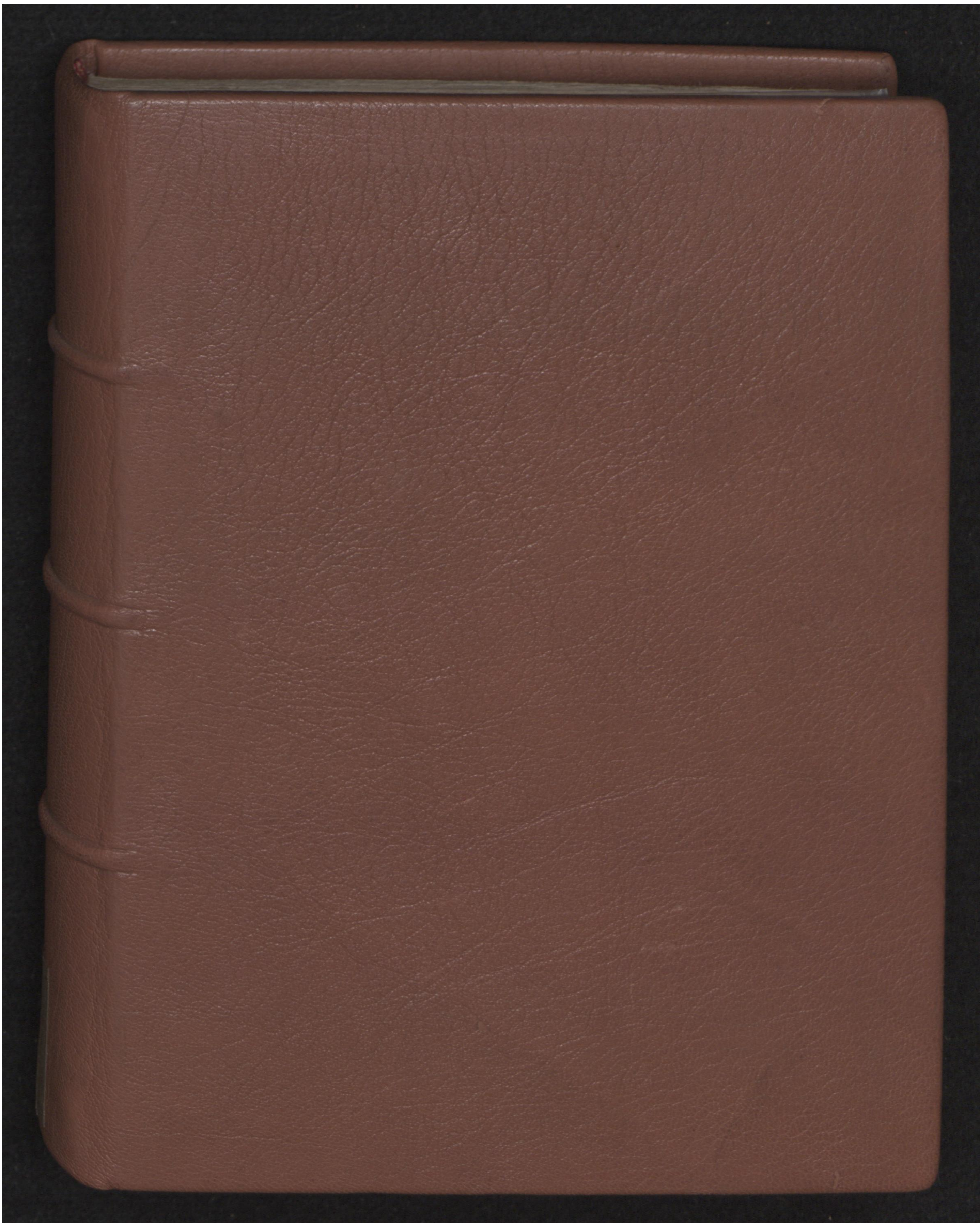
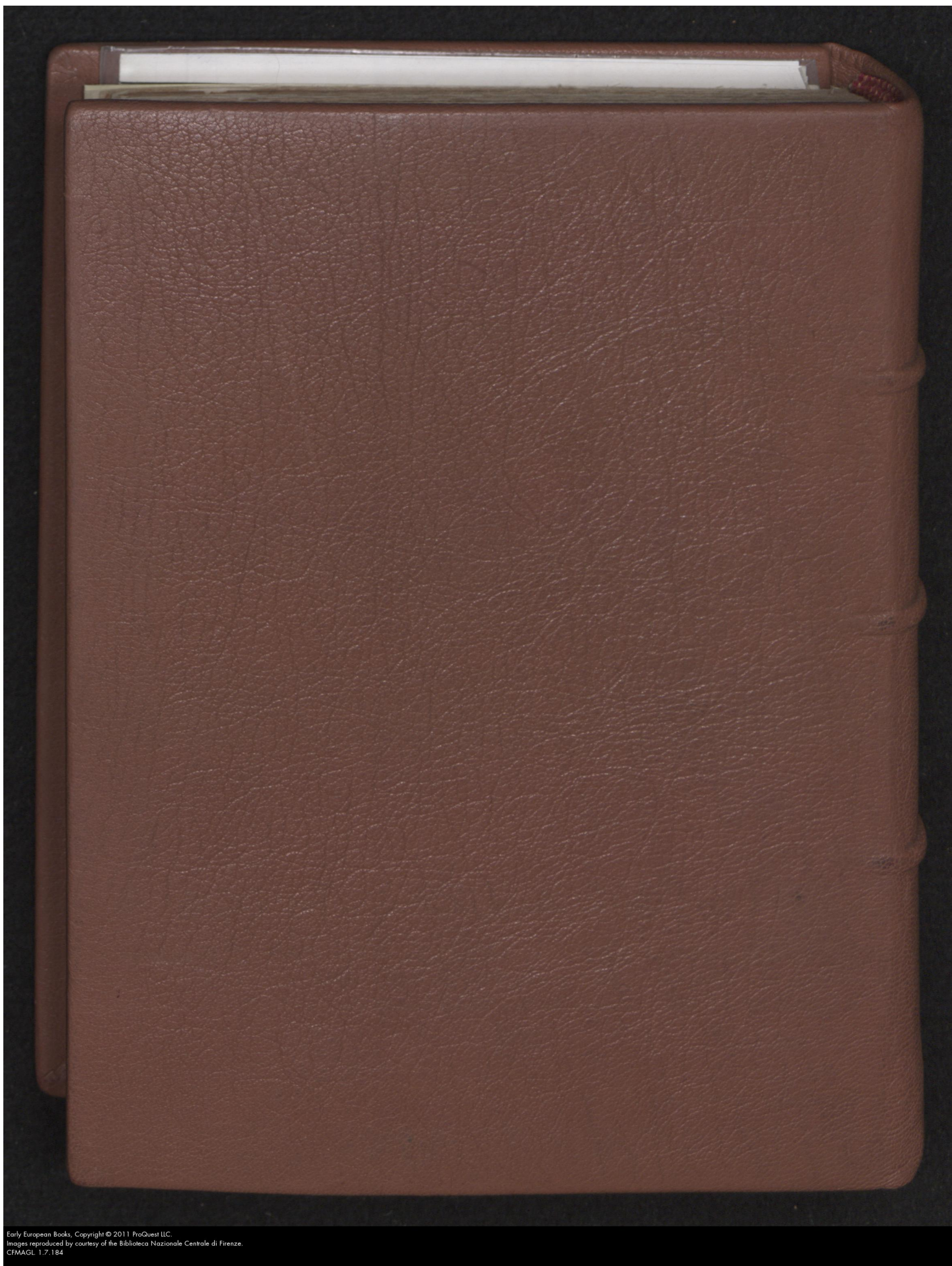


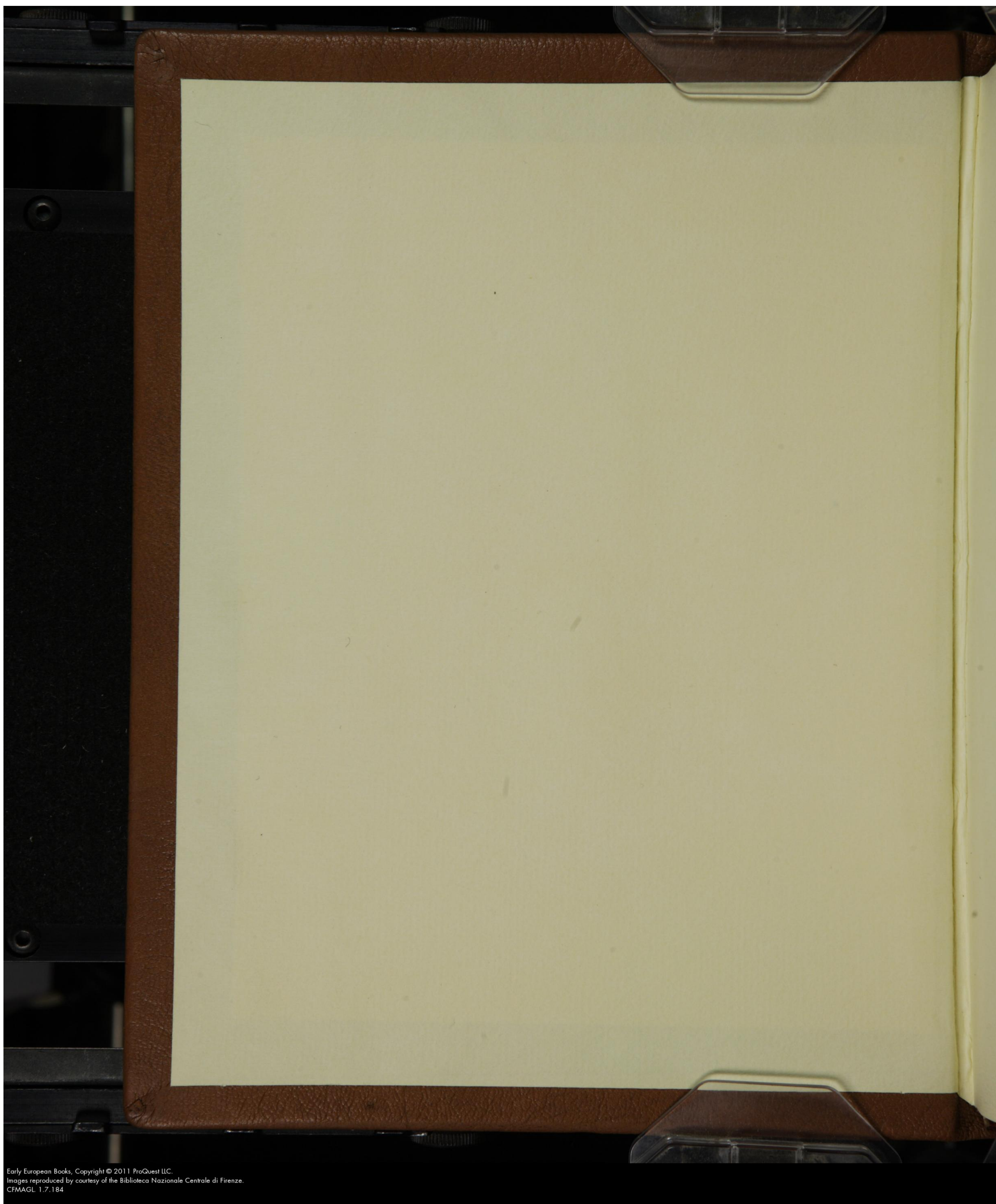

1
7
184

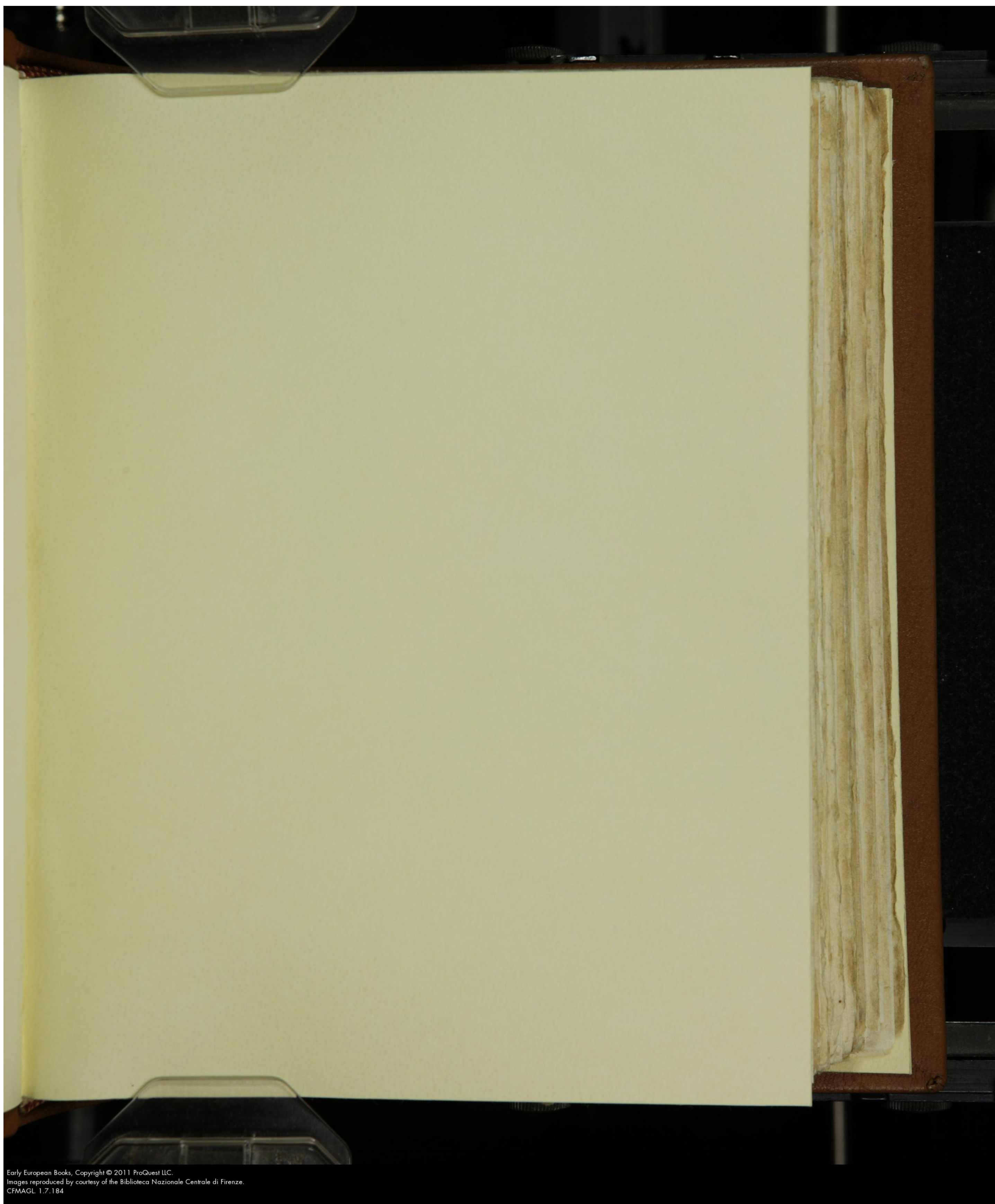


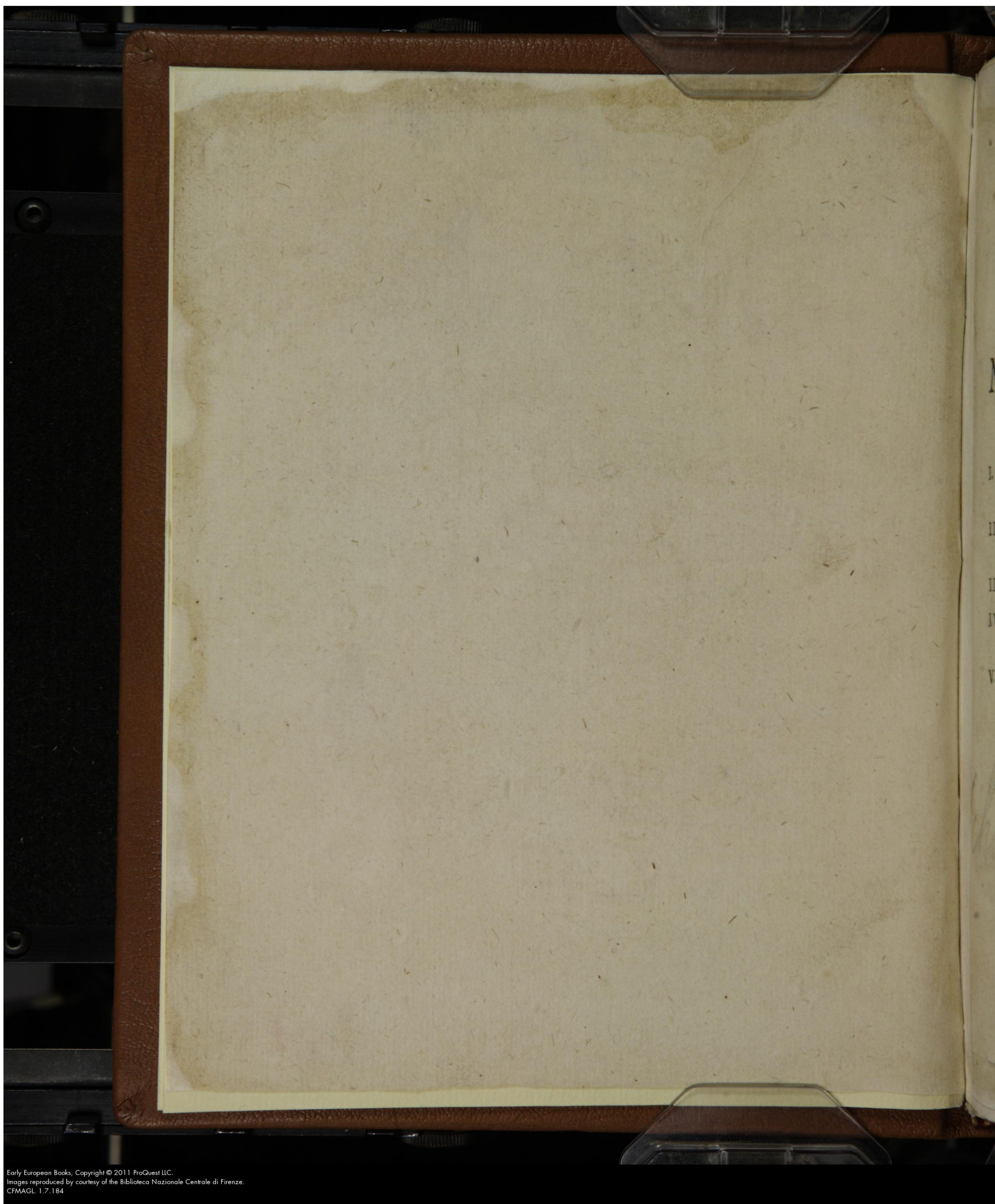












1-7-184 B. I

FRANCISCI à SCHOOTEN
EXERCITATIONUM
MATHEMATICARUM
LIBRI QUINQUE.

I. Propositionum Arithmeticarum et Geometricarum centuria.

II. Constructio Problematum Simplicium Geometricorum.

III. Apollonii Pergæi Loca Plana restituta.

IV. Organica Conicarum Sectionum in plano descriptio.

V. Sectiones Miscellaneæ triginta.

Quibus accedit Christiani Hugenii Tractatus, de Ratiociniis in Aleæ Ludo.

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM
LIBER PRIMUS.
CONTINENS
PROPOSITIONUM ARITHMETICARUM ET GEOMETRICARUM CENTURIAM.





LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
cIↃ IↃc LVII.



Nobilissimis, Potentissimisq; Dominis,

D. D. PRÆSIDI ac SENATORIBUS CURIÆ HOLLANDIÆ, ZEELANDIÆ, & WEST-FRISIÆ,

Studiorum Mathematicorum Patronis, summè colendis.

Nobilissimi, Potentissimique Domini



VM inter res cunctas, quas universi hujus autor Deus, pro immensa sua tum sapientia tum bonitate, in terris produxit, nil mente humanâ, inveniatur præstabilius, dolendum meritò est divino hoc munere, per quod conditoris nostri gerimus imaginem, nos adeò frequenter & tam turpiter abuti. Etenim, quoties, voluptati pravisque affectibus serviendo, insuper habito rectæ rationis ductu, meliorem nostri partem negligimus, toties, originis nostræ immemores, à recto tramite miserè admodum aberramus. Ne itaque pecudum ritu vitam transigamus, cum quibus corpus ejusque motus habemus commu-

nes, ſolâ mente ab iiſdem diſtincti, omni ope enitendum eſt, ut, relictis ſenſuum corporiſque illecebris, hanc, quâ excellimus, præcipuè excolamus divinæ auræ particulam, & eam veritatis indagationi, à cujus cognitione omnis ejus dependet perfectio, continuè aſſuefaciamus.

Inter omnes autem mentis exercitationes, quæ huc conducere poſſunt, nullæ æquè utiles reperiuntur ac Mathematicæ; quæ ſicut cæteras certitudinis evidentiâ antecellunt, ita apud eruditos & quoſlibet ingenio præſtantes viros ſummam adeptæ ſunt dignitatem. Enimverò cum ſenſuum ſuffragium, quod ſæpiſſime nos fallit, in exercitationibus hiſce nullam mereatur fidem, ſed mens ſola circa illas verſetur: fit ut eadem exercitatione hâc ſimile quid acquirat quod corpus multifariâ membrorum agitatione; promptitudinem ſcilicet in exequendis iis, in quibus ſe exercuit. Adeò ut mens hâc ratione accommodata planè aptáque reddatur ad verè ac ſolidè judicandum, & res quaſlibet, non tantùm in Mathematicis, ſed etiam Philoſophicis quibuſvis, ut & in civili vita, cum certitudine inquirendas & perſpiciendas.

Quapropter cum ex omnibus Mathematicis Exercitationibus, quæ præcipuè huc ſpectant atque cenſentur utiles, nullæ ita puræ deprehendantur, quàm quæ Arithmeticæ & Geometriæ ſubjiciuntur, indeque Matheſis puræ nomine veniant, jure meritoque Arithmetica & Geometria ante reliquas omnes Mathematicæ ſcientiæ partes, quæ ſanè complures ſunt, addiſcuntur, ipſiſque primus inter illas locus aſſignatur. Quibus dum reliquæ ceu fulcimentis innituntur,

accidit

IV

accidit ut mens humana iisdem imbuta, velut per gradus quosdam à minorum consideratione ad majorum, à naturalium ad divinorum, & à corruptibilium ad æternorum manuducatur cognitionem. Harum beneficio mens nostra, ut divinus testatur Plato, humo tollitur & tanquam binis alis in cœlum subvehitur; adeoque à terrenis hisce atque caducis omnibus abducitur ad cœlestium contemplationem. Vnde discit, assuescitque supra sortem suam ac conditionem se erigere, veritati fidem habere, & Deum Opt. Max. cunctarum rerum creatorem, ex immensis ac infinitis ejus operibus hâc viâ rectè cognoscere, atque ad eum solùm, si Sacrarum Literarum studium jungas, quibus solis salutis nostræ comprehenditur ratio, omnem laudem, omnemque gratitudinem ac reverentiam referre.

Hæ binæ artes seu scientiæ, cum per se subsistant nec aliarum egeant demonstratione auxiliòve, utpote quæ contra ex illis suam nanciscuntur firmitudinem, meritò à Philone reliquarum artium omnium Metropolis, & Philosophiæ Ansæ à Xenocrate appellatæ sunt. Quinimò, si pro rei dignitate loqui velimus, non ineptè Scientiarum Ianua ac Mysteriorum Reseratio dici possunt: quippe quæ, thesauros suos aperientes, resolvunt, pandunt, atque manifestant quicquid ante menti obscurum occultumque videbatur. Hæc igitur fuit causa, cur Veteres, ut studiis suis optimè consulerent, & tyrones recti firmique judicii capaces redderent, eas ante omnia didicerint atque docuerint, ipsæque inde artes seu scientiæ Mathemata, id est, Disciplinæ dictæ fuerint. Hoc autem

vel

vel inde liquet, quòd Plato, cujus temporibus hæ maximè floruêre, illas Viam ad Eruditionem Compendiariam, unicumque tramitem, quo quis rectâ ad perfectam rerum omnium cognitionem pervenire potest, vocaverit. Vnde etiam eos, qui in Arithmetica jam versati erant, ad discendas investigandasque artes quaslibet aptos solertesque pronunciavit, & Geometriæ ignaros è Schola sua eliminavit. Imò eousque Geometriam extulit, ut vel ipsam à Deo semper exerceri, ejusdémve interventu cuncta dirigi dicere solitus fuerit. Hoc utique indicare volens, eum, qui à teneris in Disciplinis hisce se exercuerit, Deo quasi assimilari, ipsiusque ingenium formari ad verè ac infallibiliter de re qualibet judicandum. Quod ipsum in discendis aliis artibus ac scientiis apprimè utile est ad veritatem, quæ cujusque scientiæ finis est, ab ejus contrario discernendam; atque ad dubitationem omnem, præjudicium, & temeritatem evitandam. Cui sententiæ adstipulatur etiam Athenæus, existimans unumquemque per disciplinas hasce perfici, modò jam inde à puero vitam ad virtutes componere studeat: quandoquidem ipsæ, dum minimè existunt contentiosæ, sedatos quoque animos gignunt; atque hoc item præ cæteris omnibus disciplinis sibi vendicant, quòd nullo fuco aut verborum lenocinio, quibus aliquis facilè seduci potest, ornari se patiantur; sed contentæ sint simpliciter doceri, & suos amatores summâ animi tranquillitate ac jucunditate perfusos dimittere.

Præter verò tot tantasque harum disciplinarum utilitates, est etiam, Nobilissimi atque Potentissimi Viri, *quod*

Vos

Vos ſpeciatim concernit, quippe qui earum uſum in componendis litibus, in decidendis cauſis, in defendendo jure tuendiſque legibus, & in injuria vindicanda aſſiduè deprehenditis. Quin etiam experientiâ edocti eſtis, Arithmeticam eſſe quæ expendit ac recipit, quæ emit ac vendit, nec ſine eâ ulla hominum negotia expediri, eorumque controverſias dirimi poſſe. Idem locum obtinet in Geometria, quâ figuræ quælibet agrorum, ſaltuum, ſtagnorum, paludum, prædiorum, ac fundorum menſurantur, delineantur, dividuntur, illorumque damnum & jactura æſtimantur atque compenſantur; adeò ut ejuſdem beneficio diſſidia quævis menſurationis & diviſionis componantur, falſi limites indicentur, verique reſtituantur, injuriæ obviam eatur, confuſio evitetur, paxque inter diſſidentes concilietur. E quibus omnibus, dum nihil ſine Arithmetica & Geometrica proportione perficitur, atque hæc præmia & pœnas ratione perſonarum ac dignitatum diſtribuat; illa autem circa permutationes verſetur, liquidò conſtat, quanta ſit cum Arithmeticæ tum Geometriæ neceſſitas in quotidiana hominum converſatione, ac præſertim in cauſis forenſibus, & quam ob cauſam Iuſtitia in commutativam & diſtributivam apud Iuriſconſultos diviſa fuerit. His adde, quòd abſque illarum adminiculo plurimæ Romanæ Leges, de hæreditatum diviſione, agrorum accremento, fluviorum curſus mutatione, partiendis fructibus aliorum fundorum, ſimilibuſque rebus agentes, quarum in jure civili ſæpe mentio fit, non rectè intelligi queant; at verò in ſtatuendis pretiis, in computandis debitis, in æſtimanda noxa eaque

†† reſti-

restituenda, in perpendendis delictis, ac ferè omnibus, quæ inter mortales quotidie accidunt, semper habendam esse rationem temporis & loci, quando ac ubi, ut & quanti aliquid sit venditum, locatum, permutatum, transactum, oppignoratum atque redemptum; nec non quâ conditione hæc emptio, locatio, permutatio, transactio, oppignoratio juxta & redemptio facta sit. Quæ omnia luculenter satis ostendunt, binas hasce artes in edito judicii loco ac ipso Tribunali consedisse, atque à Themide destinatas ad quodvis Justitiæ pondus æquæ lancis examine expendendum, & unicuique suum adjudicandum.

Quocirca cum per eas, uti dictum est, reliquæ omnes scientiæ ac artes faciliùs rectiùsque addiscantur, atque ipsæ unicum vinculum sint, quo subsistant, & in omnibus porrò commerciis, negotiationibus, ut & opificiis ritè dirigendis tam multas præbeant commoditates; haud immeritò creditur, nullam bene constitutam Rempublicam sine iis consistere posse, sed earum exercitio bene ac fœliciter geri, simúlque scientias omnes, bonas artes, & opificia quævis in ea quàm maximè florere. Testis est sagax atque prudens harum provinciarum regimen, ubi hæ disciplinæ, ut usui publico inserviant, magno ipsarum commodo, publicè atque vernaculâ linguâ docentur. Vbi etiam Vos, Nobilissimi, Potentissimiq; Viri, *quò prædictæ artes, Arithmetica nempe & Geometria in dignitate sua conserventur, suaque evidentia ac certitudine quotidie exerceantur, & in omni negotio atque administratione sacra sint anchora & amussis, optimâ ratione judicatis*

dicatis

dicatis Geodætarum ſolertiam in ſupputando, menſurando, dividendo, aliiſque eò ſpectantibus, priuſquam munus ſuum obire poſſint, juſto examini eſſe ſubjiciendam, neque alium admittitis, quàm qui certa earundem artium ediderit ſpecimina, ſuaque infallibili demonſtratione noverit confirmare.

Vnde conſideratâ ſingulari hac veſtrâ curâ, non abs re fore judicavi, ſi Exercitationes haſce Arithmeticas pariter atque Geometricas ſacras Vobis facerem. In quibus variæ, jucundæ, quotidiéque occurrentes quæſtiones ſive propoſitiones pertractantur: docentes, quo pacto plures calculi, ad quos abſolvendos quilibet hactenus ſpecialibus regulis, ſine ullâ earum cauſæ aut ortus cognitione uſus eſt, per vulgares regulas, unicuique fermè cognitas, expediri poſſint; ut & quibus modis plures dimenſiones atque diviſiones, quæ ante tædioſo ac prolixo calculo perficiebantur, per multò expeditiorem artificiosè præſtentur; ac denique quâ viâ plures incognitæ vel quæſitæ lineæ breviter ſeu compendiosè inveniantur. Idque tam ad tyronum introductionem & exercitationem, quàm ad eoſdem harúmque artium ſtudioſos, quò ad altiora contendant, cum invitandos tum excitandos.

Quibus omnibus bene perſpectis, futurum confido, Nobiliſſimi Potentiſſimiq; Domini, *ut hunc meum laborem, qui veſtris dignitatibus ſingulari obſervantiâ à me offertur ac conſecratur, æquo benevoloque animo ſitis accepturi, & veſtram in clientelam lubentes admiſſuri. Præ-*

ſertim cum hæ exercitationes chariſſimæ meæ patriæ bono in publicam lucem proferantur, earúmque etiam fructus in Juſtitia adminiſtranda ad Vos redundare poſſit. Finiam itaque, D. O. M. precibus humillimis obſecrans, ut veſtra conſilia omnia proſperè evenire faciat ad Reïpublicæ noſtræ ſalutem, Voſque quàm diutiſſimè ſervet incolumes.

Nobiliſſimi, Potentiſſimiq; Domini

Veſter devotiſſimus cliens

Lugd. Bat. Idibus Septemb. Anno cIↄ Iↄc LVI.

FR. à SCHOOTEN.

EXER-



EXERCITATIONES MATHEMATICÆ, AC PRIMUM DE ARITHMETICIS PROPOSITIONIBVS.

I.



Quatuor personæ conducunt currum, quo vehantur Leydâ Amſtelodamum, 9 florenis, & 10 ſtufris, hâc conditione, ut, ſi in via adhuc alii advenerint, id in ipſarum cedat emolumentum. Jam poſtquam Aelſmeriam pervenerunt, tribus Amſtelodamo milliaribus, contingit adhuc duas aſcendere, promittentes ſe pro ratione aliarum ſoluturas. Quæritur, quantum ſingulæ tum priorum tum poſteriorum ſolvere debeant, ſi Leyda diſtet Amſtelodamo 8 milliaribus?

Operatio fiat, ut ſequitur.

perſ. milliar.
4 — 8 | 32   9 flor. 10 ſtufr.   ſtufri ſolvendi
2 — 3 | 6   20
38 — 190 ſtufr. — { 32 / 6 } fit { 160 à 4 primis, quod diviſum per 4, dat 40 ſtufros, pro ſingulis
30 à 2 reliquis, quod diviſum per 2, dat 15 ſtufros, pro ſingulis. }

Vel ſic:

Quoniam ſingulæ priorum pro ratione duarum reliquarum ſolvere debent, ut 8 ad 3 (pro ratione nempe milliarium, quæ profectæ ſunt) & priores duplæ ſint poſteriorum, ſequitur rationem pecuniæ 4 priorum ad pecuniam 2^rum^ poſteriorum eſſe compoſitam ex ratione 8 ad 3, & ex ratione 2 ad 1. Unde tota ſumma 9 fl. 10 ſt. dividenda eſt in duas partes, quæ inter ſe ſint ut 16 ad 3. Omnino ut ſequens indicat calculus.

8 — 3
2 — 1
16 — 3   9 fl. 10 ſtufr.   ſtufri ſolvendi
3   20
19 — 190 ſtufr. — { 16 / 3 } fit { 160 à 4^or^ primis, quod diviſum per 4, dat 40 ſtufr. pro ſingulis
30 à 2^bus^ reliquis, quod diviſum per 2, dat 15 ſtufr. pro ſingulis. }
ut ſupra.

II.

Si 27 ulnæ Amſtelodami valent 16 ulnas Lugduni, & 3 ulnæ Lugdunenſes valent 5 ulnas Antverpienſes, & 4 ulnæ Antverpienſes ſint æquales 5 ulnis Colonienſibus: invenire quot ulnæ Amſtelodamenſes contineantur in 200 ulnis Colonienſibus.

Inſpi-

Inspiciatur sequens operatio.

27—16		
3— 5	2	facit
4— 5	64800	162, ulnæ Amstelodamenses continentur
200	400	in 200 ulnis Coloniensibus.
64800—400		

III.

Cùm 7 ℔ sacchari valent 2 ℔ gariophillorum, & 3 ℔ garioph. tanti constant quanti 13 ℔ piperis, & 1 ℔ pip. constet 12 stufris: Invenire quanti constet cista sacchari pendens 476 ℔.

7— 2		
3—13		facit
1—12	148512	7072 stufris, vel 353 flor. & 12 stufr.
476	21	
21—148512		

IV.

Duo studiosi proficiscuntur in Italiam, quorum unus 7 diebus priùs discedit altero, conficiens singulis diebus 9 milliaria: Quæritur, si alter quotidie emetiatur 12 milliaria, quanto temporis spatio primum sit assequuturus?

Vide sequentem operationem.

Prior præcedit 7 diebus
Conficiens quotidie 9 milliaria
Præcessit ergo prior 63 milliaribus.

Ex 12 milliaribus, quæ posterior quotidie est emensus
Subtr. 9 milliaria, à priore confecta.
Restant 3 milliaria, quæ à posteriore quotidie conficiuntur ultra milliaria prioris.

Fiat itaque
milliar. Diem milliar.
3 —— 1 —— 63 | facit 21 diebus.

Examen

Mult. 21 dies, quibus 2dus est profectus
per 12 milliaria
42
21
Et fiunt 252 milliaria, à 2do confecta.

Ad 21 dies, quibus 2dus est profectus
adde 7 dies, quibus 1mus præcessit,
fiunt 28 dies, quibus 1mus est profectus
per 9 milliaria
fiuntque 252 milliaria, à 1mo confecta, cùm 2dus eum assecutus est.

V.

Insula in ambitu est 36 milliarium. Si jam eodem tempore, & ex eodem loco duo proficiscuntur tabellarii, invicem sequentes, quorum unus quotidie conficit 9, & alter 7 milliaria: Invenire, quanto temporis spatio iterum sint conventuri, ut & quot milliaria & ambitus uterque absolverit.

milliaria
Subt. {9, 7}
Die milliaria
2 —— 1 —— 36 | facit 18 diebus.

Mult. 18 dies
per 9 mill.
fiunt 162 mill. quæ prior confecit

Multipl. 18 dies
per 7 mill.
fiunt 126 mill. quæ posterior confecit;

(18
divid. 162 { $4\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 { prior absolvit.

(18
divid. 126 { $3\frac{1}{2}$ ambitus, quos
per 36 { posterior absolvit.

VI. Si

VI.

Si Nurenberga distet Româ 140 milliaribus, & eodem tempore ex utraque urbe decedat tabellarius, quorum unus quotidie absolvit 8, & alter 6 milliaria. Quæritur, intra quot dies sibi invicem obviam sint venturi, ut & quot milliaria quisque confecerit?

Fiat ut sequitur.

mill.
Add. { 8 à primo quotidie confecta
6 à 2do quotidie confecta

summa 14 milliaria, quæ uterque simul quotidie conficiunt
Tum fiat
mill. diem mill. dies
14 —— 1 —— 140 | facit 10, intra quos sibi mutuò occurrent.

Mult. 10 dies
per 8 mill.
fiunt 80 mill. quæ prior absolvit

Mult. 10 dies
per 6 mill.
fiunt 60 mill. quæ posterior absolvit.

VII.

Duæ civitates distant à se invicem 100 milliaria. Jam ex utraque eodem tempore decedit tabellarius, quorum unus quotidie $2\frac{1}{2}$ milliaria plus conficit quam alter. Quæritur, si post 8 dies sibi mutuò obviam veniant, quot milliaria uterque perfecerit?

Dies milliaria Dies milliaria
1 —— $2\frac{1}{2}$ —— 8 | facit 20, unus plus confecit quàm alter. Quæ ex 100 mill. subducta, relinquunt 80 milliaria, quorum semissis est 40 mill^ria, quæ posterior confecit. Unde prior confecit 60 milliaria.

Ut autem inveniatur, quot milliaria singuli quotidie confecerint, fiat Dies milliaria Dies milliaria
8 —— 40 —— 1 | facit 5, quotidie confecit posterior. Unde prior quotidie confecit $7\frac{1}{2}$ milliaria.

VIII.

Emit aliquis agrum 450 perticarum, jugerum 1000 florenis; hâc conditione, ut prætium duobus persolvat temporibus, & primo quidem tempore 350 florenos plus quàm secundo: Quæritur, quantum singulis temporibus solvere debeat?

Jugerum flor. pert. flor.
pert. 600 —— 1000 —— 450 | facit 750 pretium agri

Adde { 375 semissem
175 semissi ipsius 350

summa 550 flor. primo tempore solvendi

subt { 375
175

Relinq. 200 flor. 2do tempore solvendi

IX.

Emit lanio 50 boves, jam quæritur, si singulis septimanis 2 boves mactare velit, donec omnes post 25 septimanas mactati sint, quot boves per idem temporis spatium eodem pretio alere possit?

Facit 26 boves eodem pretio per 25 septimanas alere potest, quo 50 boves, si singulis septimanis duos mactet. Quod ut inveniatur, adde 50 & 2, eritque 26, semissis summæ 52, numerus böum quæsitus.

X.

Duo studiosi A & B simul Leydâ discedunt in Gallias, quorum A quotidie conficit 6 milliaria, & B primo quidem die 1 milliare, secundo 2, tertio 3 milliaria, & sic deinceps, sequenti die unum semper milliare plus conficiens. Quæritur, quanto tempore primum sit assequuturus?

Facit 11 diebus.

Ad

Ad quod inveniendum, ſumatur duplum ipſius 6, quod eſt 12, à quo ſi auferatur 1, relinquetur 11, numerus quæſitus.

XI.

Frumentarius duplex habet frumentum, utpote triticum & ſiliginem, vendit autem tritici modium 7 flor. 10 ſtufr. & 8 den: Quæritur, ſi tres modii tritici ipſi tanti conſtent quanti 4 modii ſiliginis, quo pretio modium ſiliginis vendere debeat?

NOTA. *Hæc quæſtis ſolvi poteſt per rationem compoſitam ad modum propoſitionis ſecundæ, ſicut hic videre eſt.*

	flor. ſtufr. den.
4 — — 3	7 ... 10 ... 8
1 — 2408 den.	20
4 — 7224	150 ſtufr.
	16
(1	908
3̸ 244 (1	15
7̸2̸2̸4̸ { 1̸8̸0̸6̸ | 11 | 2	2408 den.
4 16 |	

facit 5 flor. 12 ſtufr. & 14 den.

XII.

Si 1 ℔ aromatis Amſtelodami emitur 12 ſolidis, 6 gro., quanti conſtabit 1 ℔ Antverpienſis, cùm 19 ℔ Amſtelodamenſes æquantur 20 Antverpienſibus?

Facit 11 ſol. 10 gr. 12 m.

Inſtitua-

Instituatur operatio per rationem compositam, ut sequitur.

Sol. gro.

20—19 12...6

1—150 12

20—2850 24

(1 126

(1 20 150 gr.

2850 { 142 { 11.

20 { 12 {

Aliter, per Regulam Proportionum conversam, hoc pacto:

℔ Amst. Sol. gr. ℔ Antv.

19———12..6———20

12

24

126

150 gr.

19

1350

15

2850

(1

(1 20

2850 { 142 { 11.

20 { 12 {

XIII.

Cerevisiarius habet ahenum cerevisiæ, 45 vasorum, cujus vas ipsi constat 4 flor. 16 stufr.: Quæritur, ad quot vasa decoquere debeat, ut vas ei constet 6 flor. Facit ad 36 vasa.

Operare juxta Regulam Proportionum inversam, ut sequitur.

flor. stufr. vasa flor.

4 ... 16———45———6

20 20

96 stufr. 120 stufr.

45

480 7

384 4320 { 36.

4320 120 {

Ut au-

Ut autem cognoſcatur, poſtquam numeri vulgari modo ſunt collocati, num juxta directam an verò inverſam proportionum regulam, ſit operandum: Notari debet, num quæſtio ſit ejus naturæ, ut, ſi tertius numerus, in regula, major ſit primo, tum quoque quartus ſeu quæſitus major requiratur ſecundo; vel, ſi tertius primo minor ſit, tum etiam quartus minor requiratur ſecundo, hoc enim ſi contingat, operatio inſtituenda erit ſecundùm regulam directam, multiplicando ſcilicet ſecundum per tertium numerum, & productum dividendo per primum; Contrario verò contingente, operandum erit juxta regulam inverſam, multiplicando nempe primum per ſecundum numerum, & productum dividendo per tertium.

XIV.

Si 1 ℔ cinamomi conſtat 3 flor., 1 ℔ gariophillorum 4 flor. 10 ſtufr., 1 ℔ nucum muſc. 3 flor. 15 ſtufr., 1 ℔ piperis 16 ſtuf., & 1 ℔ zingiberis 15 ſtufris. Quæritur, ſi ſingulorum aromatum idem numerus librarum expetatur, & in totum expendere velimus 1600 flor. quot libræ cujuſque ſpeciei ſint recipiendæ?

flor. ſtufr.
3 .... 0 . Cinam.
4 ... 10 . Garioph.
3 ... 15 . Nucum
16 . Pip.
15 . Zing. cujuſque aromatis flor.
12 ... 16 ——— 1 ℔ ——— 1600 | facit 125 ℔, cujuſque ſpeciei.

*Eodem modo invenietur, ſi 10 * nummi aurei commutandi ſint in ducatones, imperiales, ſolidos, & ſtufros, ita ut cujuſque ſpeciei idem ſumendus ſit numerus, ſingulorum recipiendos eſſe 12 nummos.* * rijders

XV.

Aromatopola Leydenſis petit Amſtelodamum, ad emenda aromata, videlicet: piper, gariophillos, & zingiber; ubi 1 ℔ piperis ipſi offertur pro 16 ſtufr., 1 ℔ garioph. pro 4 flor. 10 ſtuf., & 1 ℔ zing. pro 15 ſtufris: Quæritur, ſi in totum expendere velit 229 florenos, & ſumendo 13 ℔ piperis, accipiat 2 ℔ garioph.; & ſumendo 3 ℔ garioph. accipiat 7 ℔ zingib., quot ℔ ſingularum ſpecierum recipere debeat?

13 — 2 ╳ 3 — 7
3 .... 3 ╳ 2 2
39 — 6 — 14

℔ — ſtufr.
39 — 16 | 624
6 — 90 | 540
14 — 15 | 210
1374 — 4580 ſtufr. (229 flor. × 20)
3 — 10

ſtufr.
624, 540, 210 facit:
2080, quod div. per 16, fiunt 130 ℔ Pip.
1800, quod div. per 90, fiunt 20 ℔ Garioph.
700, quod div. per 15, fiunt $46\frac{2}{3}$ ℔ Zing.

* een g.gul. hoc eſt, 28 ſtufr.

*Eodem modo invenitur, ſi permutandi ſint 189 aurei Gallici, in patacones, * aureos, & ſolidos, & duplo plures patacones expetantur quàm ſolidi, recipiendos eſſe 264 patac. 132 aur. & 44 ſolidos.*

XVI.

Sex prædiati A, B, C, D, E, & F aggere prædia ſua cingere cupiunt, in ambitu continente 1270 pedes; hâc conditione, ut illi, qui, priuſquam aggerem extruere poſſunt, foſſam ſuam implere debent, 14 pedes ejuſdem aggeris minus perficiendos habeant. Quæritur, ſi prædium ipſius A ſit 30, B 20, C 45 D 40, E 36, & F 50 perticarum, & ipſis A, C, E, & F foſſas implere obtingat, quot pedes ſingulis ex ambitu ſint adjudicandi?

perticæ

perticæ
A.30.
B.20
C.45.
D.40
E.36.
F.50.
——
221

Mult. 14 pedes
per 4
fiunt 56 pedes

pedes
Ambitus 1270
adde 56
221 ——— 1326 —

perticæ		pedes	pedes
A.30.	fit	A.180, ſubtr. 14	A.166
B.20		B.120	B.120
C.45.		C.270, ſubtr. 14	C.256
D.40		D.240	D.240
E.36.		E.216, ſubtr. 14	E.202
F.50.		F.300, ſubtr. 14	F.286

fiuntque perticæ ex ambitu pro

In examen adde ſingulorum pedes

fiuntque 1270 pedes, ambitus, ut requirebatur.

XVII.

Tres, ſocietate initâ, contribuunt, nimirum, A & B ſimul 540 flor., B & C 360 flor., & A & C 450 flor.; peracto autem negotio lucrati ſunt 150 flor.: Quæritur, quid unuſquiſque contribuerit atque lucratus ſit?

flor.
A & B . 540
B & C . 360
A & C . 450
ſumma 1350 duplum eorum pecuniæ.
ſemiſſis 675 pecunia ipſorum A, B, & C.
ſubtr. 360 pecuniam ipſorum B & C.
rel. 315 pecunia ipſius A. Quæ ſi auferatur ex 540 fl. pecuniâ ipſorum A & B, relinquetur 225 flor., pecunia ipſius B. Hinc cum B & C ſimul contribuunt 360 flor., ſequitur C contribuiſſe 135 florenos.

Lucrum ſingulorum ſic invenies

Summa totius pecuniæ	totum lucrum	ſingulorum pecunia		ſingulorum lucrum.
675 ——	150 ——	A.315	facit	A.70 fl.
		B.225		B.50 fl.
		C.135		C.30 fl.

XVIII.

Si 125 ℔ piperis plus 4 florenis valeant 60 florenos plus 13 ℔: Quæritur, quantum persolvi debeat pro sacco, pendente 512 ℔?

	℔		flor.		flor.		℔
Ex	125	+	4	æquale	60	+	13
Subtrah. utrinque	13	℔ ..... &	4 fl.				
Remanent	112 ℔			æqual.	56 flor.		

Tum fiat

℔ flor. ℔

112 —— 56 —— 512 | facit 256 flor.

XIX.

Si 100 ℔ sacchari minus 3 flor. tantum valent quantum 36 floreni plus 5 ℔: Quanti constabit cista, pendens 475 ℔?

	℔	flor.		flor.	℔
Ad	100 — 3		æqual.	36 +	5
Adde utrinque 3. flor. minus 5 ℔.	— 5 ℔			+ 3 flor.	
fiuntque	95 ℔		æqual.	39 flor.	

Tum fiat,

℔ flor. ℔

95 — 39 — 475 | facit 195 flor.

XX.

Si 3 ulnæ panni veneunt 6 aureis Gallicis & 12 stufris; & eâdem ratione pro 25 ulnis solvantur 51 aurei Gallici & 12 stufri: Quæritur, quot stufros aureus valuerit?

3 ulnæ æqual. 6 aur. + 12 stuf.

hoc est, 1 ulna æqual. 2 aur. + 4 stuf.

& 25 ulnæ æqual. 50 aur. + 100 stuf.

Unde 51 aur. + 12 stuf æquantur 50 aur. + 100 stuf.

Subt. utrinque 50 aur. & 12 stufr. 50 aur. + 12 stuf. 50 aur. + 12 stuf.

relinq. 1 aur. .... æqualis .... 88 stuf.

hoc est, 1 aureus valet 4 fl. & 8 stufr.

XXI.

Si 12 poma & 15 pira emantur 3 stufris, & eâdem ratione 10 poma & 50 pira 5 stufris, quot igitur singulorum uno stufro ementur?

stufr. poma pira stufr. poma pira pomis piris

3 —— 12 & 15 —— 5 | facit 20 & 25 æqual. 10 & 50

3,

1 —— 4 & 5

Subtr. utrinque 10 poma, & 25 pira. 10 pom. 25 pir.

& relinq. 10 poma æqual. 25 pir.

5,

vel 2 pom. æqual. 5 pir.

3,

& 6 pom. æqual. 15 pir.

Jam ad inveniendum, quot poma & pira seorsim pro stufro emantur, ita fiat

Ad 12 poma

stufr. adde 6 poma, vel 15 pira stufr.

3 —— 18 pom. —— 1 | facit 6 poma pro 1 stufro.

Hinc si 6 poma tantundem valeant ac 15 pira, & 9 poma emantur 1 stufro; sequitur 15 pira pro 1 stufro emi posse.

XXII.

Si 3 ℔ gariophillorum, 2 ℔ piperis, & 1 ℔ zingiberis simul constent 186 stufris: atque 3 ℔ pip. 2 ℔ zing. & 1 ℔ garioph. simul 116 stufris: itemque 3 ℔ zing. 2 ℔ garioph. & 1 ℔ pip. simul 142 stufris: Quæritur, quantum 1 ℔ cujusque constiterit?

stufr.
facit 1 ℔ Garioph. 48.
Pip. 16.
Zing. 10.

Id quod sequenti modo invenitur.

Ex 3 G. 3 P. 3 Z... 222
Add. { 3 G. 2 P. 1 Z... 186 ...... subtr.. 3 G. 2 P. 1 Z... 186
1 G. 3 P. 2 Z... 116 Reliq. 1 P. 2 Z... 36
2 G. 1 P. 3 Z... 142 }
summa 6 G. 6 P. 6 Z.. 444
semissis 3 G. 3 P. 3 Z... 222
triens 2 G. 2 P. 2 Z .... 148 ...... Ex 2 G. 2 P. 2 Z 148
subtr. 1 P. 2 Z 36
Reliq. 2 G. 1 P 112
Ex 2 G. 1 P. 3 Z... 142
subtr. 2 G. 1 P 112
Reliq...... 3 Z..... 30

Hoc est, 1 Z.. 10, & 2 Z... 20, id quod subductum ex 1 P. 2 Z.... 36, relinquit 1 P... 16. Et hoc rursus ex 2 G. 1 P.... 112, remanet 2 G.... 96, hoc est, 1 G..... 48.

XXIII.

Si milites 24 singulis diebus fodiant 16 virgas, & 18 alii quotidie 15 virgas; Quæritur, quanto tempore simul perficient vallum 4650 virgarum?

Virg.

Virg.
Add. { 16.
15.
31

Fiat itaque: 31 virgæ perficiuntur 1 die (intellige ab omnibus simul militibus), quot diebus perficientur 4650 virgæ? facit 150 diebus.

XXIV.

Si boves aliquot intra 8 dies depaſcunt 5 jugera, & aliquot alii intra 7 dies 3 jugera; Quæritur, quanto temporis ſpatio agrum depaſcent $126\frac{3}{7}$ jugerum?

Dies Jugera Dies Jugera
8 — 5 — 7 | facit $4\frac{3}{8}$
add. 3 jug.
dies jug.
$7\frac{3}{8}$ jug. — 7 — $126\frac{3}{7}$ | facit 120 diebus.

XXV.

Inſula ambitum habet 134 milliarium. Jam verò eodem tempore ex eodem loco duo tabellarii tendunt ad diverſas partes, quorum unus 2 diebus conficit 11 milliaria, & alter 3 diebus 17 milliaria: Quæritur, quanto temporis ſpatio ſibi invicem ſint obviam venturi, ut & quot milliaria uterque abſolverit?

dies mill. dies milliar
2 — 11 — 3 | $16\frac{1}{2}$
add. 17 milliar. dies milliar.
$33\frac{1}{2}$ milliar. — 3 — 134 | facit 12 diebus.

Milliaria à ſingulis confecta, invenies hoc modo:

dies milliar. dies milliar.
2 — 11 — 12 | 66 à 1mo perfecta
3 — 17 — 12 | 68 à 2do perfecta.

XXVI. Qui-

XXVI.

Quidam volens molere 215 modios tritici, adit molitorem 3 habentem molas, quarum primâ singulis horis molit 2 modios, secundâ 2^{bus} horis 5 modios, & tertiâ 3^{bus} horis 8 modios: Quæritur, quanto tempore totum triticum moletur, si omnibus molis imponatur, & quantum tritici singulis molis sit imponendum?

Ad evitandas fractiones, inveniatur, per 38 prop. lib. 7. Elem: Euclidis, minimus numerus, qui per 1, 2, & 3 dividi potest absque reliquo, qui est 6; instituaturque operatio, ut sequitur.

horæ modii horæ mod.
1 — 2 — 6 | facit 12
2 — 5 — 6 | facit 15
3 — 8 — 6 | facit 16 hor. mod.
summa 43 — 6 — 215 | facit 30 horis, totum triticum moletur.

Modii autem, singulis molis imponendi, sic invenientur. modii

$$43 — 215 \left\{ \begin{array}{l} 12 \\ 15 \\ 16 \end{array} \right\} \text{facit} \left\{ \begin{array}{l} 60 \ 1^{mæ} \text{ molæ} \\ 75 \ 2^{dæ} \text{ modæ} \\ 80 \ 3^{tiæ} \text{ molæ.} \end{array} \right.$$

XXVII.

Quatuor mercenarii opus aliquod perficere possunt, videlicet,

A bis 3 septimanis
B ter 4 septimanis
C quinquies 6 septimanis
& D novies 8 septimanis. Quæritur, quanto tempore id ipsum simul laborantes, absolvent?

Sep-

Septim.vicibus.Septim.vicibus

3 — 2 — 24	facit 16
4 — 3 — 24	facit 18
6 — 5 — 24	facit 20
8 — 9 — 24	facit 27

ſumma 81 vicibus, ſimul perficiunt opus 24 ſeptimanis.

vices Septim. vicis
81 — 24 — 1 | facit $\frac{8}{27}$ Septimanis, hoc eſt, 2 diebus, & $1\frac{7}{9}$ horis opus hoc ſimul perficere poſſunt.

XXVIII.

Fons aliquis habet 4 epiſtomia A, B, C, D, infra quæ labrum exiſtit, quod per A impletur 8 horis, per B 9, per C 12, & per D 18 horis. Labrum autem hoc cum habeat 4 foramina E, F, G, H, & evacuetur per E 7, per F 6, per G 4, & per H 3 horis : Quæritur, ſi labrum aquâ plenum ſit, & omnia ſimul epiſtomia, foraminàque aperiantur, quanto temporis ſpatio labrum evacuabitur?

hor. vice hor. vicibus

8 — 1 — 72	facit 9
9 — 1 — 72	facit 8
12 — 1 — 72	facit 6
18 — 1 — 72	facit 4

Hoc eſt, ſimul 27 vicibus, labrum impletur 72 horis.

vic. hor. vic.
27 — 72 — 1 | facit $\frac{8}{3}$ horis, labrum ſemel impletur per omnia epiſtomia.

hor. vice hor. vicibus

7 — 1 — 84	facit 12
6 — 1 — 84	facit 14
4 — 1 — 84	facit 21
3 — 1 — 84	facit 28

Hoc eſt, ſimul 75 vicibus, labrum evacuatur 84 horis.

vic. hor. vice
75 — 84 — 1 | facit $\frac{28}{25}$ horis, labrum ſemel evacuatur per omnia foramina. Quare cum interim per epiſtomia $\frac{21}{50}$ aquæ pars totius labri influxerit (nimirum, quantum oritur dividendo $\frac{28}{25}$ per $\frac{8}{3}$) : ſequitur $\frac{28}{25}$ horarum ſpatio reliquum duntaxat, utpote $\frac{29}{50}$ aquæ totius labri partem, per impletionem & evacuationem, elapſam eſſe. Unde ſi fiat, $\frac{29}{50}$ pars aquæ ipſius labri effluit $\frac{28}{25}$ horis, quot horis effluet 1, aqua ſc. totius labri? fietque $1\frac{27}{29}$ horis.

XXIX.

Civis Leydenſis emit bovem 18 libris Flandricis, erogans arrhæ nomine 8 ſtufros, ſervoque donans 12 ſtufros; expendit autem pro vectigali nummum ſeptimum, id eſt, 15 flor. 8 ſtufr. & 9 den. & inſuper pro impoſitione urbana nummum quadrageſimum, id eſt, 2 flor. 14 ſtufr. dein pellem vendens, accipit 10 flor., eique contingunt 95 ℔ adipis, ℔ à $4\frac{1}{2}$ ſtufr. Poſtremò, lanei expenſis iiſque, quæ ipſi ulteriùs in emolumentum cedere poſſunt, compenſatis, deprehendit, nudam carnem pendere 605 ℔. Quæritur, quanti conſtet 1 ℔? facit 3 ſtufr. $2\frac{1}{2}$ den. circiter.

18 libræ Flandricæ — 108000 ③ { 15428 ③ / 7
6

	108	flor. bovis empti
Add.	4	. arrhæ
	6	. pecuniæ donatæ
15	428	nummi 7^{mi}
2	7	. nummi 40^{mi}
summa 127	128	flor. in toto expensi
subtr. 31	375	flor. iterum recepti
relinq. 95	753	flor. pro nuda carne dati

1080 ① { 27 ① / 40

$4\frac{1}{2}$ stufr. { 1 ℔ adipis — 9000 ③ { 225 ③ — 40 — 95 — 1125 — 2025

add. { 10 ... flor. pellis; 21 | 375 flor. adipis .... 21375 ③ — 31 | 375

℔	flor.	℔
605 ——	95753 ③ ——	1
	1	
	95753 ③	

95753 ③ { 158 ③ flor. / 605 { 20

vel stufr. 3 | 160

16

96

1 | 6

& den. 2 | 56

XXX.

Si quis singulis septimanis lucretur 5 flor. 8 stufr. & quotidie expendat 10 stufr. 8 den: Quæritur, quantum anni spatio superlucrabitur, assumpto anno 52 septimanarum?

Septim.	flor.	Septim.		flor.	
1 —	54 ① —	52	facit	280	8, lucratur in anno
dies	flor.	7	facit	191	1, expendit in anno
1 —	525 ② —	dieb. 364	Relinq.	89	7, hoc est, 89 flor. & 14 stufr. anni spatio superlucrabitur.

XXXI.

Si quis ſingulis ſeptimanis lucretur 5 flor. 8 ſtufr., Invenire, quantum quotidie expendere debeat, ut 89 flor. & 14 ſtufr. anni ſpatio ſuperlucretur.

Septim. flor. Septim. flor.
1 — 54① — 52 | facit 280 | 8 lucratur in anno
ſubtr. 89 | 7
relinq. 191 | 1 anni ſpatio conſumendum.

dies flor. dies flor.
364 — 1911① — 1 | facit 525③, hoc eſt, 10 ſtufr. & 8 den. quotidie debet expendere.

1
982
191100 ③ { 525 ③
364 20
10 | 500 ③

XXXII.

Si quis quotannis ſuperlucretur 89 flor. 14 ſtufr. quantum ſuperlucrabitur 13 annis, & 7 menſibus? Facit 1218 flor. 8 ſtufr. & 8 denarios.

897① 12 mens^bus ſuperlucr.
13 anni
269 | 1
897 |
44 | 85 ..6 mens^bus ſuperlucr.
7 | 475 ..1 mens^bus ſuperlucr.
flor. 1218 | 425
2
ſtufr. 8 | 50
16
3 | 00
5 | 0
den. 8 | 00

XXXIII. Ali-

XXXIII.

Aliquis conducit mercenarium hâc conditione, ut, si operetur, quotidie pro mercede recipiat 12 stufr., si autem ferietur, sit quotidie soluturus 8 stufros. Quæritur, quot diebus operari & feriari debeat, ut anno, 365 dierum, elapso, neuter alteri existat debitor?

stufr. dies stufr. dies
12 — 1 — 24 | facit 2 operari debet, ad 24 stufr. lucrandos.
8 — 1 — 24 | facit 3 feriari debet, ad assumptos 24 stufr. consumendos.
5 summa dierum profestorum & feriatorum, ad tantum lucrandum quantum expendendum.

Tum fiat
5 — 365 { 2, 3 } facit { 146 dies profestos, 219 dies feriatos }

Aliter.

NOTA, Quoniam dies, quibus operatur, multiplicati per 12 tantum producere debent, quantum reliqui multiplicati per 8: sequitur * 12 stufros ad 8 stufros eam rationem habere debere, quam dies feriati ad profestos. Sed, 4^{or} numeris in eadem ratione existentibus, ut se habet summa duorum priorum ad secundum, ita quoque se habet summa duorum posteriorum ad quartum, * Erit inde:

* *per 19 prop. 7 libri Elem. Eucl.*

* *Vide Clavium ad prop. 22 libri 7 Elem. Euclidis.*

stufr.
Add. { 12, 8 } stufr. summa dierum profest. & feriat.
summa 20 — 8 ——— 365 | ad 146 dies profestos, qui subducti ex 365 diebus, relinquunt 219 dies feriatos.

XXXIV.

Duo opifices opus aliquod perficiendum habent, quorum A illud perficere suscipit 30, & B 20 diebus; Quæritur, si simul operentur, quanto temporis spatio illud absolvent?

dies opus dies | opera
30 — 1 — 60 | facit 2
20 — 1 — 60 | facit 3

summa 5 opera A & B simul perficiunt 60 diebus, hoc est, quinquies illud opus eodem tempore simul absolvunt.

opera dies opus
5 — 60 — 1 | facit 12 diebus A & B idem opus simul conficiunt.

Aliter.

Quoniam A prædictum opus solus perficere potest 30, & B 20 diebus; patet, si simul operantes illud aliquo tempore absolvant, dies ipsius A ad dies ipsius B, eam rationem habere, quam pars à B confecta ad partem ab A confectam; & consequenter * summam dierum A & B esse ad dies ipsius B, sicut summa duarum partium ab A & B confectarum (hoc est, totum opus) ad partem ipsius A.

* *Vt in antecedenti quæstione.*

Quare operatio instituenda est, ut sequitur.

dies
A. 30
B. 20 B dies Opus
summa dierũ A & B. 50 — 20 — 1 | facit $\frac{2}{5}$ partes operis, quas confecit A. Unde B reliquas $\frac{3}{5}$ partes confecit.

Jam fiat, A absolvit totum opus, hoc est, 1, diebus 30, quanto tempore absolvet igitur $\frac{2}{5}$ partes ipsius operis? facit 12 diebus. Unde A & B simul absolvunt opus 12 diebus, ut supra.

Adhuc aliter.

A. 30
B. 20 B A
summa. 50 — 20 — 30 | facit 12 diebus, ut ante.

XXXV.

Si Mars perficiat cursum suum 2 annis, & Jupiter 12 annis, & sint simul in primo gradu Arietis; Quæritur tempus primæ conjunctionis, ut & gradus Zodiaci, in quo illa contingat?

Con-

Conjunctionis tempus quære, ut ſequitur.

Anni gradus Annus gradus
2 — 360 — 1 | facit 180
12 — 360 — 1 | facit 30 Ann. gradus
reliq. 150 — 1 — 360 | facit $\frac{12}{5}$ annis.

Vel breviùs, hoc modo:

Quoniam Jupiter curſum ſuum abſolvit 12 annis, & Mars 2 annis: ſequitur, ſi ſimul ſint in primo gradu Arietis, & aliquando iterum conjungantur, annos Jovis ad annos Martis eam rationem habere, quam gradus à Marte interim confecti ad gradus Jovis: & conſequenter*, differentiam annorum Jovis & Martis ad annos Martis eandem habere rationem, quam differentia graduum Martis & Jovis, hoc eſt, 360 gr. vel 1 periodus, ad gradus Jovis.

* *Vide Clavium 22 prop. 7. libr. Euclidis.*

Vnde operatio ſic ſe habet.

Anni
12 Jovis
2 Martis. Anni Martis. periodus ſeu 360 gr.
differ. 10 ——— 1 ——— 1 | facit $\frac{1}{5}$ partem periodi ſeu 72 gr. conficit Jupiter intra tempus 1^{mæ} conjunctionis. Quare incidet illa in 12 gradũ Geminorũ.

Jam fiat, Jupiter curſum ſuum abſolvit 12 annis, quanto tempore abſolvet $\frac{1}{5}$ partem periodi ſeu curſus ſui? facit $\frac{12}{5}$ annis. Unde Jupiter & mars $\frac{12}{5}$ annis, ut ſupra, conjungentur.

Adhuc aliter.

Jupiter 12
Mars 2 Mars Jupiter
differ. 10 — 2 — 12 | facit $\frac{12}{5}$ ſeu $2\frac{2}{5}$ annis, ut ante.

Eàdem ratione, ſi in horologio ſint 2 indices, quorum unus bis circumagitur 1 die, & alter ſemel 30 diebus, atque ſimul, indicantes idem punctum, moveri incipiant, invenietur eoſdem rurſus conjunctum iri $12\frac{1}{3}\frac{2}{5}$ horis.

XXXVI. Ali-

XXXVI.

Aliquis conducit servum, cui in anno pollicetur se daturum 30 flor. & vestem; jam verò, peractis 7 mensibus, cum inter se dissentirent, servus missionem petit, pro mercede recipiens dictam vestem & adhuc 5 flor. Quæritur, quanti prædicta vestis ipsi æstimata fuerit?

Mens. flor.
In 12 .. meretur .. 30, cum veste
subt. in 7 .. meretur .. 5, cum veste mensibus flor.
Relinq. in 5 mens^{bus} meretur 25 flor. quot meretur in 7? | facit 35
subtr. 5 recept.
relinq. 30 flor. pro veste.

Ejusdem farinæ.

XXXVII.

Mercator 2 naves vino oneravit, in quarum 1ma sunt 150, & in 2da 240 dolia. Locum autem prætervectus, in quo vectigal solvere tenebatur, pendit pro 1ma navi unum dolium & recipit 6 flor., pro secunda verò dolium solvit & insuper 18 flor.: Quæritur, quanti dolium æstimatum fuerit?

Subtr. Subtr.
pro 240 doliis solvit 1 dol. & 18 flor.
pro 150 doliis solvit 1 dol. minus 6 flor. doliis
Relinq. pro 90 doliis ... solvit ... 24 flor. quot igitur solvit pro 150?
flor.
facit 40 pro 1ma.
add. 6 flor. receptos
fiuntque 46 flor. pro dolii pretio.

N O T A, *hasce duas quæstiones solvi etiam posse ad modum quæstionum* 18 *&* 19.

XXXVIII.

Aliquis debet 787 flor., quos solvere cupit dato tritico siligi

ſiligine, & hordeo, tritici verò modius ipſi conſtat 7 flor. 15 ſtufr., ſiliginis 5 flor. 5 ſtufr., & hordei 3 flor. 10 ſtufr.: Quæritur, ſi, ſumptis 3 modiis tritici, petantur 2 modii ſiliginis, & ſumendo 5 modios ſiliginis requirantur 4 modii hordei, quot modii ſingulorum ſint recipiendi?

3 — 2
5 — 4
15 — 10 — 8

7 flor. 15 ſtufr.	5 flor. 5 ſtufr.	3 flor. 10 ſtufr.
20	20	20
155 ſtufr.	105 ſtufr.	70 ſtufr.

155 105 70
775 1050 560
155
2325
1050 787 flor.
560 20
3935 — 15740 ſtufr.
1 — 4

15740 ſtufr. { 2325, 1050, 560 } fit { 9300, quod div. per 155; 4200, quod div. per 105; 2240, quod div. per 70 } facit modios { 60 tritici; 40 ſiliginis; 32 hordei. }

XXXIX.

Dividere 14830 in 4^{or} partes, ita ut $\frac{2}{3}$ primæ partis ſint æquales $\frac{3}{4}$ ſecundæ, & $\frac{5}{6}$ ſecundæ æquales $\frac{7}{8}$ tertiæ, & $\frac{9}{10}$ tertiæ æquales $\frac{11}{12}$ quartæ.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4}$ — 9 8

$\frac{5}{6} \times \frac{7}{8}$ — 42 ... 40, 2, 21 ... 20

$\frac{9}{10} \times \frac{11}{12}$ — 110 ... 108, 2, 55 54

9 — 8
21 — 20
189 — 168 — 160
55 — 54
10395 — 9240 — 8800 — 8640
5, 2079 — 1848 — 1760 — 1728
1848
1760
1728
7415 — 14830 { 2079, 1848, 1760, 1728 } facit { A. 4158, B. 3696, C. 4520, D. 3456 } sing. partes
1 — 2

21	21	8	
9	8	20	
189	168	160	160
55	55	55	54
945	840	800	640
945	840	80	80
10395	9240	8800	8640

XL.

Tres personæ dividere debent 170 flor., hâc ratione, ut $\frac{1}{2}$ partis A, $\frac{3}{4}$ partis B, & $\frac{5}{6}$ partis C omnes inter se sint æquales. Invenire singularum partes.

1 — 3 — 5
2 — 4 — 6
30 — 20 — 18
2, 15 — 10 — 9
10
9
34 — 170 flor. { 15, 10, 9 } facit { A. 75 fl., B. 50 fl., C. 45 fl. } sing. partes
1 — 5

2	1	1
3	4	3
6	4	3
5	5	6
30	20	18

XLI.

Quinque laniones simul conducunt agrum, cui A immittit 30 boves, pro 4 mensibus. Quæritur, quanto tempore B 40, C 24, D 20, & E 15 boves illi immittere debeant, ut tandem æqualem mercedis partem persolvant?

A. 30

A. 30 boves	boves		menses
per 4 menses	B. 40		B. 3
Divid. 120 ...per.	C. 24	fiuntque	C. 5
	D. 20		D. 6
	E. 15		E. 8

Ejusdem farinæ.

XLII.

5 Mercatores conducunt unà currum, cui A imponit 600 pondo 20 milliaribus vehenda; Quæritur, quot pondo B eidem 15, C 12, D 10, & E 8 miliaribus vehenda imponere debeant, ut æquales mercedis partes persolvant?

A. 600 ℔	milliaria		singulorum pondo
per 20 mill.	B. 15		B. 800
Divid. 12000.. per..	C. 12	fiuntque	C. 1000
	D. 10		D. 1200
	E. 8		E. 1500

XLIII.

Mercator convenit cum auriga ut vehat 2000 ℔ milliaribus 25, hâc conditione, ut pro 100 ℔, singulis milliaribus ei solvat 2 stufros. Qui, postquam 10 milliaria confecit, propter viam salebrosam, 800 ℔ exonerare fuit coactus, & cum reliquis perrexit ad locum propositũ. Quæritur, quantum pro mercede auriga recipere debeat?

℔ stufr. ℔
100 —— 2 —— 2000 | facit 40 stufr. pro 2000 ℔ uno milliari vehendis.
Milliar. stufr. Milliar.
1 —— 40 —— 10 | facit 400 stufr. pro 2000 ℔ decẽ milliaribus vehendis.

2000 ℔
℔ ſtufr. Subt. 800 ℔
100 —— 2 —— 1200 ℔ | facit 24 ſtufr. pro 1200 ℔ uno milliari vehendis.

25 mill.
milliar. ſtufr. Subt. 10 mill.
1 —— 24 —— 15 mill. | facit 360 ſtufr. pro 1200 ℔ quindecim milliaribus vehendis.
add. 400 ſtufr. pro 2000 ℔ decem milliaribus vehendis.
fit ſumma 760 ſtufr. ſeu 38 floreni, ab auriga pro mercede recipiendi.

XLIV.

Oenopola duplex habet vinum, nimirum 8 ſtufr. & 14 ſtufrorum cantharus. Vult autem mixtionem facere, ita ut dolium vini vendere poſſit 35 florenis. Quæritur, quot cantharos utriuſque ad hanc mixtionem faciendam ſumere debeat?

Mult. 80 Canth. ſeu dolium. Mult. 35 flor.
per 8 ſtufr. per 20 ſtufr.
fiuntque 700 ſtufr. conſtat dolium plenum vino 8 & 14 ſtufrorum.
fiunt 640 ſtufr .... 640 ſubtr.
conſtat dolium plenum vino 8 ſtufrorum.
Relinq. 60 ſtufri, quibus dolium plus conſtat impletum vino 8 ſtufr. & 14 ſtufrorum, quàm plenum ſolo vino 8 ſtufrorum: vel etiam, quibus canthari 14 ſtufrorum in dolio contenti cariores ſunt cantharis 8 ſtufrorum, illorum loco ſumptis.

ſtufr.
Ex 14
ſubt. 8 Canth. ſubtr.
6 ſtufr. —— 1 —— 60 ſtufr. | facit 10 canth. 14 ſtufrorum 80 Canth. dolii
differentia pretii unius canthari differentia pretii cantharorum in dolio. rel. 70 canth. 8 ſtufrorum.

Eodem modo invenitur, ſi monetarius duplex habeat argentum, utpote 10 *den.*, *&* 8 *denariorum in ſelibra, illudq́; miſcere velit, ita ut libra contineat* 19 *denarios, ſumendas ipſi eſſe* 1½ *ſelibras* 10 *den.*, *&* ½ *ſelibr.* 8 *denariorum.*

Ejuſ.

Ejusdem farinæ.

XLV.

22 Personæ, nimirum, viri & mulieres, in symposio expenderunt 16 flor., & 16 stufr.: Quæritur, si quilibet virorum solvat 18, & quælibet mulierum 12 stufros, quot viri fuerint & mulieres.

Mult. 22 personas
per 12 stufr.
44
22
fiunt 264 stufri; à 22 mulieribus expensi.

Mult. 16 flor. 16 stufr.
per 20
fiuntque 336 stufri, à viris & mulieribus unà expensi.
.... 264 subtr.
relinq. 72 stufri, plus expensi à viris simul & mulieribus, quàm si omnes mulieres fuissent: vel etiam stufri, quos viri plus expenderunt quàm æquè multæ mulieres.

stufr.
Ex 18
subtr. 12
reliq. 6 —— 1 vir. —— 72 stufr. | facit 12 viros
Subtr. 22 Personæ
relinq. 10 mulieres.

XLVI.

Ancilla forum petit, habens $9\frac{1}{2}$ stufros, ut iis poma & pira emat; ubi veniens, 10 poma ipsi offeruntur 1 stufr. & 25 pira 2 stufris. Quæritur, si utriusque fructus simul 100 habere velit, quot poma & pira seorsim accipere debeat?

poma stufr. poma
10 — 1 — 25 | facit $2\frac{1}{2}$ stufr. constant 25 poma.
subtr. 2 stufr. pretium 25 pirorum
Relinq. $\frac{1}{2}$ stufr. quo 25 poma cariora sunt 25 piris.

Subtr.

pira stufr. pira $9\frac{1}{2}$ stufr. constant 100 poma & pira simul.
25 — 2 — 100 | facit 8 stufr. constant 100 pira

relinq. $1\frac{1}{2}$ stufri, quibus 100 poma & pira simul cariora sunt 100 piris, vel etiam, quibus poma in centenario contenta cariora sunt piris eorum loco sumptis.

stufr. differ. poma stufr. differ. 100
$\frac{1}{2}$ ——— 25 ——— $1\frac{1}{2}$ | facit 75 poma
& 25 pira.

XLVII.

Quo pacto ARCHIMEDES portionem argenti, coronæ aureæ permixtam deprehenderit.

Vide Vitruvium *cap. 3. lib 9.*

Rex HIERO, cum auream coronam votivam diis suis in fano quodam constituisset ponendam, immani pretio faciendam locavit, & auri certam quantitatem appendit redemptori. Qui subtiliter opus confectum Regi restituit, pondus coronæ visus præstitisse. Postea verò cum indicium factum esset, dempto auro tantundem argenti coronæ admixtum esse: Indignatus HIERO se contemptum, neque inveniens, quâ ratione id furtum, salvâ coronâ (quæ artificiosè erat confecta) deprehenderet, ARCHIMEDEM rogavit, ut in se sumeret de eo cogitationem. Is cum casu veniret in balneum, ibique, in solium descendens, animadverteret, quantum corporis sui in eo insideret, tantum aquæ extra solium effluere, duas fecisse dicitur massas æquo pondere, quo fuerat corona, unam ex auro, alteram ex argento. Cum ita fecisset, vas amplum ad summa labra implevit aquâ, in quo demisit argenteam massam, cujus quanta magnitudo in vase depressa est, tantum aquæ effluxit. Ita, exemptâ massâ, quanto minus factum fuerat, refudit, sextario mensus, ut eodem modo, quo priùs fuerat, ad labra æquaretur. Ita ex eo invenit, quantum ad certum pondus argenti certa aquæ mensura responderet. Cum id expertus esset, tum auream massam similiter pleno vase demisit, & eâ exemptâ, eâdem ratione mensurâ additâ, invenit ex aqua non tantum defluxisse, sed tantum minus, quantum minus magno corpore eodem pondere auri massa esset quàm argenti. Postea verò repleto vase in eadem aqua ipsâ

ipsâ coronâ demiſsâ, invenit plus aquæ defluxiſſe in coronam quàm in auream eodem pondere maſſam: & ita ex eo, quòd plus defluxerat aquæ in corona quàm in maſſa, ratiocinatus deprehendit argenti in auro mixtionem, & manifeſtum furtum redemptoris.

Cum autem VITRUVIUS de auri quantitate coronæ nullam faciat mentionem, neque etiam quâ ratiocinatione ARCHIMEDES exactam quantitatem argenti coronæ permixti invenerit, poterit Quæſtio, poſito pondere coronæ 10 ſelibrarum, & pondere aquæ effluxæ aureæ maſſæ 1 ℔, argenteæ verò maſſæ $1\frac{1}{2}$ ℔, & denique coronæ $1\frac{1}{9}$ ℔, ſolvi, ut ſequitur.

℔
Ex $1\frac{1}{2}$, aqua effluxa argenteæ maſſæ.
ſubtr. 1, aquam effluxam aureæ maſſæ.
relinq. $\frac{1}{2}$ ℔, aqua plus effluxa ab argentea maſſa (pendente 10 ſelibras), quàm ab aurea maſſa (ejuſdem ponderis).

℔
Rurſus ex $1\frac{1}{9}$, aqua effluxa coronæ, ſive maſſæ 10 ſelibrarum ex auro & argento conflatæ.
ſubtr. 1, aquam effluxam aureæ maſſæ ejuſdem ponderis.
relinq. $\frac{1}{9}$ ℔, aqua plus effluxa à corona, ex auro & argento conflatâ, quàm ſi ex ſolo auro conſtitiſſet; vel etiam, differentia aquæ, ab argenti portione in corona plus effluxæ, quàm ſi ejuſdem portionis loco aurum aſſumptum fuiſſet.

Tum fiat,
℔ *aquæ* dant *Selibr. arg.* quid ℔ *aquæ*? *Selibr. argenti* in corona.
$\frac{1}{2}$ —— 10 —— $\frac{1}{9}$ | facit $2\frac{2}{9}$, quod ſubductum ex 10, relinquit $7\frac{7}{9}$ *ſelibras auri* in corona.

Notandum autem, quòd, etiamſi ſatis fuiſſet in explorato habere pondus aquæ unius ſelibræ cum auri tum argenti, quoniam inde facilè aqua defluxa plurium ſelibrarum inveniri potuiſſet, ARCHIMEDES tamen duas maſſas ejuſdem ponderis atque coronæ fecerit, ut eò certiùs quæſitum obtineret, nec parva aquæ differentia, quæ in unius ſelibræ pondere explorando fuerit commiſſa, per multitudinem ſelibrarum multiplicata, plus quàm par erat excreſceret.

Ali-

Aliter.

Si 31 ℔ argenti ponderent 3 ℔ minus in aqua quàm in aëre, & 19 ℔ auri 1 ℔ minus in aqua quàm in aëre, ponendo coronam, ut ſupra, in aëre pendiſſe 10 ſelibras, at verò in aqua $9\frac{1991}{5301}$ ſelibras, inveniemus argenti portionem in corona etiam hâc arte:

℔ *argenti in aëre*, pendent 28, ℔ *in aqua*, quid 19, ℔ *arg. in aëre?*

31 ———— 28 ———— 19 | facit $17\frac{5}{31}$ ℔ *in aqua*, pendent 19 ℔ argenti.

Subtr. 18 ℔ *in aqua*, pendent 19 ℔ auri.

reliq. $\frac{26}{31}$ ℔ differentia, quâ 19 ℔ auri plus pendent in *aqua* quàm 19 ℔ argenti.

℔ *auri in aëre*, pendent 18, ℔ *in aquâ*, quid 10 *ſelibr. pondus cor. in aëre?*

19 ———— 18 ———— 10 | facit .... $9\frac{9}{19}$ *ſelibr.* pendet corona ex ſolo auro in *aqua*.

ſubtr. $9\frac{1991}{5301}$ *ſelibr.* pendet corona ex auro & argento permixtum in *aqua*.

Reliq $\frac{520}{5301}$ *ſelibr.* differentia; quâ corona ex ſolo auro plus pendet in *aqua* quàm ex auro & argento conflata; vel etiam differentia, qua detractum aurum plus pendit in aqua quàm additum argentum.

Tum fiat

℔ diff. ℔ *argent.* *ſelibr.* diff.

$\frac{26}{31}$ —— 19 ———— $\frac{520}{5301}$ | facit $2\frac{2}{9}$ *ſelibr. argenti* in corona.

ſubtr. 10 *ſelibr. auri & argenti* in corona.

& $7\frac{7}{9}$ *ſelibr. auri* in corona, ut ante.

Et tantùm de Arithmeticis Quæſtionibus atque Problematîs ſimplicibus, hoc eſt, quæ abſque ulla radicum extractione ſolvi poſſunt. Earum autem, quæ ſequuntur, prima eſt Plana Quæſtio, cum ad quæſiti inventionem extrahi debeat √Q; *quæ verò duæ reliquæ, Solidæ ſunt, cum ad illas ſolvendas opus ſit extrahere* √C.

XLVIII.

Aliquis debet poſt 12 menſes 17579 flor., 12 ſtufr., & 8 den. convenit autem cum creditore ſuo de eodem debito perſolvendo finitis 6 menſibus, remittendo uſuram u-

ſuræ

ſuræ denarii 20 in anno: Quæritur, quantum dicto tempore perſolvere teneatur?

NOTA: Cum 17579 flor. 12 ſtufr. & 8 den., vel 17579625③ ſolvendum poſt 12 menſes ad 17155957③ ſolvendum poſt 6 menſes eandem rationem habere debeat, quam 17155957① ſolvendum poſt 6 menſes ad 16742500③ paratâ pecuniâ ſolvendum; patet, 17155957③ medium eſſe proportionalem numerum inter 17579625③ & 16742500③. Ad quem obtinendum, multiplicari debet 17579625③ per 16742500③, & ex eo quod fit extrahi √Q, & habebitur 17155957③.

Inſpice ſequentem operationem.

12 ſtufr. 8 den.

20 ſtufr. flor. $\frac{16}{72}$

$\frac{16}{320}$ den. — 1 — $\frac{128}{200}$ den., facit $\frac{200}{320}$ vel $\frac{5}{8}$ flor. hoc eſt, in decimalibus 625③

24

Utpote dividendo 5000③ {625③.

per ... 8

Solv. poſt 12 menſ. Solv. parat. pec. Solv. poſt 12 menſ.

21 ———— 20 ———— 17579625③

20

351592500③

1 1

24585 0

351592500③ { 17579625 ... ③ ſolv^dum poſt 12 menſes.

16742500③ ſolv^dum paratâ pecuniâ.

21 8789812500.

35159250

70318500

123057375

105477750

17579625

2|94|32|68|71|56|25|00 ⑥

facit 1| 7| 1| 5| 5| 9| 5| 7③ Solv^dum poſt 6 menſes, hoc eſt, 17155 flor. 19 ſtufr. & 2 den. circiter.

flor. 17155 | 957
20
ſtufr. 19 | 14
16
84
1 | 4
den. 2 | 24

XLIX.

Aliquis debet post 12 menses 17579625③, convenit autem cum creditore suo de eodem debito solvendo finitis 4 mensibus: Quæritur, quantum dicto tempore persolvere teneatur, si remittatur usura usuræ denarii 20 in anno? facit 17017 flor. 0 stufr. & 5 denarios.

Post 12 mens. Parat. pec. Post 12 mens. Parat. pec.
21 —— 20 —— 17579625③ | facit 16742500③

16742500③
16742500③
8371250000
334850
669700
1171975
1004550
167425
28031130625000⑥
17579625 ③
1401556531250000
56062261250
168186783750
252280175625
196217914375
140155653125
196217914375
28031130625
4|927|767|647|135|156|250|000⑨
facit 1| 7| 0| 1| 7| 0| 1| 6③
post 4 menses, hoc est, 17017 flor. 0 stufr. & 5 den. circiter.

flor. 17017 | 106
| 20
stufr. 0 | 32
| 16
1 | 92
3 | 2
den. 5 | 12

L.

Aliquis solvere debet paratâ pecuniâ 16742 flor. & 10 stufr. convenit autem cum creditore suo de eodem debito per-

persolvendo finitis 8 mensibus: Quæritur, quantum dicto tempore persolvere teneatur, habendo rationem lucri usuræ ad denarium 20 in anno?

NOTA: Cum 17579625 ③, solvendum post 12 menses, ad 17296033 ③, solvendum post 8 menses, eandem habeat rationem, quam 17296033 ③, solvendum post 8 menses, ad 17017016 ③, solvendum post 4 menses; & eandem quoque quam 17017016 ③, solvendum post 4 menses, ad 16742500 ③, solvendum paratâ pecuniâ: patet, 17017016 ③ & 17296033 ③ esse duos medios proportionales numeros inter 16742500 ③ & 17579625 ③. Ad quos inveniendos, si multiplicetur quadratum ex 16742500 ③ per 17579625 ③, & quadratum ex 17579625 ③ per 16742500 ③, & ex productis numeris extrahatur √C: fient 17017016 ③ & 17296033 ③, quæsiti numeri.

Solv. paratâ pec. Solv. post 12 menses Solv. paratâ pec. Solv. post 12 menses

20 ——— 21 ——— 16742500 ③ | facit 17579625 ③

```
                    17579625 ③
                    17579625 ③
                    ----------
                    87898125
                   35159250
                  105477750
                 158216625
                123057375
               87898125
              123057375
             17579625
             -------------------
             309043215140625 ⑥
                    16742500 ③
             -------------------
             154521607570312500
            61808643028125 0
           123617286056250 0
          216330250598437 5
         185425929084375 0
        309043215140625
        -----------------------------------
        5|174|156|029|491|914|062|500 ⑨
facit   1|  7|  2|  9|  6|  0|  3|  3 ③
```

post 8 menses, hoc est, 17296 flor. o stufr. & 10 den. circiter.

```
flor. 17296 | 033
            |  20
       ---  | ---
stufr.   0  | 66
            | 16
       ---  | ---
         3  | 96
         6  | 6
       ---  | ---
den.    10  | 56
```

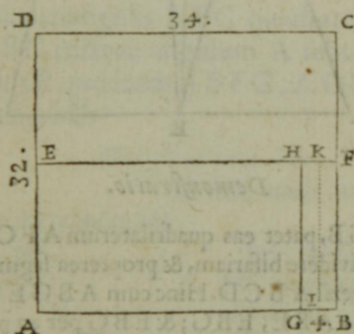
Quo pacto hæ, aliæq; similes usuræ quæstiones compendiosè per Logarithmorum Tabulas solvendæ sint, vide cap. 17. Arithmeticæ Logarithmicæ Doctissimi Briggii.

Sequuntur PROPOSITIONES GEOMETRICÆ.

PROPOSITIONES GEOMETRICÆ.

I.

AReam quadrilateram A B C D, cujus longitudo A B vel D C est 34, & latitudo A D vel B C 32 pedum, dividere; ita ut, dempto communi angiportu G B F H, latitudinis G B, 4, pedum, parallelogramma A G H E & E F C D sint inter se æqualia.



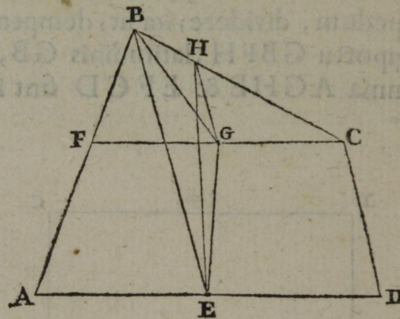
Quod ut fiat, ducatur I K ex I, medio ipsius G B, parallela G H vel B F: eritque G I vel I B 2, & A I 32. Deinde multiplicatâ A B 34 per B C 32, fit 1088, area A B C D. Cujus semissis 544, erit area gnomonis E D C B I K vel parallelogrammi A I K E. Quæ divisa per longitudinem A I 32, dabit latitudinem I K vel A E 17. indicans, quot pedes mensurandi sint ab A ad E, vel à B ad F.

II.

Trapezium A B C D dividere bifariam, rectâ E H, ductâ ex E, puncto medio lateris A D.

Constructio.

Ductâ C F parallelâ D A, junctâque EB; ex G, medio ipsius CF, agatur G H parallela E B, dico rectam E H fore quæsitam.



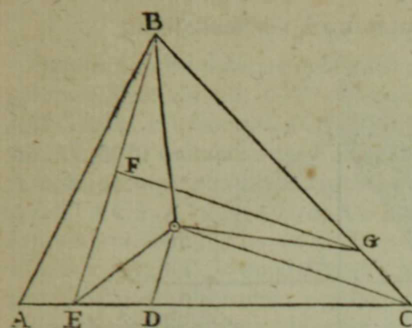
Demonstratio.

Junctis EG, GB, patet eas quadrilaterum A F C D nec non triangulum FB C dividere bifariam, & propterea segmentum A B G E semissem esse trapezii A B C D. Hinc cum A B G E compositum sit ex binis triangulis A B E, E B G; & E B G per 37 prop. lib 1 Elem. Eucl. sit æquale E B H: erit quoque ABHE (compositum ex ABE & E B H) semissis trapezii A B C D, adeoque E H linea quæsita.

III.

Triangulum A B C dividere trifariam, rectis prodeuntibus ex O puncto intra figuram, inchoatâ divisione à linea B O.

Constructio.



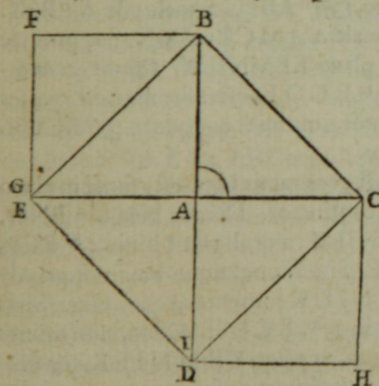
Ex O, ducatur ad D, $\frac{1}{3}$ partem ipsius AC, recta OD, & eidem ex B parallela BE, tum OE, resecans partem ABOE, tertiam totius ABC. Deinde ad distinguendas reliquas partes, ductâ OC ex F medio ipsius EB agatur ei parallela FG, & denique OG, quæ reliquas duas partes distinguit. Cujus demonstratio ex 37 prop. lib 1mi Elem. Euclidis est manifesta.

IV.

In rectangulis triangulis ABC quadratum BCDE, quod à latere BC rectum angulum A subtendente describitur, æquale est quadratis ABFG, ACHI, laterum circa rectum AB, AC.

Hæc est 47 prop. libr. 1mi Elem. Euclidis, alio modo demonstrata.

1mus Casus, ubi AB, AC æquales sunt



Primùm si AB sit æqualis AC, quoniam □tum ABFG æquale est △lo BED, & □tum ACHI æquale △lo BCD, atque hæc bina triangula simul constituunt □tum BCDE: patet, □tum BCDE æquale esse binis □tis ABFG, ACHI.

Si verò AB, AC inæquales sint, sumptis AK, AL singulis æqualibus ipsi AB, jungantur BK, KL, LG, & GB.

2. Ca-

2dus Casus, in quo AB, AC inæquales sunt.

Deinde sumptis AM, AN singulis æqualibus ipsi AC, agantur CM, MN, NI, & IC. Denique junctis BN, IK, productisque BG, BK ad O & P, in rectis NI, CI; secetur ED ab AI in Q.

Quibus positis, patet, ut ante, □tum ABFG æquale esse Δlo BGL vel BKL, & □tum ACHI æquale Δlo MCI vel MNI: ac proinde bina hæc quadrata æqualia esse plano KBMNILK. Quare, cum dicantur hæc □ta æqualia esse □to BCDE, ostendendum est, partes planum KBMNILK constituentes, contineri quoque in □to BCDE. Quod hoc modo fit manifestum.

Figura KBEQLK utrique est communis, hoc est, simul in plano KBMNILK & in □to BCDE continetur. Deinde bina Δla BNO, OBE, contenta in plano KBMNILK, æqualia sunt binis Δlis BCP, PKI, contentis in □to BCDE. Similiter quoque bina reliqua Δla NMB, EDI, in plano KBMNILK contenta, æqualia sunt binis reliquis ICD, ILK, contentis in □to BCDE. Unde, cum omnes partes jam dictæ, quæ continentur in plano KBMNILK, contineantur etiam in □to BCDE, & utrobique redundet commune Δlum IQD,

IQD, ſequitur planum KBMNILK, hoc eſt, duo □^{ta} ABFG & ACHI ſimul ſumpta æqualia eſſe □^{to} BCDE.

Supplementum ſeu demonſtratio plenior.

Quoniam autem dubitare quis poſſet de æqualitate dictorum triangulorum, Sciendum eſt, in 1mo caſu deſcriptis ſuper AB & AC □^{tis} ABFG & ACHI, lineas GAC & BAI [a] rectas eſſe: itemque, GA, AB, AC, & AI omnibus inter ſe æqualibus exiſtentibus, & angulis ad A rectis, adeoque æqualibus, angulos quoque AGB, ABG, ABC, ACB, ACI, AIC, AIG, & AGI omnes [b] inter ſe æquales eſſe, & propterea [c] ſemirectos: ut & lineas GB, BC, CI, & IG omnes [d] inter ſe æquales. Id quod oſtendit, junctis GB, CI, & IG, figuram GBCI eſſe quadratam, cujus nimirum anguli recti ſunt & latera inter ſe æqualia oſtenſa. vel etiam, quòd □^{tum} BCDE, ſuper BC deſcriptum, idem ſit atque illud, quod comprehenditur 4^{or} lineis GB, BC, CI, & IG.

a ℘ 14 Primi Elem. Eucl.
b ℘ 5 Primi Elem. Eucl.
c ℘ 32 Primi Elem. Eucl.
d ℘ 4 Primi Elem. Eucl.

Eodem modo in 2do caſu erunt quadratæ, figuræ MCIN & BKLG.

Quod ad 2^{dum} caſum attinet, in quo angulis BCD & ACH rectis exiſtentibus, ab iiſque ſubducto communi angulo ACD, relinquitur angulus BCA æqualis angulo DCH: patet, Quoniam anguli ad A & C △^{li} ABC æquales ſunt angulis ad H & C △^{li} HDC; & latus AC, propter □^{tum} ACHI, æquale lateri CH, latus quoque BC ipſi CD [e]; latuſque AB ipſi DH æquale eſſe. Unde liquet, cum CD ducta ſit ad angulos rectos ipſi CB, donec occurrat ipſi IH in D, eandem quoque ipſi BC æqualem fore: adeoque □^{ti} BCDE angulum D cadere in rectam IH. Porrò, cum rectangulorum △^{lorum} NAB & BAC latus NA ſit æquale lateri AC, latuſque AB utrique commune: erit etiam [f] angulus ANB ipſi BCA, & angulus NBA ipſi ABC, latuſque NB ipſi BC vel CD æquale. Eodem modo in △^{lis} AKI & ABC æqualia erunt latera IK & BC. Quoniam itaque anguli NBA & ABC æquales ſunt oſtenſi, erunt quoque ab iiſdem ſubductis æqualibus ſeu ſemirectis GBA & ABK, reliqui NBO & PBC æquales. Similiter, cum anguli ANB & BCA ſint æquales, ſi ipſis addantur æquales ſeu ſemirecti INA & ACI, erunt & anguli ONB & BCP æquales. Hinc, cum △^{lorum} ONB & BCP anguli ad N & B ſint angulis ad C & B æquales, latuſque NB æquale lateri BC, erunt quoque [g] latera NO & OB lateribus

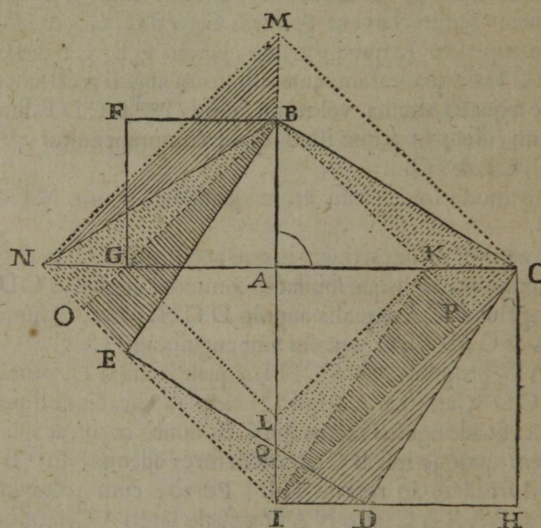
e ℘ 26 Primi Elem. Eucl.
f ℘ 4 Primi Elem. Eucl.
g ℘ 26 Primi Elem. Eucl.

h ꝑ 15 Primi Elem. Eucl. CP & PB æqualia, angulusque NOB ipsi BPC, nec non Δ^{lum} NOB ipsi Δ^{lo} BPC. Quare, angulo GNO ut & OGN, hoc est, [h] AGB, semirecto existente, adeoque [i] angulo NOG vel NOB & consequenter [k] BOE recto, angulus etiam BPC rectus erit. Ideo, quoniã anguli OBP & EBC recti sunt, & ab iisdem subducto communi EBP, anguli OBE & PBC relinquuntur æquales, & proinde bini anguli ad O & B Δ^{li} OBE æquales sunt binis ad P & B Δ^{li} PBC, latusque OB æquale BP (ut ostensum est): erit quoque latus [l] OE ipsi PC, latusque EB ipsi

i ꝑ 32 Primi Elem. Eucl.

k ꝑ 13 Primi Elem. Eucl.

l ꝑ 26 Primi Elem. Eucl.



BC æquale: adeò ut BE perpendiculari existente ipsi BC usque ad NI, illa quoque æqualis sit futura ipsi BC, ac proinde $\square^{ti}$ BCDE angulus E cadet in rectam NI. Præterea, cum AM ipsi AC, hoc est, [m] ipsi IH æqualis sit, & AB ipsi DH (ut supra ostensum): erit & reliqua MB reliquæ ID æqualis. Eodem modo LI æqualis erit ID. Hinc, quoniam Δ^{li} NMB singula latera æqualia sunt singulis lateribus Δ^{li} ICD, erit quoque [n] Δ^{lum} NMB ipsi Δ^{lo} ICD æquale. Item, cum NI æqualis sit IC, & NO æqualis PC: erit reliqua OI, hoc est, [o] OB, reli-

m ꝑ Constructionem.

n ꝑ 8 Primi Elem. Eucl.

o ꝑ 6 Primi Elem. Eucl.

reliquæ I P æqualis. Eſt autem & O E æqualis oſtenſa ipſi P C, hoc eſt, [p] P K; & E B, hoc eſt, B C, æqualis ipſi I K. Quare $\triangle^{lum}$ O B E ipſi $\triangle^{lo}$ I K P [q] æquale erit. Deniq; quoniam N O, O E utraque æqualis eſt oſtenſa ipſi P C, & propterea ipſæ inter ſe æquales ſunt; & N O [r] ipſi O G: erit etiam O E ipſi O G æqualis; quæ ſi auferantur ex æqualibus O I, O B, relinquunt E I æqualem G B, hoc eſt, L K. Unde cum I E ipſi L K, E D vel B C ipſi K I, & I D ipſi I L æqualis ſit: erit itidem [s] $\triangle^{lum}$ E I D ipſi $\triangle^{lo}$ I L K æquale.

[p] p 6 Primi Elem. Eucl.
[q] p 8 Primi Elem. Eucl.
[r] p 6 Primi Elem. Eucl.
[s] p 8 Primi Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Ex hac propoſitione conſtat, ſi duo $\triangle^{li}$ rectanguli latera utcunque cognita ſint, quo pacto tertium latus incognitum inveniendum ſit. Etenim, ſi ex. gr. A B ſit 3, & A C 4, ad inveniendum B C: addatur 9, $\square^{tum}$ ex A B ad 16, $\square^{tum}$ ex A C, & ſit 25, $\square^{tum}$ ex B C. Cujus $\surd$, utpote 5, dabit quæſitum latus B C.

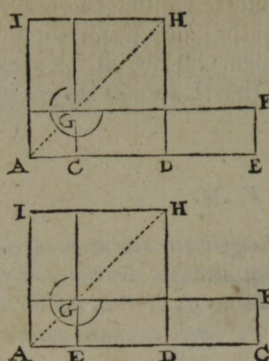
Cognitis autem A B & B C, ad inveniendum A C, ſubducatur 9, $\square^{tum}$ ex A B, à 25, $\square^{to}$ ex B C, & relinquitur 16, pro $\square^{to}$ ex A C, cujus radix 4, eſt A C. Eodem modo, cognitis B C & A C, ut inveniatur A B, ſubtrahendum erit 16, $\square^{tum}$ ex A B, à 25, $\square^{to}$ ex B C, & ex reliquo 9, $\surd$, quæ eſt 3, erit latus A B.

Similiter liquet, quâ ratione $\square^{tum}$ fieri poſſit, ut puta B C D E, quod ſit æquale duobus datis $\square^{tis}$ A B F G & A C H I ſimul ſumptis: nimirum ponendo A B latus unius ad rectos angulos ipſi A C lateri alterius. Quemadmodum etiam ex hac propoſitione manifeſtum eſt, quo pacto $\square^{torum}$ latera collocanda ſint, ad unum $\square^{tum}$ ex altero $\square^{to}$ tollendum, & oſtendendum reliquum $\square^{tum}$.

V.

Si fuerint duæ rectæ lineæ inæquales A D, D C, & ſuper utraque deſcribatur quadratum: excedet quadratum A H majoris A D quadratum G H minoris C D vel D E rectangulo A F, contento ſub aggregato & differentia earundem rectarum.

Demonstratio.



Quoniam enim 3 ▭^{la} IG, GD, & DF æqualia ſunt, quippe ejuſdem longitudinis & latitudinis: patet, ſi ex gnomone IGD auferatur ▭^{lum} IG, & ejus loco addatur ▭^{lum} DF, quòd ▭^{lum} AF ſit æquale gnomoni IGD. Quare cum hic gnomon ſit differẽtia, quâ □^{tum} AH ſuperat □^{tum} GH: excedet □^{tum} AH quadratũ GH rectangulo AF, contento ſub aggregato & differentia ipſarum AD, DC. Id quod cum eo convenit, quod ab Euclide in prop^{ne} 6ta libri 2^{di} Elementorum demonſtratum eſt, ubi docet: ſi CD & DE ſunt æquales, ▭^{lum} CAE unà cum □^{to} ex CD vel DE æquale eſſe □^{to} ex AD.

VI.

Si ex angulo B cujuſcunque trianguli ABC in latus oppoſitum AC, ceu baſin, demittatur perpendicularis BD, cadens extra vel intra triangulum ABC: erit differentia quadratorum, laterum AB, BC circa angulum B, æqualis differentiæ quadratorum à ſegmentis AD, DC, inter perpendicularem BD & baſis terminos A & C comprehenſis.

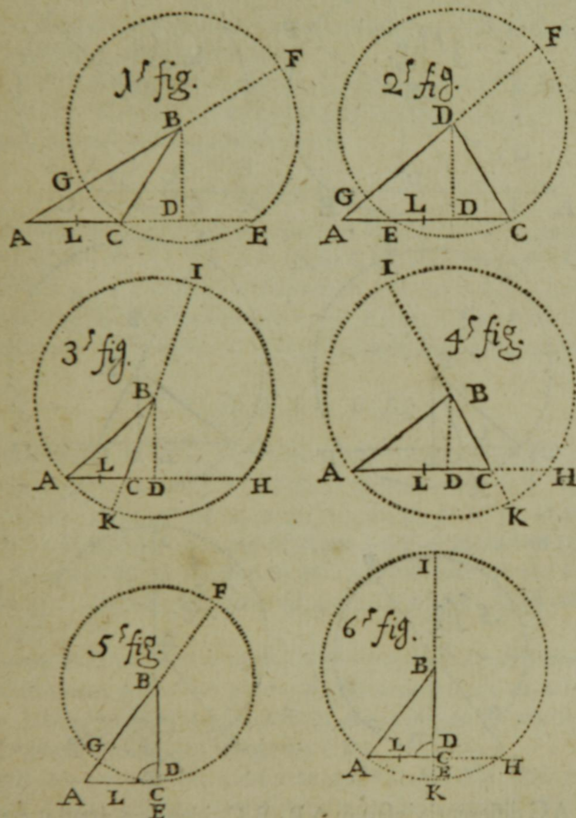
Demonstratio.

a p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.

Quoniam enim [a] □^{tum} ex AB æquale eſt □^{tis} ex AD & DB, & □^{tum} ex BC æquale □^{tis} ex CD & DB: tantum excedet □^{tum} ex AB ipſum □^{tum} ex BC, quantum bina □^{ta} ex AD, DB excedunt bina ex CD, DB. Sed bina □^{ta} ex AD, DB ſuperant bina □^{ta} ex CD, DB, in quantum □^{tum} ex AD ſuperat □^{tum} ex CD. Quare & □^{tum} ex AB tantum excedet □^{tum} ex BC, quantum □^{tum} ex AD excedit □^{tum} ex CD. Quod erat demonſtrandum.

1 Corollarium.

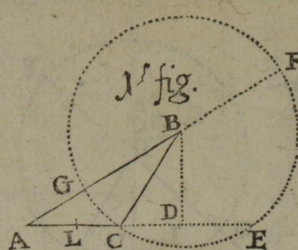
Hinc ſequitur, ſi E D ſumatur æqualis D C, quoniam [b] □tum ex *b ꝑ præcedentē prop.*
AD ſuperat □tum ex D C, rectangulo CAE, contento ſub aggregato

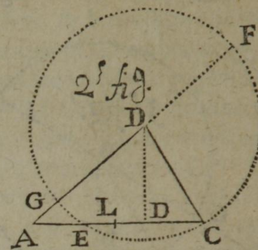


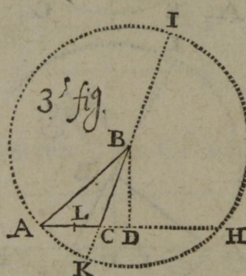
& differentiâ ipſarum A D, DC; atque etiam □tum ex A B excedat □tum ex B C rectangulo, comprehenſo ſub aggregato & differentiâ laterum A B, B C: Rectangulum C A E huic ▭lo eſſe æquale.

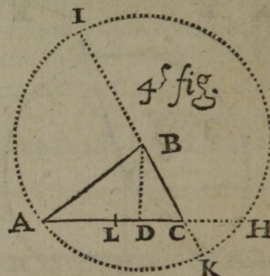
2 Corollarium.

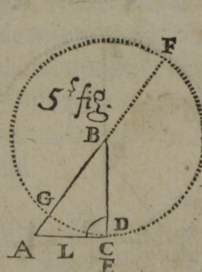
Unde ulteriùs liquet, si ex B intervallo B C describatur circulus, secans A B in G, eamque productam in F, quoniam tum A F summa

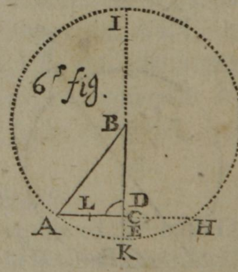












est, & A G differentia ipsarum A B, B C, idemque circulus transeat quoque per E: Quòd $\square^{lum}$ F A G ipsi $\square^{lo}$ C A E sit æquale. Et si Δ^{lum} A B C fuerit rectangulum in C, quòd $\square^{lum}$ F A G æquale sit $\square^{to}$ ex A C. Id quod ab Euclide etiam est ostensum 36ta $prop^{ne}$ lib. 3^{tii} Elementorum.

3 Co-

3 Corollarium.

Similiter patet, si ex B intervallo B A circulus describatur, & A C, C B usque ad circumferentiam producantur in H, I, & K, quoniam rursus I C summa est, & C K differentia ipsarum A B, B C; atque etjam ▭^{lum} A C K, ut supra, (propter æqualitatem rectarum A D, D H) contentum sub summa & differentia ipsarum AD, DC: Quòd ▭^{lum} I C K sit æquale ▭^{lo} A C H.

Et si △^{lum} A B C sit rectangulum in C, quòd ▭^{lum} I C K sit æquale □^{to} ex A C. Id quod Euclides quoque demonstravit 14^{tà} prop^{ne} 2^{di} libri & 35 prop. 3 libri Elementorum.

4 Corollarium.

Unde tandem manifestum fit, divisâ A C bifariam in L, quoniam tum A C dupla est A L, & A E dupla L D, adeoque ▭^{lum} C A E quadruplum ▭^{li} A L D: Quòd differentia □^{torum} ex AB BC, hoc est, ▭^{lum} FAG vel ICK sit quadruplum ▭^{li} ALD. Id quod & à Pappo demonstratum est prop^{ne} 120 libri 7 Collectionum Mathematicarum.

SCHOLIUM.

Ex hac propositione constat, quo pacto, cognitis tribus lateribus △^{li} ABC, inveniri possint segmenta basis A D, D C, & perpendicularis B D. Etenim si BD cadat extra ABC, & AB sit, ex: gr:, 20, BC 13, & AC 11: ut inveniantur AD, DC, multiplicanda erit A F 33 per A G 7, & productum 231, hoc est, ▭ FAG vel CAE, dividendum per AC 11, & habebitur AE 21. Ex qua subductâ A C 11, restabit CE 10, hoc est, 5, pro ED vel DC. Cui si addatur AC 11, fiet AD 16. *Inspice 1 figuram.*

Vel etiam hoc modo: multiplicando scilicet IC 33 per CK 7, & productum 231, hoc est, aream ▭^{li} I C K vel A C H, dividendo per A C 11, orieturq; C H 21. Cui addendo A C 11, fiet A H 32. Hujus semissis 16, erit A D vel DH. Ex qua subductâ AC 11, relinquitur C D 5. *Inspice 3 figuram.*

At verò perpendiculari B D cadente intra A B C, si A B sit, verb: gr: 15, B C 13, & AC 14: ad inveniendas A D & DC multiplicetur AF 28 per AG 2, & fit 56, ▭ FAG vel CAE. Quod divisum per AC 14, dat AE 4. Hæc autem ex AC 14 subducta, relinquit EC 10, hoc est, 5, pro ED vel DC. Quâ ex AC 14 sublatâ, restabit AD 9. *Inspice 2 figuram.*

Vel etiam sic: Multiplicetur I C 28 per CK 2, & fit ▭ ICK vel A C H 56. Quod

Inspice 4 figuram. 56. *Quod divisum per* A C 14, *dat* C H 4. *Huic si addatur* A C 14, *fiet* A H 18, *cujus semissis* 9 *erit ipsa* A D *vel* D H. *Quæ ex* A C 14 *subducta relinquit* D C 5.

E quibus facilè porrò perpendicularis B D *inveniri potest, quemadmodum in scholio prop*^{nis} 4 *hujus est ostensum, vel breviùs, hoc modo: Quoniam differentia quadratorum ex* CD, CB, *per præced. prop. est æqualis rectangulo contento sub aggregato & differentia ipsarum* C D, C B; *atque etiam subducto* □ C D *à* □ CB *per* 4^{tam} *hujus relinquatur* □ BD: *Erit* ▭^{lum} *comprehensum sub aggregato & differentia ipsarum* C D, C B *æquale* □^{to} *ex* B D. *Quare si multiplicetur* 18, *summa ipsarum* C D, C B, *per* 8, *earundem differentiam, erit* 12, √ *nimirum producti* 144, *ipsa longitudo* BD.

Hìc quoque non ineptè ostendi potest, si △^{li} *rectanguli* A B C *cognoscatur unum latus circa rectum, ut* AC, *& aggregatum aut differentia alterius lateris* B C *& Hypotenusæ* A B, *Quo pacto latera* A B, B C *seorsim sint invenienda.*

Si enim A C *sit, ex: gr:,* 8, *& summa ipsarum* AB, BC, *hoc est,* AF *vel* I C
p 2 & 3 Corollarium. 32: *Dividatur* 64, □ A C, *hoc est,* ▭ F A G *vel* ICK, *per* A F *vel* IC 32, *orieturq;* AG *vel* CK 2, *differentia ipsarum* A B, BC. *Hinc si ex* AF 32 *auferatur* AG 2, *relinquetur* GF 30. *Cujus semissis* 15 *est ipsa* GB, BF, *vel* B C. *Huic si addatur* AG 2, *fit* AB 7. *Vel etiam ipsi* IC 32 *addendo* C K 2, *& habetur* I K 34, *cujus semissis* IB *vel* B K 17 *erit ipsa* A B. *E qua subducta* CK 2 *relinquit* C B 15.

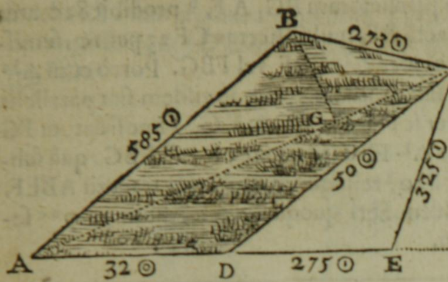
At verò existente A C 8, *&* A G *vel* C K 2, *ut inveniantur* A B *&* B C: *dividatur rursus* 64, □ AC, *hoc est,* ▭ F A G *vel* ICK, *per* A G *vel* CK 2, *orieturq;* AF *vel* IC 32. *E qua subductâ* A G 2, *restabit* GF 30. *Cujus semissis* 15, *erit ipsa* G B, B F, *vel* BC. *Huic si addatur* AG 2, *fiet* AB 17.

Vel etiam ipsi IC 32 *addendo* C K 2, *erit summa* I K 34, *cujus semissis* 17 *erit ipsa* I B, B K, *vel* A B. *E qua sublatâ* C K 2, *remanet* 15 *pro* B C.

VII.

Paludis vel stagni quadrilateri A B C D cognitis lateribus A B 58, 5①, B C 27, 3①, C D 50⓪, & A D 32⓪; productóque latere A D ad E; ita ut D E sit 27, 5①, & EC 32, 5①: invenire aream ABCD.

Quæ-



Quæratur, ut in præcedenti propoſitione eſt oſtenſum, ex tribus △[li] D C E cognitis lateribus, ſegmentum externum E F, ut & perpendicularis CF. Fitque EF 125①, & F C 30⓪. Tum junctâ A C, multiplicetur A D 32⓪ per 15⓪, ſemiſſem nempe ipſius FC: & prodibit [a] 480⓪, area △[li] A C D. Deinde additis A D 32⓪, D E 27, 5①, & E F 12, 5①, fit ſumma A F 72⓪: cujus □[to], utpote 5184⓪, ſi addatur 900⓪, □ FC, habebitur 6084⓪, [b] □ AC. Unde radix, ut 78⓪, erit ipſa A C. Jam quæratur [c] per tria latera △[li] A B C perpendicularis B G, fitque B G 16, 38②. Cujus ſemiſſis ut 8, 19② ſi multiplicetur per AC 78⓪, exſurget 638, 82②, area △[li] A B C. Quæ addita ad 480⓪, aream ſc. △[li] A C D, dabit 1118, 82②, aream totius quadrilateri ABCD, utputa 1118 □ decempedarum, & 82 □ pedum. Quæ erat invenienda.

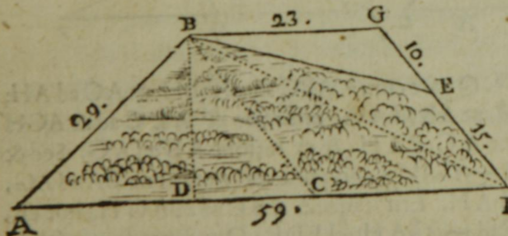
a p vulgarem regulam, inveniendi areā trianguli.

b p 4 hujus, vel p 47 Primi Elem. Eucl.

c ut in præced. prop. eſt oſtenſum.

VIII.

Latifundii quadrilateri A B E F, menſuranti invii, cognitis lateribus A B 29, AF 59, & FE 15 perticarum, productóque latere FE ad G, ita ut BG æquidiſtet ipſi AF, invenire aream ABEF, ſi EG ſit 10, & BG 23 perticarum.



Ductâ B C parallelâ G F, erit B G [a] æqualis CF. Quare, ſi BG 23 auferatur ex A F 59, reſtabit C A 36, cumque B C ſit æqualis G F 25: patet, ſi, ut in 6[ta] propoſitione per 3 latera △[li] A B C quæratur perpendicularis B D, ipſam fore 20. Cujus ſemiſſis 10 ſi multiplicetur

a p 34 Primi Elem. Eucl.

b p vulgarem regulam inveniendi aream trapezii cũ duobus lateribus parallelis.

c p vulgarem regulam inveniendi aream trianguli.

d p 1 Sexti Elem. Eucl.

per 82, summam laterum parallelorum BG, AF, [b] prodibit 820, area trapezii ABGF. Tum junctâ BF, multiplicetur CF 23 per 10, semissem ipsius BD, & [c] fit 230, area △[li] CBF vel FBG. Porrò cum △[la] FBG & EBG ejusdem sint altitudinis, seu in eisdem sint parallelis CB, FG, aç proinde [d] inter se ut bases FG & EG: Hinc si fiat, ut FG 25 ad EG 10, sic 230 area △[li] FBG, ad 92 aream △[li] EBG: quâ subductâ ex tota area ABGF 820, relinquitur 728, area trapezii ABEF. Quæ erat invenienda. Idem fieri quoque potest, ut in prop[ne] sequenti 10[ma] est ostensum.

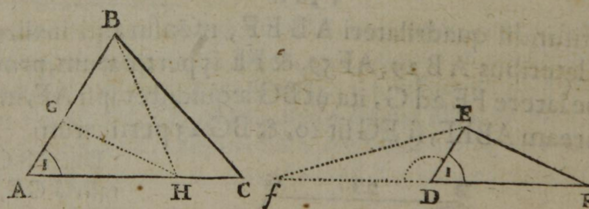
IX.

Triangula ABC, DEF æqualem angulum 1 habentia inter se sunt, ut rectangula BAC, EDF, contenta sub lateribus BA, AC & ED, DC circa æqualem angulum.

Demonstratio.

a p 4 Primi Elem. Eucl.

Sumptis enim AG, AH æqualibus DE, DF, agantur GH, HB, eritque [a] △ AGH æquale △[lo] DEF. Est autem ratio △[li] ABC ad △ AGH composita ex ratione △[li] ABC ad △ ABH, & ex ratione △[li]



b Est enim ratio extremorum cõposita ex rationibus intermediis.

c p 1 Sexti Elem. Eucl.

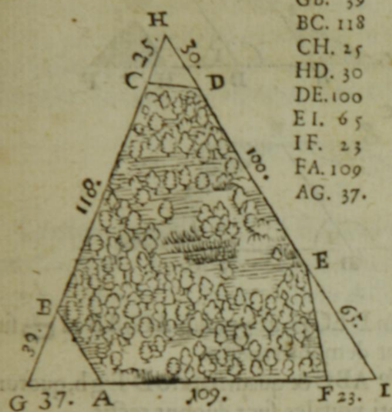
d p 23 Sexti Elem. Eucl.

ABH ad △ AGH [b]. Quare cum [c] ABC sit ad ABH, ut AC ad AH; & ABH ad AGH, ut AB ad AG: erit ratio △[li] ABC ad △ AGH composita ex ratione AC ad AH, & ex ratione AB ad AG. Sed & ratio ▭[li] BAC ad ▭ GAH [d] composita est ex ratione BA ad AG, & ex ratione AC ad AH. Erit itaque △ ABC ad △ AGH, hoc est, DEF, ut ▭ BAC ad ▭ GAH vel EDF. Quod erat demonstrandum.

Idem patet in △[lis] ABC, DE*f*, quorum anguli ad A & D duobus simul

ſimul rectis ſunt æquales: quoniam, *f* D æquali aſſumptâ & in directum ipſi D F, △ *f* D E ipſi △ DEF [e] eſt æquale, ut & ▭ *f* DE ipſi ▭ EDF. *[e] p 38 Primi Elem. Eucl.*

SCHOLIUM.



GB.	39
BC.	118
CH.	25
HD.	30
DE.	100
EI.	65
IF.	23
FA.	109
AG.	37.

Hinc liquet, quâ ratione inveniri queat area ſaltus aut ſtagni, quod triangulo includi poteſt. Ut ex: gr: ad inveniendam aream hexagoni ABCDEF, triangulo G H I incluſi, cujus omnes lineæ, in margine notatæ, cognitæ ſunt. Quæratur 1[mum] *per tria latera* [f] *area* △[li] *G H I* 14196. *Tum fiat, ut* 30758, ▭ *HGI, ad* 1443, ▭ *B G A, ita* 14196, *ad* 666, *aream* △[li] *GBA. Rurſus fiat, ut* 35490, ▭ *G H I ad* 750, ▭ *C H D, ita* 14196 *ad* 300, *aream* △[li] *CHD; ac denique ut* 32955, ▭ *G I H ad* 1495, ▭ *F I E, ita* 14196 *ad* 644, *aream* △[li] *FEI. Unde additis* 666, 300, *&* 644, *ſumma* 1610 *ſubtrahatur ex* 14196, *& relinquetur* 12586, *area hexagoni ABCDEF.* *[f] ut in 7 prop. hujus.*

X.

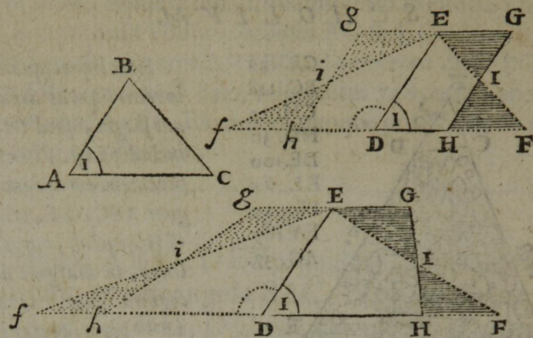
Si triangulum A B C & quadrilaterum D E G H æqualem habeant angulum 1, lateráque DH, EG ſint parallela: erit triangulum ABC ad quadrilaterum DE GH, ſicut rectangulum ſub A C, A B ad rectangulum ſub D H, E G & DE.

Demonſtratio.

Sumptâ HF æquali EG in directum ipſi DH, jungatur E F, ſecans HG in I: eritque △ D E F æquale quadrilatero D E G H, propter æqualia △[la] EGI & HFI [a]. Hinc, cum D F ſit ſumma ipſarum DH, *[a] p 29 & 26 Primi Elem. Eucl.*

 EG,

EG, & per præcedentem propositionem △ ABC sit ad △ DEF, hoc est, ad quadrilaterum DEGH, sicut ▭ CAB ad ▭ FDE: patet,

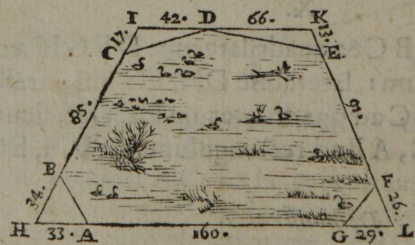


△ ABC esse ad quadrilaterum DEGH, ut ▭ sub AG, AB ad ▭ sub DH, EG & DE. Quod erat demonstrandum.

Idem similiter patet in △lo ABC & quadrilatero DEgh, quorum anguli ad A & D simul sumpti æquales sunt duobus rectis.

SCHOLIUM.

Hinc manifestum est, quo pacto area saltus stagnivé inveniri queat, quod quadrilatero includi potest, habente duo latera parallela. Si enim, verbi gr.,



HB.	34
BC.	85
CI.	17
ID.	42
DK.	66
KE.	13
EF.	91
FL.	26
LG.	29
GA.	160
AH.	33.

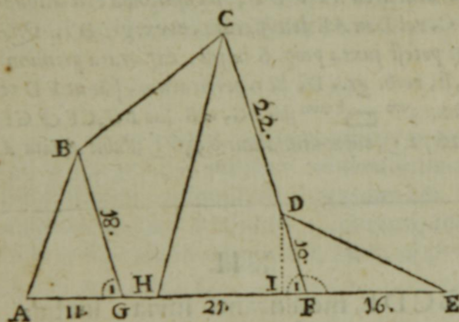
invenienda sit area heptagoni ABCDEFG, comprehensi quadrilatero HIKL, cujus latera IK, HL sunt parallela, & segmenta, ut in margine, cognita:

quæ-

queratur primò, ut in 8va prop^{ne} eſt oſtenſum, area trapezii HIKL 19800. *Tum fiat, ut* 44880, ▭ *ſub* HL, IK & HI, *ad* 1122, ▭ *ſub* HA, HB, *ita* 19800 *ad* 495, *aream* $\triangle^{li}$ HBA. *Deinde, ut* 44880, ▭ *ſub* HL, IK & HI, *ad* 714, ▭ *ſub* CI, ID, *ita* 19800 *ad* 315, *aream* $\triangle^{li}$ CID. *Rurſus, ut* 42900, ▭ *ſub* HL, IK & LK, *ad* 858, ▭ *ſub* DK, KE, *ita* 19800 *ad* 396, *aream* $\triangle^{li}$ DKE. *Et denique ut* 42900, ▭ *ſub* HL, IK & LK, *ad* 754, ▭ *ſub* GL, LF, *ita* 19800 *ad* 348, *aream* $\triangle^{li}$ GFL. *Vnde additis* 495, 315, 396, & 348, *ſi ſumma* 1554 *ſubducatur ex* 19800, *relinquetur* 18246, *area heptagoni* ABCDEFG, *quæſita.*

XI.

Latifundium ABCDE dividere bifariam rectâ CH, prodeunte ex angulo C; productâ CD ad F, ductâque BG parallelâ CF: datis autem AG 11, GB 18, GF 21, FD 10, DC 22, & FC 16 decempedarum.



Conſtructio.

Ex 1248, ſummâ rectangulorum AGB ex BG, CF & GF, ſubtrahatur 160, ▭ DFE, ac reliqui 1088 ſemiſſis 544 dividatur per CF 32, orietur HF 17 decempedarum.

Demonstratio.

Per prop. præced. areæ ABG, GBCF, FDE, ut & area HCF inter se sunt, ut $\square^{la}$ sub AG, GB, sub BG, CF & GF, sub DF, FE, & sub HF, FC. Hinc si CH dividat aream ABCDE bifariam, erunt bina rectangula sub HF, FC & sub DF, FE dimidium trium prædictorum sub AG, GB, sub BG, CF & GF, & sub DF, FE, hoc est, æqualia erunt semissi $\square^{li}$ sub AG, GB, semissi $\square^{li}$ sub BG, CF & GF, & semissi $\square^{li}$ sub DF, FE. A quibus si utrinque auferatur $\square$ sub DF, FE, erit reliquum $\square$ sub HF, FC æquale semisi rectangulorum sub AG, GB, & sub BG, CF & GF, dempto ex eisdem dimidio $\square^{lo}$ sub DF, FE. E quibus patet, additis $\square^{lis}$ sub AG, GB, & sub BG, FC & GF, si ex summa auferatur $\square$ sub DF, FE, semissem reliqui fore $\square$ sub HF, FC. Id quod divisum per CF, unum latus, dat alterum HF. Quod quærebatur.

SCHOLIUM.

Porrò si quæratur area ABCDE, *mensuranda erit aliqua perpendicularium ex* B, C, *vel* D *in* AE *demissarum, ut ex: gr:* DI. *Quæ & per calculum obtineri potest juxta prop. 6 hujus, exploratâ primum longitudine* DE. *Quare, si, verb. gr.,* DI *sit 9 perticarum, fiat ut* FD 10, *ad* DI 9, *ita* 1408, *summa* 3um $\square^{lorum}$ *sub* AG, GB *sub* BG, CF *&* GF, *& sub* DF, FE, *ad* 4^{tum} 12672①, *cujus dimidium* 6336①, *dabit aream* ABCDE.

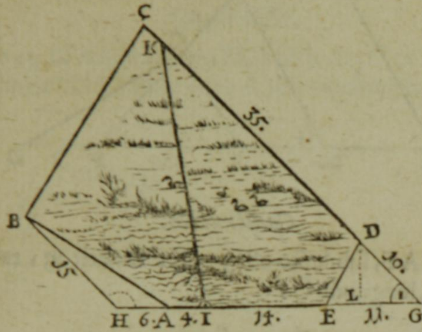
XII.

Area ABCDE mensuranti invia, inclusa trapezio HBCG, cujus latera HB & GC sunt parallela, dividenda est bifariam, rectâ IK, prodeunte ex dato puncto I in latere AE. Jam quæritur, si BH sit 15, HA 6, AI 4, IE 14, EG 11, GD 10, & DC 35 pertic. seu decempedarum, quanta sit, futura CK?

Con-

Constructio.

Subducto 90, ▭^{lo} BHA, ex 2210, summâ ▭^{lorum} EGD, & sub BH, CG & HG, reliqui 2120 semissis 1060 si dividatur per IG 25,



orietur GK $42\frac{2}{5}$ seu 424①. Quæ ex tota GC 45⓪ ablata, relinquit CD 26①. Cujus demonstratio fit ad modum prop^{nis} proximè præcedentis.

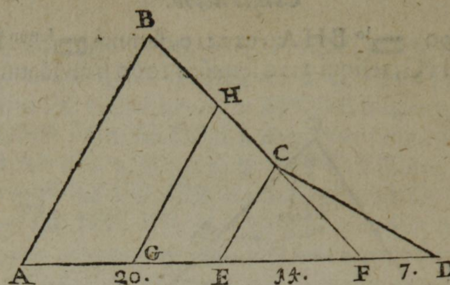
SCHOLIVM.

Porrò ad inveniendam aream ABCDE, metienda erit una perpendicularium ex B vel D, ut, ex: gr:, DL. quæ & per calculum obtineri potest, ut in 6ta propositione est ostensum, exploratâ priùs longitudine ED. Hinc, si DL sit ex: gr: 6 pertiarum: fiat ut GD 10 ad DL 6, ita 1900, differentia, quâ ▭ sub BH, CG & HG excedit bina ▭^{la} BHA, EGD, ad 4^{tum} 1140. Cujus semissis 570, erit area ABCDE.

XIII.

Latifundium quadrangulum ABCD, cujus latus BC est productum ad F, in eoque ducta CE parallela ipsi AB, dividendum est bifariam rectâ GH ipsi AB parallelâ: Quæritur punctum G, ubi illa incidet in rectam AD, si AE sit 20, EF 14, & FD 7 perticarum?

Con-



Constructio.

Ex 1156, □ AF, subducto 98, ▭ EFD: erit 23, radix ex 529, semisse reliqui, longitudo GF.

Demonstratio.

Per 19 prop: 6[ti] lib: Elem. Euclidis △ ABF est ad △ ECF, ut □ AF ad □ EF. Est autem [a] △ ECF ad △ FCD, ut EF ad FD, hoc est, assumptâ communi altitudine EF, ut □ ex EF ad ▭ EFD. Unde & [b] △ ABF ad △ FCD erit, ut □ ex AF ad ▭ EFD. Porrò [c] △ ABF est quoque ad △ GHF, ut □ ex AF ad □ ex GF. Quare △[la] ABF, GHF, & FCD inter se erunt, ut □[ta] ex AF, GF, & ▭ EFD inter se. Est autem per constructionẽ □ ex GF dimidium differentiæ, quâ □ ex AF excedit ▭ EFD. Unde & △ GHF dimidium erit differentiæ, quâ △ ABF excedit △ FCD. Quare si illîc semel & hîc bis addatur △ FCD, erunt △[la] GHF & FCD simul sumpta, hoc est, area GHCD, dimidium △[lorum] ABF, & FCD simul sumptorum, hoc est, dimidium quadranguli ABCD; adeóque recta GH dividens ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

a p 1 Sexti Elem. Eucl.
b p 22 Quinti Elem. Eucl.
c p 19 Sexti Elem. Eucl.

Corollarium.

Ex ostensis patet, △ ABF esse ad △ FCD, ut □ AF ad ▭ EFD.

XIV.

Fundus quadrangulus ABCD, in quo CE parallela ducta est

eſt ipſi AB, & DF ipſi BC, dividendus eſt biſariam rectâ GH ipſi AB parallelâ. Quæritur, quâ ratione id fieri debeat, ut & quanta futura ſit longitudo lineæ GH, ſi AB ſit 15, EF 2, & FC 7 perticarum.

Conſtructio.

Additis 225, □ AB, & 63, ▭ ECF, erit 12, √ ex ſemiſſe ſummæ, longitudo lineæ GH. Hinc ſi ab A ad I menſurentur 12 perticæ, & ducatur IH ipſi AD parallela, donec occurrat ipſi BC in H: erit HG, ducta ex H ipſi AB parallela, ſecans quæſita.

Demonſtratio.

Etenim productis AD, BC donec concurrant in K, erit [a] △ ABK ad △ ECK, ut □ AB ad □ EC. Eſt autem [b] △ ECK ad △ DCK, ut EK ad DK, vel EC ad CF, hoc eſt, aſſumptâ communi altitudine EC, ut □ EC ad ▭ ECF. Erit igitur [c] △ ABK ad △ DCK, ut □ AB ad ▭ ECF. Sed ut △ ABK eſt ad △ GHK, ita quoque [d] eſt □ AB ad □ GH. Unde △la ABK, GHK, & DCK inter ſe erunt, ſicut □ta ex AB, GH, & ▭ ECF inter ſe. At verò per conſtr. □ GH dimidium eſt □ti AB & ▭li ECF. Quare etiam △ GHK dimidium erit △lorum ABK & DCK. Jam cum bina hæc bis contineant △ DCK & ſemel quadrangulum ABCD, ſed GHK ſemel tantùm idem △ DCK unà cum trapezio GHCD: patet △ DCK ſemel, unà cum trapezio GHCD, dimidium eſſe ejuſdem △li DCK bis ſumpti, unà cum quadrangulo ABCD; adeóque ſi illîc ſemel & hîc bis auferatur

a p 19 Sexti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.
c p 22 Quinti Elem. Eucl.
d p 19 Sexti Elem. Eucl.

△DCK, reliquum prius GHCD dimidium esse reliqui posterioris ABCD: ac proinde lineam GH secare quadrangulum ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

Corollarium.

Ex demonstratis patet: △ABK esse ad △DCK, ut □AB ad ▭ ECF.

SCHOLIVM.

Porrò, ut inveniatur, ubinam GH cadat in AD, exploranda priùs erit ED, quæ si, verb: gr:, sit 6 pert.; erit [e] *propter similitudinem △lorum EFD, IBH, ut FE 2 ad ED 6, sic BI 3 ad IH vel AG 9. Ostendens perticas, quibus secans GH distare intelligitur à puncto A versus D in recta AD.*

[e] p 4 Sexti Elem. Eucl.

Denique, AB parallelâ existente ipsi CD, hoc est, CD eâdem existente quæ CE, quia tum ▭ ECF idem est ac □ EC, ad dividendum trapezium ABCE bifariam, addemus □ta ex AB & EC: erit enim, ut ante, √ ex semisse summæ longitudo secantis GH. Vt si AB fuerit 31, & EC 17 pert., invenietur GH 25 perticarum.

Cæterùm ut constet, ubi hæc incidat in AE, exploratâ prius AE, quæ sit, verb: gr:, 21 pert.; subtrahemus GH, hoc est, AI 25, ex AB 31, & restabit IB 6; nec non EC, hoc est, AL 17, ex AB 31, & restabit LB 14. Tum fiat propter △la similia BLC & BIH, ut BL 14 ad LC, hoc est, AE 21, sic BI 6 ad IH vel AG 9. Eodem modo si GH dividat ABCE, ut ante, erit □ ex GK semissis □torum ex AK & EK.

XV.

Agrum quadrangulum ABCD, in quo BE, CF perpendiculares sunt ipsi AD, & BC producta ad G, dividere bifariam rectâ HI ad AD perpendiculari, & invenire in quod punctum ipsius AD incidat, si AE sit 13, EF 9, FG 5, & GD 8 perticarum.

Constructio.

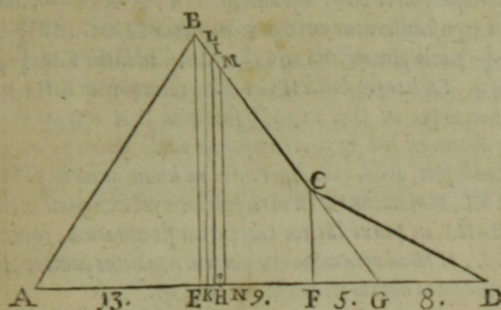
Subducto 40, ▭ FGD, ex 378, ▭ AGE: erit 13, √ ex 169, semisse reliqui, longitudo HG.

De-

Demonstratio.

Per 1^{mam} prop. 6 lib. Elem. Eucl. △ ABG est ad △ EBG, ut AG ad EG, hoc est, assumptâ communi altitudine EG, ut ▭ AGE ad □ EG. Est autem [a] △ EBG ad △ HIG, ut □ EG ad □ HG. Quare

a p 19 Sext Elem. Eucl



[b] & △ ABG ad △ HIG erit, ut ▭ AGE ad □ HG. Sed ut △ HIG est ad △ GCD, ita est, per coroll. 13^{tiæ} prop^{nis} hujus, □ HG ad ▭ FGD. Unde constat △^{la} ABG, HIG, & GCD inter se esse, sicut ▭ AGE, □ HG, & ▭ FGD inter se sunt. Jam verò per constructionem □ HG est semissis differentiæ, quâ ▭ AGE superat ▭ FGD. Quare & △ HIG semissis erit differentiæ, quâ △ ABG superat △ GCD. Hinc si illic semel & hic bis addatur △ BCD, erunt bina △^{la} HIG, GCD, hoc est, area HICD, semissis binorum △^{rum} ABG, GCD, hoc est, semissis quadranguli ABCD: ac proinde linea HI secans ABCD bifariam. Quod erat faciendum.

b p 22 Quinti Elem. Eucl.

Corollarium.

Ex demonstratis patet: △ ABG esse ad △ HIG, ut ▭ AGE ad □ HG: itemque [c] ABG ad GCD, ut ▭ AGE ad ▭ FGD,

c p 22 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

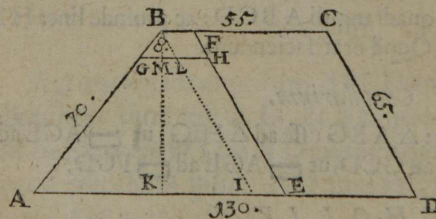
Quoniam in his regionibus foßis communiter agri distingui solent, hinc si ad distinguendas prædictas æquales partes, foßa communis fodienda sit, puta, KLMN datæ latitudinis, verb: gr:, 1 perticæ seu decempedæ; ita ut abscissæ

partes A B L K, & NMCD sint æquales: Sciendum est, quòd, subductis hisce partibus æqualibus ex æqualibus ABIH & H I C D, reliquæ partes KLIH & HIMN quoque sint æquales, idcirco etiam ut in Coroll. præced. prop. □ *HG dimidium sit futurum* □torum *K G & N G. Quare, si ad inveniendas K H & HN, KN in O bisariam secetur, ac inde quoque* [e] □ta *KO & OG simul sint dimidium* □torum *KG & N G: constat bina* □ta *K O & O G æqualia esse* □to *H G, adeóque valere 169. Est autem KI 1, & K O* $\frac{1}{2}$, *adeóque* □ *KO* $\frac{1}{4}$. *Hoc ergo si auferatur ex 169, relinquetur* □ *OG 168* $\frac{3}{4}$, *hoc est, OG* $\sqrt{}$ *168* $\frac{3}{4}$. *paulò plus quàm 1299 ②. Cui si addatur K O* $\frac{1}{2}$ *seu 5 ①, fit K G 1349 ②. Ex hac subductâ H G 13 ⓪, relinquitur K H, paulò plus quàm 49 ②: itemque ex O G 1299 ② subductâ O N 5 ①, remanet N G 1294 ②. Hæc autem ex HG 13 ⓪, relinquetur paulò minus quàm 51 ②, pro HN. Ex quibus liquet, quòd, cum differentia ne unum quidem pollicem conficiat, si lineæ KL, NM ducuntur ex veris suis locis vel ex æquali utrinque latitudine à recta H I, in praxi idcirco Geodætica sit usitatum, inventâ rectâ H I, rectas K L, N M ad utramque ejus partem æqualiter sumere, siquidem tam exigua differentia nullius ibi considerationis est.*

[e] p 10 Secundi Elem. Eucl.

XVI.

Trapezium ABCD, cujus latera B C & A D sunt parallela, dividere, ita ut, dempto communi itinere GBFH latitudinis BM 8 pedum, parallelogrammum E F C D sit æquale trapezio AGHE; & invenire A E vel E D, distantiam secantis F E ab angulo A vel D, si A B sit 70, B C 55, CD 65, & AD 130 pedum.



Ductâ B I parallelâ C D, quæratur ut in 8va prop. hujus latitudo B K 56. Tum fiat, ut B K 56 ad A I 75, ita B M 8 ad G L 10 $\frac{5}{7}$. Quæ addita summæ ipsarum BC, AD, 185, dat 195 $\frac{5}{7}$, summam ipsarum G H, F C, & AD. Hinc, cum partes AGHE & EFCD ponantur æquales, ac proinde B K 56, latitudo partis E F C D, sit ad MK 48, latitudinem partis AGHE, sicut summa ipsarum G H, A E

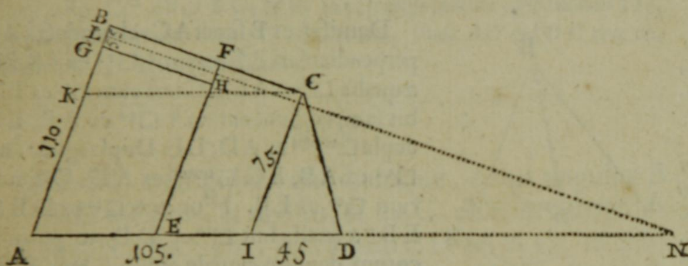
ad

ad summam ipsarum FC, ED: patet, si fiat ut 104, summa ipsarum BK, MK, ad MK 48, ita $195\frac{5}{7}$ ad $90\frac{3}{91}$, summam ipsarum FC, ED. Unde FC vel ED erit $45\frac{15}{91}$ pedum, adeóque AE $84\frac{76}{91}$ pedum. Quod erat inveniendum.

XVII.

Trapezium ABCD, in quo CI ducta est parallela lateri AB, dividere; ita ut, dempto communi itinere seu parallelogrammo GBFH, cujus latus GB sit 10 pedum, partes AGHE & EFCD sint æquales, & invenire punctum E in recta AD, in quod incidit recta secans EF ipsi AB parallela, si AB sit 110, AI 105, IC 75, & ID 45 pedum.

Ad quod inveniendum operatio instituenda est, ut sequitur.



Add. { AB. 110
IC. 75
summa. 185
per AI. 105
925
185
ABCI. 19425
add. ICD. 3375
summa ABCD. 22800
semissis ALME. 11400

Mult. IC. 75
per ID. 45
375
300
ICD. 3375

Ex AB. 110
subtr. IC vel AK. 75
rel KB. 35 —— KC vel AI 105 —— subt. { AB. 110, LB. 5 } AL. 105 | AN. 315

Mult. KC 105
per KB. 35
525
315
KBC. 3675

KC. 105
105
525
105
□ KC. 11025

AN. 315
per AL. 105
1575
315
ALN. 33075
subt. ALME. 11400
EMN. 21675 | □ EN. 65025

vel, KB. 35 —— KC. 105 —— EMN. 21675 | □ EN. 65025

Unde

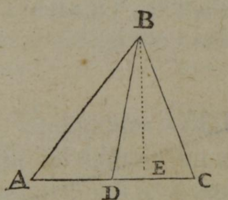
Unde extractâ radice, invenietur EN 255. Quæ subducta ex AN 315, relinquit AE 60. Ostendens quot pedes secans EF cadit à puncto A versùs punctum D, super latere AD.

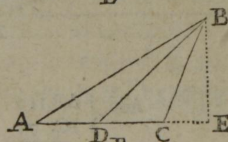
XVIII.

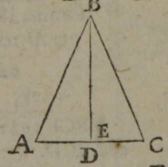
122 prop. 7 libri Pappi Alexandrini.

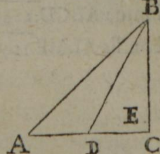
Si ex angulo B cujuscunque trianguli ABC ad punctum medium D lateris oppositi AC recta linea ducatur BD, erunt quadrata laterum AB, BC circa angulum B dupla quadratorum, quorum unum super ducta BD, & alterum super AD vel DC semisse oppositi lateris AC describitur.

Demonstratio.









a p 4 hujus vel 47 Primi Elem. Eucl.
b p 9 aut 10 Secundi Elem. Eucl.
c p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.

Demissâ ex B super AC vel productâ AE perpendiculari BE, erunt [a] $\square^{ta}$ ex AB, BC æqualia $\square^{tis}$ ex AE, EC unà cum $\square^{to}$ ex EB, bis sumpto. Sunt autem [b] $\square^{ta}$ ex AE, EC dupla $\square^{torum}$ ex AD, DE. Dupla igitur sunt $\square^{ta}$ ex AB, BC $\square^{torum}$ ex AD, DE unà cum $\square^{to}$ ex EB. Hinc cum $\square^{ta}$ ex DE & EB [c] æqualia sint $\square^{to}$ ex DB, ac proinde eorum duplum æquale duplo $\square^{to}$ ex DB: patet, $\square^{ta}$ ex AB, BC quadratorum ex AD, DB esse dupla. Quod erat propositum.

Idem intellige, si latera AB, BC sint æqualia, & perpendicularis BE cadat in punctum D: quandoquidem $\square^{a}$ ex AD, DC tum æqualia sunt, & eadem, ut dictum est, unà cum $\square^{to}$ ex DB bis sumpto æqualia $\square^{tis}$ ex AB, BC, adeoque hæc dupla $\square^{torum}$ ex AD, DB.

d p 12 Secundi Elem. Eucl.

Simile fit, si perpendicularis BE cadit in punctum A vel C. Quo casu $\square^{tum}$ ex AB [d] æquale erit $\square^{tis}$ ex AD, DB unà cum duplo ▭^{lo} ADC, hoc est, duplo $\square^{to}$ ex DC. Quibus si utrinque addatur commune

$\square^{tum}$

$\square^{tum}$ ex BC: erunt $\square^{ta}$ ex A B, B C æqualia 3^{bus} $\square^{tis}$ ex A D, DB, & BC, unà cum duplo $\square^{to}$ ex DC. Sunt autem $\square^{ta}$ ex BC, DC [e] æqualia $\square^{to}$ ex D B. Quocirca $\square^{ta}$ ex AB, BC æqualia erunt $\square^{tis}$ ex A D, DC, hoc eſt, duplo $\square^{to}$ ex A D vel D C, unà cum duplo $\square^{to}$ ex D B. Ut erat propoſitum. Hinc ſi ex angulo B, &c. Quod erat demonſtrandum. *e 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.*

SCHOLIVM.

Hinc manifeſtum eſt, ſi tria latera $\triangle^{li}$ A B C cognita fuerint, quo pacto recta BD inveniri poſsit. Si enim AB, ex.gr., ſit 19, BC 17, & AC 20, addatur 361, $\square$ AB, ad 289, $\square$ BC, & ſummæ 650 dimidium 325 erit ſumma $\square^{torum}$ ex AD & DB. E qua ſubducto 100, $\square$ AD vel D C, reſtabit 225, $\square$ BD. Vnde BD erit 15.

Eodem modo, ſi AB, BD, & BC cognitæ ſint, & quæratur AC: addantur 361 & 289, $\square^{ta}$ AB & B C, & ex 325, ſemiſſe ſummæ, ſubducatur 225, $\square$ B D, & relinquetur 100, $\square$ AD vel DC. Vnde AD vel D C erit 10, adeóque AC 20. Quæ quærebatur.

XIX.

Sit A B C triangulum quodcunque, cujus angulus B rectâ B D bifariam ſit diviſus, & ex C, alterutro angulorum A vel C deſcripto, intervallo C D vel A D, circulo D E F, ſecante rectam B D vel productam in E: dico B D ad BE eſſe, ſicut AD ad DC, vel AB ad BC.

Demonſtratio.

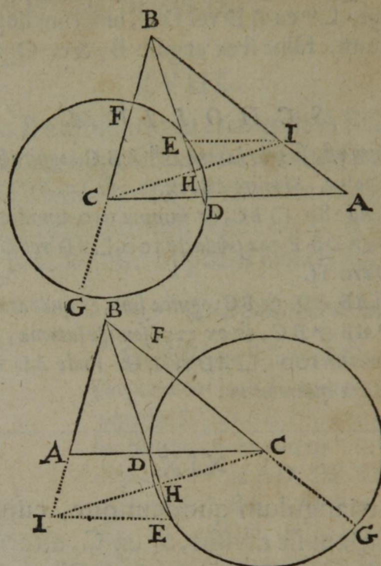
Si AB, BC æqualia ſint, patet B D, latus AC bifariam & ad rectos angulos ſecare; itemque circulum D E F tangi à recta B D in puncto D: adeoque B D hoc caſu ſumendam eſſe pro duabus rectis æqualibus.

At verò AB, B C inæqualibus exiſtentibus, demittatur ex C ſuper B D vel productam perpendicularis C H, quæ producta occurrat ipſi A B vel productæ in I, jungaturque IE.

Quoniam itaque ex hypotheſi anguli ad B $\triangle^{lorum}$ C B H & I B H ſunt æquales, & anguli ad H ex conſtructione recti, itemque latus BH utrique $\triangle^{lo}$ commune: [a] erunt & reliqua latera B C, C H reliquis *a 26 Primi Elem. Eucl.*

quis BI, IH æqualia. Hinc cum [b] anguli DHC & EHI △lorum DCH & IEH ſint æquales, & CH æqualis HI, itemque DH [c] æqualis HE,

b p 15 Primi Elem. Eucl.
c p 3 Tertii Elem. Eucl.



erit quoque [d] D C æqualis IE, & angulus D C H angulo EIH æqualis, ac proinde [e] IE ipſi AC parallela, adeoque △ BEI ſimile △ BDA. Unde erit [f] ut B E ad E I, hoc eſt, C D, ita B D ad DA: nec non BE ad BI, hoc eſt, CB, ita BD ad B A, hoc eſt, permutando [g] B E ad B D, ſicut C D ad DA, vel ut CB ad B A. Quod erat demonſtrandum.

d p 4 Primi Elem. Eucl.
e p 27 Primi Elem. Eucl.
f p 4 Sexti Elem. Eucl.
g p 16 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Hinc patet, cognitis CB, BD, & CD, facilè inveniri B A & AD.

Si enim, verb, gr., C B ſit 42, B D 45, & C D 39: Addatur C D vel CG 39 ad CB 42, & ſit G B 81; Deinde ſubductâ CD vel CF 39 ex CB 42, reliqua F B 3 multiplicetur per G B 81, fietq; 243, ▭ G B F vel DBE. Quod diviſum per D B 45 dat B E $5\frac{2}{5}$. Hinc fiat ut B E $5\frac{2}{5}$ ad B D 45, ita CD 39 ad DA 325, & CB 42 ad B A 350.

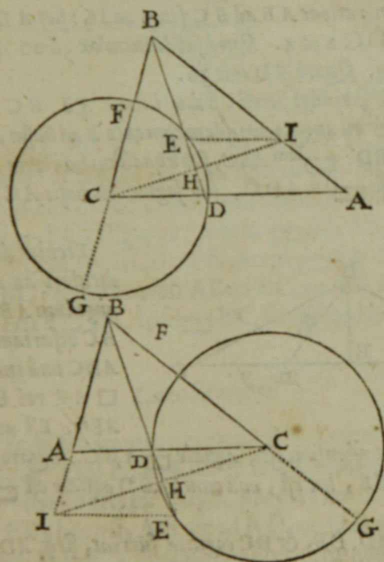
No-

NOTA, eodem modo hîc procedi, ac si per tria latera $\triangle$*li* CBD, *ut in* 6*ta hujus, quæratur* BE, *quæ summa est vel differentia segmentorum basis* BH, HD; *ac tum fieret, ut* BE $5\frac{2}{5}$ *ad* EI *vel* CD 39, *ita* BD 45 *ad* DA 325; *ac rursus ut* BE $5\frac{2}{5}$ *ad* BI *vel* BC 42, *ita* BD 45 *ad* BA 350.

XX.

Si ex angulo B trianguli cujuscunque ABC ad latus oppositum AC ducatur recta linea BD, angulum B bifariam secans: erit rectangulum sub lateribus AB, BC, dictum angulum B comprehendentibus, æquale rectangulo sub segmentis AD, DC oppositi lateris AC unà cum quadrato secantis BD.

Demonstratio.



Per præced. prop. EB est ad BD, sicut CD ad DA, vel CB ad BA. Sed ut EB ad BD, ita quoque est [a] assumptâ communi altitudine BD, *[a] p 1 Sexti Elem. Eucl.*

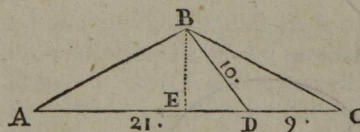
BD, ▭ EBD, hoc eſt, ▭ GBF ad □ BD. Similiter etiam CD eſt ad DA, ſumendo CD communem altitudinem, ut □ CD ad ▭ CDA. Quocirca erit ut ▭ GBF ad □ BD, ita □ CD ad ▭ CDA: adeoque per 12 prop. 5ti Elem. Eucl: ut ▭ GBF unà cum □ CD vel CF, hoc eſt [b], □ CB, ad □ BD unà cum ▭ CDA, ita □ CD ad ▭ CDA, hoc eſt (ut dictum fuit) ut CD ad DA, vel CB ad BA. Sed ut CB ad BA, ita quoque eſt [c], aſſumptâ communi altitudine CB, □ CB ad ▭ CBA. Unde erit, ut □ CB ad □ BD unà cum ▭ CDA, ita idem □ CB ad ▭ CBA. Æquale igitur eſt [d] □ BD unà cum ▭ CDA ipſi ▭ CBA. Quod erat demonſtrandum.

b p 6 Secundi Elem. Eucl.
c p 1 Sexti Elem. Eucl.
d p 9 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Hinc liquet, cognitis tribus △li ABC lateribus, quâ ratione inveniri poſſit longitudo rectæ BD. Etenim ſi AB ſit 45, BC 80, & AC 100; & AC 100 dividatur in ratione AB ad BC ſeu 9 ad 16: fiet AD 36, & DC 64, adeóque ▭ ADC 2304. Quod ſubductum ex 3600, ▭ ABC, relinquit 1296, □ BD. Quare BD erit 36.

Non ineptè hîc ſubjungi poteſt, ſi duo latera AB, BC trianguli ABC æqualia fuerint, & ex angulo ab iiſdem contento B ad baſin AC utcunque ducatur recta linea BD: ▭lum ABC, ſub æqualibus lateribus AB, BC comprehenſum æquale eſſe ▭lo ADC, ſub ſegmentis baſis AC, unà cum □to ductæ BD.



e p 5 Secundi Elem. Eucl.

Etenim ductâ BE perpendiculari ad AC, ſecabit ipſa angulum ABC, ut & baſin AC bifariam: eritque [e] ▭ ADC unâ cum □ ED æquale □ AE vel EC, hoc eſt, ▭ AEC. Eſt autem ▭ AEC unà cum □ EB, ut oſtenſum eſt, æquale ▭ ABC. Quare ▭ ADC unà cum □tis ex ED, EB, hoc eſt, unà cum □ BD æquale eſt ▭ ABC. Quod erat propoſitum.

Vnde liquet, ſi AD, DB, & DC cognitæ fuerint, ſitq; AD 21, DB 10, & DC 9, quo pacto facilè ſit invenire AB vel BC: nimirum, addendo tantùm, 189, ▭ ADC, ad 100, □ BD, & ex ſumma 289, ▭ ABC, extrahendo √, fiet AB vel BC 17. Item ſi cognoſcantur AD, DC, ut & AB vel BC, quo pacto inveniri poſſit BD: videlicet, ſubtrahendo tantùm 189, ▭ ADC,

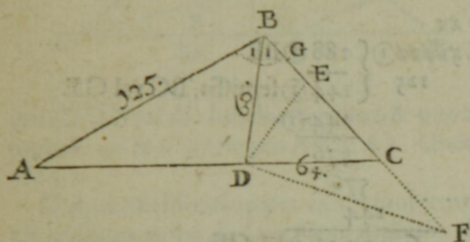
ex

ex 289, ▭ A B C, & ex reliquo 100, seu □ B D, extrahendo radicem, habebiturq; BD 10.

XXI.

Iisdem positis, si fiat ut A B ad B D, ita B D ad B E, jungaturque D E: dico rectangulum B C E æquale esse quadrato ex D C.

Demonstratio.



Quoniam enim, per præcedentem propositionem, ▭ ABC æquale est ▭ ADC unà cum □ B D, hoc est, ▭lo ABE: patet, ▭lum A B C, dempto ▭lo A B E, hoc est, ▭lum sub A B, E C, æquale esse ▭lo ADC. Unde erit [a] ut AB ad DC, ita AD ad EC. Sed ut AB ad DC, ita [b] est ▭ sub A B, D C ad □ DC: itemque ut A D ad E C, ita ▭ sub AD, BC ad ▭ BCE. Quare [c] erit ut ▭ sub AB, DC ad □ DC, ita ▭ sub AD, BC ad ▭ BCE. Est autem ▭ sub AB, D C æquale ▭lo sub AD, BC: (siquidem est AB ad BC, ut AD ad DC). Æquale igitur quoque erit [d] □ D C ipsi ▭ B C E. Quod erat demonstrandum.

a p 16 Sext Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.
c p 11 Quinti Elem. Eucl.
d p 14 Quinti Elem. Eucl.

1 *Corollarium.*

Hinc sequitur, si BF sumatur æqualis B A, jungaturque DF: △lum FBD simile esse △lo D B E; ut & △lum D E C simile △lo D B C. Siquidem F B D [e] simile est ipsi D B E, propter communem angulum ad B, & quòd FB, hoc est, A B, sit ad B D, ut D B ad B E. At verò D E C simile ipsi D B C, quoniam, præter communem angulum ad C, B C est ad C D, [f] ut D C ad C E: quippe ostensum est, ▭ BCE esse æquale □ D C.

e p 6 Sexti Elem. Eucl.
f p 17 Sexti Elem. Eucl.

2 *Corollarium.*

Similiter inferri poteſt; ſi circa △ DEF circulus deſcribatur, eundem g tangi à recta BD in D; ut & ſi alius deſcribatur circa DBE, ipſum tangi ab AC in D.

g p 37 Tertii Elem. Eucl.

SCHOLIVM.

Hinc ſi AB, BD, & DC cognitæ fuerint, & AB ſit 125, BD 60, & DC 64: facile ex iis invenietur BC, ut ex operatione ſequenti conſtat.

xx

Divid. □ BD, hoc eſt, ▭ FBE ~~36000~~ ① { 288 ① BE

per FB vel BA. 125 { 144 ① ſemiſſis, BG vel GE

144 ①

576

576

144

Add. { 207|36 ② □ GE

{ 4096| □ DC ſeu ▭ BCE

ſumma 43|03 36 ② □ GC, per 6. 2di Elem. Eucl.

radix 6|5 6 ① GC

add. 1|4 4 ① BG

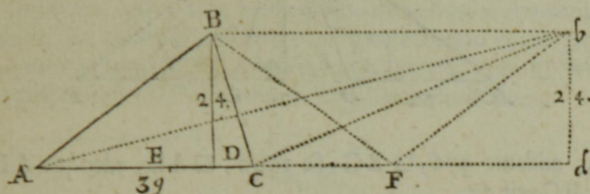
ſumma 8 0 AB.

XXII.

Cognitis trianguli ABC baſi AC 39, & perpendiculari BD 24, nec non ratione lateris AB ad latus BC 8 ad 5, invenire AB & BC.

Diviſâ AC 39 in E in ratione 8 ad 5, fiet AE 24, & EC 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipſarum AE, EC, ad AE 24, ita EC 15 ad EF vel FB 40. Deinde, cum rectanguli △li DBF duo latera DB, BF cogni-

cognita sint, faciantque 24 & 40: erit tertium latus DF per 4^{tam} $prop^{nem}$ hujus 32. Quæ subducta ex tota AF 64, ut & eidem addita, dat AD 32, & A *d* 96, ad quorum $\square^{ta}$ ut 1024 & 9216 si addatur



576, $\square$ DB vel *db*: habebuntur 1600 & 9792, $\square^{ta}$ ex AB & A *b*, ac proinde 40 & $\sqrt{}$ 9792, pro AB & A *b*. Unde BC erit 25, & *b*C $\sqrt{}$ 3825.

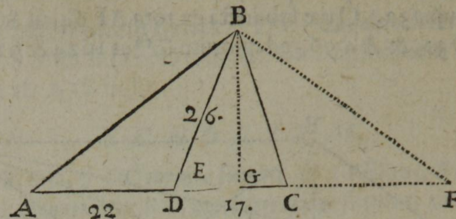
Cujus demonstratio patet ex 2do problemate propositionum libri 2^{di} tractatus nostri de *Locis Planis Apollonii*: ubi simul innotescit, cognitis, basi & perpendiculo $\triangle^{li}$, nec non ratione laterum reliquorum, duplicem hæc admittere solutionem: nimirum, AB fore vel 40 vel $\sqrt{}$ 9792, & BC vel 25 vel $\sqrt{}$ 3825, hoc est, constituunt vel acutangulum vel obtusangulum triangulum, sine aliqua datorum immutatione.

XXIII.

In triangulo ABC ductâ utcunque rectâ BD, dantur BD 26, AD 22, & DC 17, & quæruntur AB & BC, si inter se sint, ut 8 ad 5?

Divisâ AC, ut ante, in E; ita ut AE ad EC sit, ut 8 ad 5: erit AE 24, & EC 15. Tum fiat, ut 9, differentia ipsarum AE, EC, ad AE 24, ita EC 15 ad EF vel FB 40. Deinde subductâ AD 22 ex AE 24, restabit DE 2, cui additâ EF 40, habebitur DF 42. Cognita itaque sunt 3^{a} latera $\triangle^{li}$ DBF. Hinc si per ipsa, juxta 6^{tam} hujus, quæratur DG, ut & perpendicularis BG: invenietur DG 10, & BG 24. Denique

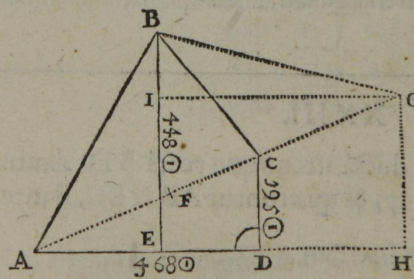
nique additis AD 22 & DG 10, ſi □^{to} ſummæ AG 32, quod eſt



1024, addatur 576, □ BG, fit 1600, □ AB, adeoque AB 40. Unde BC erit 25.

XXIV.

Aliquis habet agrum ABCD, cujus angulus D eſt rectus, & AD eſt 468①, DC 195①, itemque recta BE ex angulo B perpendicularis ipſi AD eſt 448①. Quæritur, ſi AB ſit ad BC, ut 8 ad 5, quanta ſit futura area ABCD; ut & quantitas laterum AB, BC?



Inventâ AC 507①, per 4^{tam} hujus, ſecetur ipſa in F, ut ante, ita ut AF ad FC ſit, ut 8 ad 5: fietque AF 312①, & FC 195①. Tum fiat, ut 117①, differentia ipſarum AF, FC, ad AF 312①, ita FC 195① ad FG vel GB 52⓪. Cui additâ AF 312①, habebitur AG 832①. Deinde fiat propter ſimilitudinem triangulorum ACD & AGH, ut AC 507① ad AG 832①, ita AD 468① ad AH 768①, & CD 195① ad GH 32⓪. Porrò ſubductâ GH ſeu IE 32⓪ ex BE 448①, reſtabit IB 128①, cujus □^{tum} 16384② ſubductum ex 2704⓪, □ BG, relinquet 254016②, □ IG: unde IG vel EH erit 504①, quâ ſubductâ ex AH

768①,

768①, reſtabit AE 264①. Cujus $\square^{tum}$ 69696② additum ad 200704②, □ EB, dat 2704⓪, □ AB; adeoque AB 52⓪. Unde BC erit 325①. Denique ad inveniendam aream ABCD, multiplicetur BE 448① per 132①, ſemiſſem ipſius AE, fietque 59136②, area $\triangle^{li}$ ABE. Similiter 643①, ſumma ipſarum BE, CD, per 102①, ſemiſſem ipſius ED, multiplicata, dabit 65586②, aream trapezii EBCD. quæ addita ad aream $\triangle^{li}$ præcedentem 59136② dabit aream totius trapezii ABCD 1247, 22②, hoc eſt, 1247 $\square^{tarum}$ decempedarum, & 22 $\square^{torum}$ pedum. Quod erat faciendum.

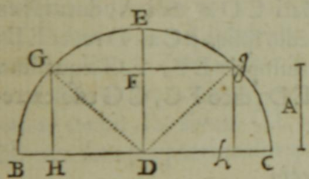
XXV.

E ſerie trium proportionalium datâ mediâ A, & aggregato extremarum BC: invenire extremas,

Vel:

Datam rectam BC ita ſecare in H, ut rectangulum ſub ſegmentis BH, HC ſit æquale quadrato rectæ datæ A. Quæ ſemiſſe rectæ ſecandæ BC non ſit major.

Conſtructio.



Deſcripto ſuper BC ſemicirculo BEC, erigatur ex puncto medio D eidem perpendicularis DE, in quâ ſumptâ DF æquali A, ducatur per F ipſi BC parallela GFg, ſecans hinc inde circumferentiam in punctis G, g. Ex quibus ſi demittantur GH, gh, perpendiculares in BC, hoc eſt, parallelæ ipſi DE: Dico BH & HC extremas eſſe, vel etiam ▭^{lum} ſub BH, HC contentum æquale eſſe $\square^{to}$ ex HG vel A. Cujus demonſtratio patet ex corollario $8^{væ}$ $prop^{nis}$ lib. 6 Elem. Euclidis, quod docet BH, HG, & HC eſſe 3 proportionales.

Similiter liquet rectam A non majorem dari debere ſemiſſe datæ BC, quandoquidem □ BD vel DC maximum eſt ▭, quod ſub ſegmentis rectæ BC comprehendi poteſt.

Item, Problema admittere duplicem ſolutionem, hoc eſt, rectam

B C simul in duobus punctis H & *h* secari, ita ut linea A sit media proportionalis inter bina ejus segmenta B H, H C vel B *h*, *h* C; vel etiam $\square^{tum}$ ex A æquale esse ▭^{lo} BHC vel B *h* C.

SCHOLIUM.

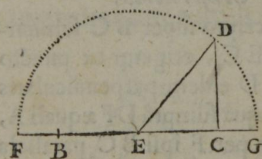
Hinc si A & B C cognitæ fuerint, sitq; A 12, & B C 26: ad inveniendas BH, HC, auferatur 144, □ HG vel A, ex 169, □ GD vel B D, & ex reliquo 25, seu □ HD, extrahatur radix, erit H D 5. Quæ ex B D 13 subducta relinquit B H 8, & ipsi D C 13 addita dat HC 18. Ita ut BH, HC sint 8 & 18, vel etiam 18 & 8.

Eodem modo cognitâ areâ ▭^{li} *B H C 144, & summâ laterum B H, HC, hoc est, BC 26, inveniuntur singula.*

XXVI.

E serie trium proportionalium datâ mediâ A, & differentiâ extremarum BC: invenire extremas.

Constructio.



Erectâ ex C super B C perpendiculari C D æquali A, ducatur ex E medio ipsius BC ad D recta E D; tum sumptis E F, E G æqualibus ipsi E D: dico F C, C G esse extremas.

Demonstratio.

a p Coroll. 8va Sexti Elem. Eucl.

Quoniam enim [a] F C, C D, & C G sunt 3 proportionales, & per constructionem F E est æqualis E G, ut & B E æqualis EC: erit quoque F B æqualis C G, adeoque B C differentia, quâ F C excedit CG, inter quas C D, hoc est, A, media est proportionalis. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hinc si A & BC cognitæ fuerint, sitq; A 12, & BC 10: facile est invenire F C & C G. Etenim addendo 25, □ EC, ad 144, □ C D, fit 169, □ E D. Cujus radix, puta 13, erit ipsa ED, EF, vel E G. Hinc si ad F E 13 addatur

EC

EC 5, erit FC 18; at verò si ab EG 13 auferatur EC 5, fiet CG 8.

Eodem modo, quoniam [b] ▭ *FCG æquale est* □ [10] *ex CD vel A: patet, quo pacto, cognitâ areâ* ▭ [11] *FCG 144, & differentiâ laterum FC, CG, hoc est, BC 10, inveniantur singula.* b p 14 *Secundi, vel 17 Sexti Elem. Eucl.*

XXVII.

E serie trium proportionalium datâ unâ extremarum AB, & aggregato mediæ & alterius extremæ BC: invenire mediam & extremam.

Constructio.

A B C E D

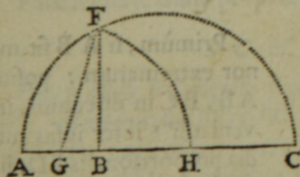
Positis AB, BC in directum, producatur AC ad D, donec CD sit æqualis CB; dividaturque AD per 25 prop. hujus in E, ita ut ▭ AED sit æquale □ CD, hoc est, ut CD sit media proportionalis inter AE & ED. Dico CE esse mediam, & ED alteram extremam.

Demonstratio.

Quoniam enim per constructionem AE est ad CD, sicut CD ad ED: erit quoque dividendo [a] AB unà cum CE ad CD, sicut CE ad ED. Hinc cum sit ut tota AB unà cum CE ad totam CD, ut ablata CE ad ablatam ED: [b] erit & reliqua AB ad reliquam CE, sicut tota ad totam, seu ablata CE ad ablatam ED. Quare AB, CE, & ED tres sunt proportionales quæsitæ. Quod erat faciendum.

a p 17 *Quinti Elem. Eucl.*
b p 19 *Quinti Elem. Eucl.*

Aliter.



Positis, ut ante, AB & BC in directum, inveniatur [c] inter ipsas media proportionalis BF, agaturque ex G, medio ipsius AB, recta GF. Quâ positâ à G ad H, dico BH esse mediam, & HC esse alteram extremam. c p 13 *Sexti Elem. Eucl.*

Quoniam enim [d] ▭ AHB unà cum □ GB æquale est □ GH, hoc est, GF: erit etiam, auferendo d p 6 *Secundi Elem. Eucl.*

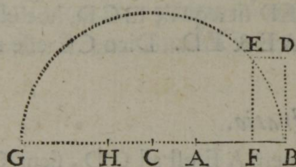
utrinque □ GB, reliquum ▭ AHB æquale reliquo □to ex BF[e]. Eſt autem [f] □BF ſimiliter æquale ▭ ABC, Quocirca ▭ AHB æquale eſt ▭ ABC, ac proinde [g] AH ad AB, ſicut BC ad BH, hoc eſt, dividendo & convertendo [h] AB ad BH, ut BH ad HC.

e p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.
f p 17 Sexti Elem. Eucl.
g p 16 Sexti Elem. Eucl.
h p 17 Quinti, & corol. 4ta Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Hinc ſi cognitæ fuerint AB, BC, & AB ſit 4, at BC 15: ut inveniantur BH, HC, multiplicetur 15 per 4, fit 60, ▭ ABC vel □ BF. Cui ſi addatur 4, □ GB, erit ſumma 64, □ GF: adeoq; GF vel GH 8. E qua ſubductâ GB 2, relinquitur BH 6. Vnde HC erit 9.

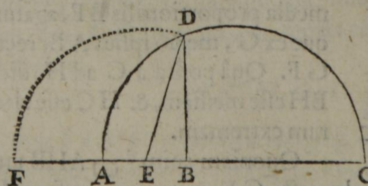
Vbi porrò notandum, quo pacto per primum modum data recta AB ſecari poßit in F extremâ ac mediâ ratione, aliter quàm ab Euclide eſt oſtenſum propne 1ma lib. 2di, aut 31 prop. 6ti lib. Elem. hoc eſt, ut ▭ ABF ſit æquale □ AF; vel ut AB ſit ad AF, ſicut AF ad FB.



Etenim productâ AB, in eâq; aſſumptâ AC æquali ſemißi ipſius AB, deſcribatur centro C intervallo CB ſemicirculus BEG. Deinde erectâ ex B ſuper AB perpendiculari BD æquali AB, ductâq; ex D ipſi parallelâ DE, ſecante circumferentiam in E: demittatur ex E ſuper AB perpendicularis EF. Cujus demonſtratio manifeſta eſt ex demonſtratione 1mi modi ſumendo CH æqualem CA.

XXVIII.

E ſerie trium proportionalium datâ unâ extremarum AB, & differentiâ mediæ & alterius extremæ BC: invenire mediam & extremam.

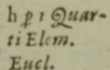


a p 13 Sexti Elem. Eucl.

Primùm, ſi AB ſit minor extremarum: poſitis AB, BC in directum, inveniatur [a] inter ipſas media proportionalis BD, ductâque ex E, medio ipſius AB, rectâ ED, ſumatur ei æqua-

æqualis EF. Dico BF esse mediam, & FC alteram seu majorem extremam.

Quoniam enim [b] ▭ BFA unà cum □ EB æquale est □ EF, hoc est, ED: erit quoque (auferendo utrinque □ EB) reliquum ▭ BFA æquale reliquo □ BD [c]. Est autem [d] □ BD etiam æquale ▭ ABC. Æquale igitur erit ▭ BFA ipsi ▭ ABC. Unde erit [e] ut AB ad FA, sic BF ad BC, hoc est, per compositionem rationis contrariam [f], AB ad BF, sicut BF ad FC. Quod est primum.



Deinde si AB sit major extremarum, sumptâ in eadem BC, [g] inveniatur inter AC & CB media proportionalis CD, jungaturque BD. Tū descripto super EB semicirculo EFB, & in eo [h] collocatâ BF æquali BD, agatur FE. Quæ si utrinque ponatur ab E ad G: Dico AB ad GB esse, sicut GB ad GC; vel etiam AB ad gB, sicut gB ad gC.

Ad quod demonstrandum, jungatur AD. Quoniam itaque [i] FB semicirculum ex E, qui per puncta G, F, g transit, tangit in F: [k] erit ▭ GBg æquale □ FB, vel BD. Est autem [l] □ BD etiam æquale ▭ ABC (siquidem [m] AB est ad BD, sicut BD ad BC). Æqualia igitur sunt ▭ GBg & ▭ ABC [n]. Unde erit ut AB ad Bg, sic GB ad BC, hoc est, per conversionem rationis [o] AB ad Ag, hoc est, GB, sic GB ad GC: vel etiam [p], ex AB & Bg auferendo GB & BC, ut tota AB ad totam Bg, ita reliqua AG, hoc est, Bg, ad reliquam gC. Quod erat secundum.

Hinc si è serie trium prop. &c. Quod erat faciendum.

SCHOLIUM.

Hinc si AB & BC cognitæ fuerint, & AB minor extremarum sit 4, at BC 3: ad inveniendas BF & FC, multiplicetur 4 per 3, & fit 12, ▭ ABC vel □ BD. Cui si addatur 4, □ EB, erit summa 16, □ ED. Hujus radix 4, erit ED vel EF. Cui additâ EB 2, habebitur FB 6. Unde FC erit 9.

At verò si AB, major extremarum, sit 9, & BC 2: ad inveniendas GB & GC;

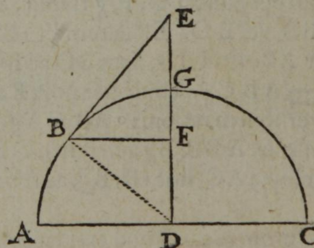
b p 6 Secundi Elem. Eucl.
c p 4 hujus, vel 47 Primi Elem. Eucl.
d p 17 Sexti Elem. Eucl.
e p 16 Sexti Elem. Eucl.
f Vide Clavium ad 18 Quinti Elem. Eucl.
g p 13 Sexti Elem. Eucl.
h p 1 Quarti Elem. Eucl.
i p 16 & 31 Tertii Elem Eucl.
k p 36 Tertii Elem.
l p 17 Sexti Elem. Eucl.
m p corol. 8va Sexti Elem. Eucl.
n p 16 Sexti Elem. Eucl.
o p corol. 19na Quinti Elem Eucl.
p 19 Quinti Elem. Eucl.

& GC; vel etiam g B & g C, multiplicetur rursus AB 9 per BC 2, & fit 18, ▭ ABC vel □ BD seu BF. Quod subductum ex 2025 ②, □to ex EB, relinquit 225 ②, □ EF. Cujus √, ut 15 ①, erit ipsa EF, EG, vel Eg. Huic si addatur EB 45 ①, erit GB 60 ① seu 6. Vnde GC erit 4. Vel etiam subtrahendo Eg 15 ① ex EB 45 ①, restabit g B 30 ① seu 3 : ac proinde g C 1.

Hîc porrò notandum: CB in 2do casu majorem esse non posse 4tâ parte ipsius AB, quandoquidem Problema aliàs est impossibile, & BD, hoc est, BF, in semicirculo EFB collocari nequit. Existente enim CB quartâ parte ipsius AB, erit FB, hoc est, DB æqualis diametro ejus EB: & idcirco punctum F incidet in punctum E; ita ut EB sit media, & EC altera extrema. Quo casu Problema unius tantùm erit solutionis, cum aliàs, ut patet, duplicem sortiatur.

XXIX.

Si semicirculum ABGC contingat recta BE, conveniens cum DE, quæ ex centro D erecta est perpendicularis super diametrum AC: dico, si ex puncto contactus B agatur BF parallela AC, rectas DF, DG, & DE esse tres proportionales.



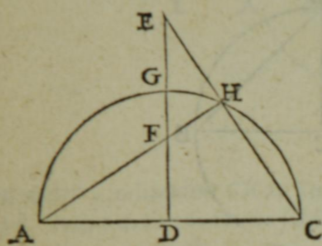
Id quod, ductâ BD, manifestum est, quippe quæ per 18 prop. 3tii lib. Elem. Euclidis ipsi BE est perpendicularis. Unde per Corollarium 8væ propnis 6ti lib. Elem. Eucl. FD erit ad DB, hoc est, DG, sicut DB seu DG ad DE. Quod erat demonstrandum.

XXX.

XXX.

Si in ſemicirculo A G H C ex A ad circumferentiam utcunque ducatur recta A H, ſecans perpendicularem D E in F: dico, ſi ex C per H recta agatur occurrens ipſi D E in E, rectas D F, D G, & D E eſſe tres proportionales.

Demonſtratio.



Quoniam enim △^{la} AHC & CDE rectangula ſunt, atque angulum ad C communem habent: erunt & reliqui anguli HAC & E [a] æquales. Eodem modo, quoniam △^{lum} ADF rectangulum eſt, ejuſque angulus DAF æqualis oſtenſus angulo E rectanguli △^{li} CDE: erit item tertius tertio æqualis: ac proinde [b] FD ad DA, hoc eſt, DG, ſicut DC, hoc eſt, DG, ad DE. Quod erat demonſtrandum.

a p 32 Primi Elem. Eucl.

b p 4 Sexti Elem. Eucl.

Corollarium.

Ex hac & antecedenti propoſitione manifeſtum eſt: ſi recta A H ducatur per punctum F, in quo recta BF occurrit perpendiculari DE, tangentem B E & productam C H E in idem punctum ipſius D E convenire.

XXXI.

Si in ſemicirculo A H D B, ex diametri terminis A & B, ad verticem D agantur rectæ A D, B D, quarum una B D ſurſum producatur: dico, ſi ex quolibet puncto inter A & centrum C perpendicularis erigatur ſuper A B, huic productæ occurrens in F, rectas E G, E H, & E F eſſe 3 proportionales.

Demonstratio.

Junctâ CD, quoniam, propter △lorum ACD, AEG similitudinem, AC est ad CD, sicut AE ad EG; sint autem AC & CD æquales: erunt quoque AE & EG æquales. Eodem modo ob similitudinem △lorum BCD, BEF æquales erunt BE & EF. Æquale igitur est ▭ AEB ipsi ▭ GEF. Est autem [a] ▭ AEB æquale □ EH. Quare & ▭ GEF ipsi □ EH æquale erit: ac proinde [b] GE ad EH, sicut EH ad EF. Quod erat demonstrandum.

a p14 Secundi, vel 36 Tertii Elem. Eucl.
b p 17 Sexti Elem. Eucl.

Corollarium.

Hinc sequitur, si HK sumatur æqualis HF, esse quoque EF, FH, & GK tres proportionales.

Cum enim EF ad EH sit, ut EH ad EG: erit quoque, per conversionem rationis, [c] EF ad FH, ut EH ad HG. Hinc, cum tota EF sit ad totam FH, sicut ablata EH ad ablatam HG: erit etiam [d] tota EF ad totam FH, sicut reliqua FH ad reliquam GK.

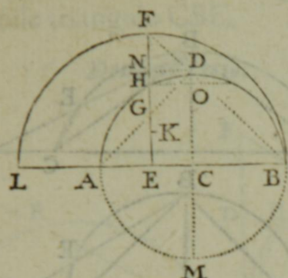
c p corol. 19nae Quinti Elem. Eucl.
d p19 Quinti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Ex ostensis patet, quâ ratione hujusmodi Problema solvi possit: Descriptis super recta LAB duobus semicirculis AHDB & LFB sese contingentibus in B, & ex centro majoris E erectâ super LAB perpendiculari EHF: invenire utriusque diametrum, si LA sit 6, & FH 4.

Ete-

Etenim LE æquali existente ipsi EF, & AE ipsi GE: erit & LA æqualis GF. Hinc si ex GF 6 auferatur HF 4, remanebit GH 2. Quâ subductâ ex



HK vel HF 4, relinquitur GH 2. Tum fiat ut GK 2 ad HF 4, ita HF 4 ad EF 8. Vnde LB erit 26. Ex qua subductâ LA 6, restabit AB 10. Quæ etiam hoc pacto inveniri potest.

Subtractâ FN 3, semisse sc. ipsius FG seu LA, ex FH 4, relinquitur NH vel DO 1. Tum diviso 9, □ᵗᵒ ex HO, ND, vel FN, per DO 1, oritur OM 9. Cui si addatur OD 1, erit MD vel AB 10, ut supra.

XXXII.

Si in circuli segmento ABC à vertice B ad basin productam AC utcunque ducatur recta BD. Dico, si agantur AB, BC, & CE, triangulum BCE simile esse triangulo BDC, nec non triangulum ABD simile triangulo ECD.

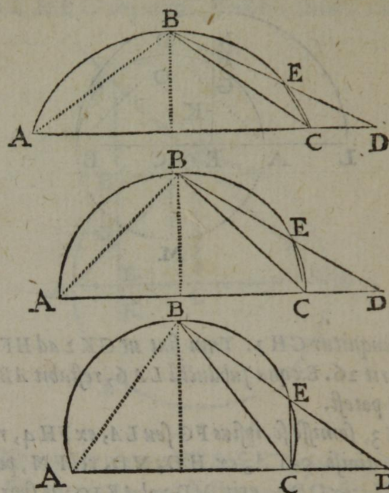
Demonstratio.

Cum enim anguli CAB & BCA sint æquales, quorum angulus CAB unà cum opposito BEC [a] est æqualis duobus rectis, nec non angulus BCA unà cum angulo sibi deinceps BCD [b] sit æqualis duo- bus rectis: patet angulos BEC & BCD in △lis BCE & BDC æqua- les esse. Hinc cum angulus CBD iisdem △lis sit communis, erit & tertius BCE [c] æqualis tertio D: adeoque △lum BCE simile △lo BDC [d].

a p 22 Tertii Elem. Eucl.
b p 13 Primi Elem. Eucl.
c p 32 Primi Elem. Eucl.
d p 4 Sexti, & 1 def Sexti Elem. Eucl.

Porrò,

Porrò, quoniam, ut supra, angulus CAB unà cum angulo BEC est æqualis duobus rectis, nec non angulus CED unà cum eodem angulo BEC duobus rectis æqualis: erit angulus CAB æqualis an-



gulo CED. Quare, cum præterea angulus D posterioribus △lis sit communis, erit pariter △ ABD simile △lo ECD. Quod utrumque erat demonstrandum.

Corollarium.

Ex similitudine △lorum BCE, BDC patet: EB esse ad BC, ut BC ad BD.

SCHOLIVM.

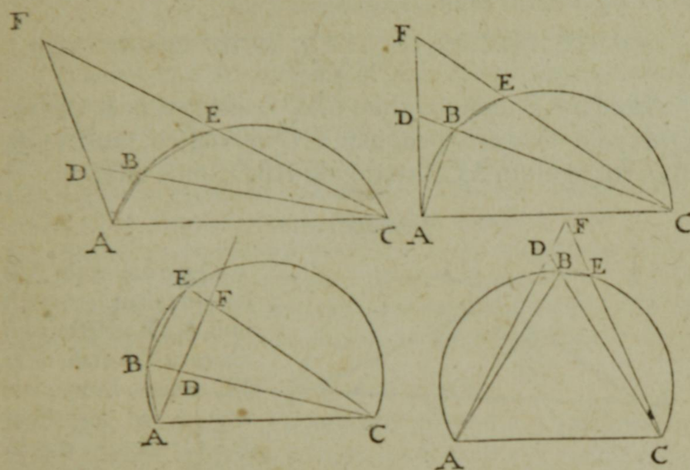
Hinc liquet, cognitis BC & BE, quo pacto inveniri possit ED. Si enim, ex:gr:, BC sit 6, & BE 4: fiat ut BE 4 ad BC 6, ita BC 6 ad BD 9. E qua subductâ BE 4, relinquitur ED 5.

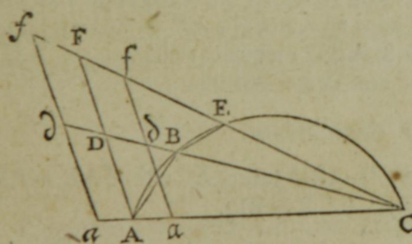
XXXIII.

Si in circuli segmento ABEC recta AF cum basi AC constituat angulum FAC, æqualem ei qui in segmento ABC;

ABC: Dico, si ex C ad AF utcunque ducantur CD, CF circumferentiam secantes in B & E, junganturque AB, BE, triangulum CAD simile esse triangulo CAB, & triangulum CDF simile triangulo CBE.

Demonstratio.





Quoniam enim angulus DAC est æqualis angulo in segmento ABC (qui quidem omnes [a] inter se æquales sunt), atque ideo △[la] CAD & CAB præter communem angulum ad C æquales habeant angulos DAC & ABC: erit & tertius ADC tertio CAB [b] æqualis; adeoque △ CAD simile ipsi △ ACB [c].

a p 21 Tertii Elem. Eucl.

b p 32 Primi Elem. Eucl.

c p 4 Sexti, & 1 def. Sexti Elem. Eucl.

Porrò, cum bini anguli CAB, BEC sint [d] æquales duobus rectis, nec non bini ADC, CDF [e] duobus rectis æquales, quorum quidem an-

d p 22 Tertii Elem. Eucl.

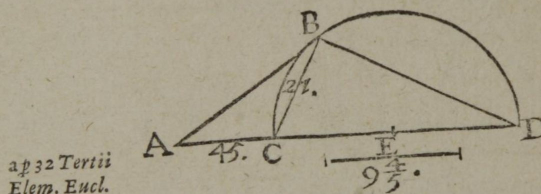
angulus A D C æqualis est ostensus angulo C A B: erit quoque angulus B E C angulo CDF æqualis. Hinc cum, præter hos æquales angulos, angulus DCF sit utrique △lo C D F & CBE communis: erunt quoque △la ipsa inter se similia. Quod utrumque erat demonstrandum.

Idem intellige, si linea A F ad quodvis aliud basis punctum in dicto angulo ducta fuerit.

XXXIV.

Si recta A B semicirculum CBD contingat in B, conveniens cum diametro producta CD in A: dico, junctis CB, BD, triangulum ACB triangulo ABD simile esse.

Demonstratio.



a p 32 Tertii Elem. Eucl.

Quoniam enim A B semicirculum contingit in B, & à B ad terminum diametri C ductasit recta BC eundem secans; erit angulus ad contactum A B C a æqualis angulo A D B, qui in alterno semicirculi segmento. Hinc cum in △lis ACB, A BD anguli AB C & ADB sint æquales, & angulus ad A utrique △lo communis: erunt etiam reliqui anguli ACB & ABD b æquales: adeoque c △ A C B simile ipsi △ ABD. Quod erat demonstrandum.

b p 32 Primi Elem. Eucl.
c p 4 Sexti, & 1 def. Sexti Elem.

1 Corollarium.

Ex similitudine △lorum ACB, ABD patet, AC esse ad AB, ut AB, ad AD; itemque AC ad AB, sicut CB ad BD.

2 Corollarium.

Hinc, cum AC, AB & AD sint 3 proportionales, & d 1ma A C sit ad 3am A D, sicut □ super 1ma A C ad □ super 2da AB, vel e sicut □ ex C B ad □ ex B D, constat: A C ad A D esse, sicut □ ex CB ad □ ex B D. Quod & à Pappo est demonstratum propne 119 libri 7.

d p Corol. 2cma Sexti Elem. Eucl.
e p 22 Sexti Elem. Eucl.

XXXV.

XXXV.

Iisdem positis, si ad A C, C B inveniatur tertia proportionalis E: dico quadratum ex C B dimidium esse rectanguli contenti sub CD & differentia ipsarum C D & E.

Demonstratio.

Quoniam enim [a] est A C ad A D, sicut □ C B ad □ B D, hoc est, □ C D minus □ C B: erit quoque [b], per compositionem rationis contrariam, AC ad AC, A D, sicut □ C B ad □ CD. Sed ut AC ad AC, AD, ita [c] est ▭ sub AC & E ad ▭ sub A C, AD & E. Quare erit, ut ▭ sub A C & E ad ▭ sub A C, A D & E, ita □ C B ad □ CD. Est autem ▭ sub AC & E æquale □ CB: cum [d] AC sit ad CB, ut C B ad E. Æquale igitur est [e] ▭ sub A C, A D & E ipsi □ CD. Hinc subducto utrinque ▭lo sub C D & E, erit reliquum ▭lum sub dupla A C & E, hoc est, duplum □tum ex C B, æquale □to ex C D minus ▭lo sub C D & E, hoc est, æquale ▭lo contento sub C D & differentia ipsarum CD & E. Quod erat demonstrandum.

a p 2 Corol. præc. propnis.
b Vide Clavium ad 18 Quinti Elem. Eucl.
c p 1 Sexti Elem. Eucl.
d p hypothesin.
e p 14 Quinti Elem. Eucl.

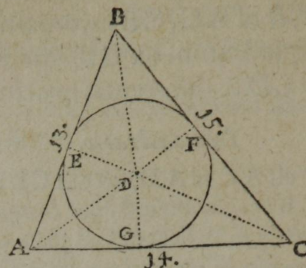
SCHOLIUM.

Facile hic est ostendere, si cognoscantur A C & C B, quo pacto inveniri posit diameter C D. Si enim, verb: gr:, A C sit 45, & C B 21: Fiat ut A C 45 ad C B 21, ita C B 21 ad E $9\frac{4}{5}$*. Deinde cum □ C B sit 441, & ejus duplum 882, quæstio eò perducta est, ut, datis rectanguli area 882, & differentiâ laterum* $9\frac{4}{5}$*, per 26 prop. hujus inveniantur ipsa latera, quorum majus 35 erit diameter CD. Quæ quærebatur.*

XXXVI.

Cognitis trianguli A B C lateribus AB 13, BC 15, & AC 14: invenire radium D E, D F, vel D G circuli inscripti EFG.

Quod fiet per sequentem operationem.



AB. 13
BC. 15
AC. 14

summa laterum. 42

semissis 21.....21.... 21
subtr. singula latera 13.....15.... 14
3ª reliqua 8......6..... 7

6
42
8

Divid. productum 3um reliquorum. 336 { 16 □^tum radii.
per semissem laterum. 21   4 radix, seu radius DE, DF, vel DG.

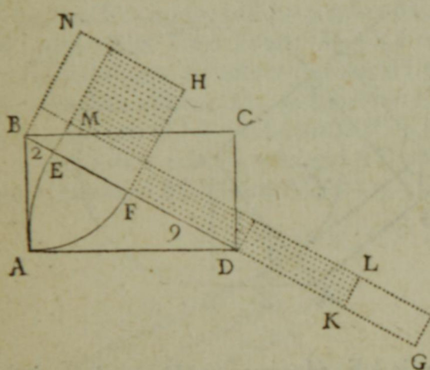
Demonstratio.

Quoniam 336, productum ex tribus reliquis, ductum in 21, semissem laterum, per vulgarem regulam, tantum producit, quantum 84, area △^li ABC multiplicata in se: patet, 21, 84, & 336 esse proportionales. Item cum 21, semissis laterum, ductus in 4, radium circuli, efficiat 84, aream △^li ABC (quippe quæ 3ª continet △^la ABD, BCD, & ACD, quæ singula radium habent pro communi altitudine, & latera AB, BC, & AC pro basibus; quorum quidem area

area invenitur ex multiplicatione ſemiſſis baſeos per altitudinem): conſtat, 21, primum numerum, eſſe ad 84, 2^{dum}, ut 1 ſeu unitas ad radium 4; ſed ad 336, 3^{tium}, ut 1 ad 16, $\square^{tum}$ ſc. ex 4. Unde patet, ſi 336, productum 3um reliquorum, per 21, ſemiſſem laterum dividatur, oriri 16, $\square^{tum}$ radii 4. Qui erat inveniendus.

XXXVII.

Rectanguli A B C D cognitis duobus exceſſibus B E, F D, quibus diagonalis B D ſuperat utrumque latus A D, A B : invenire latera & diagonalem.



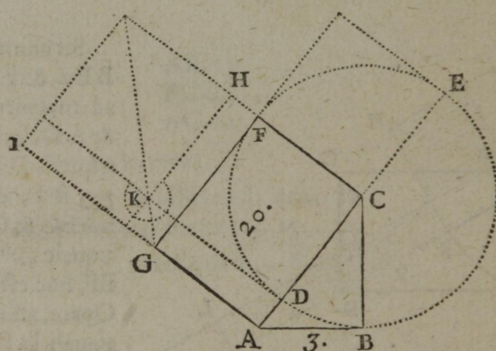
Sit enim, verb: gr:, B E 2, & F D 9. Jam ad inveniendam A B & A D, ſumatur D G æqualis D E, eritque ▭ B I, contentum ſub B G & G I ſeu B E, æquale $\square^{to}$ ex A B ſeu B F, hoc eſt, $\square^{to}$ B H. Quare, aſſumptâ D K æquali D F, erit gnomon N M F æqualis $\square^{to}$ B M, unà cum duobus æqualibus $▭^{lis}$ M F, K I: & conſequenter □ M H æquale $▭^{lo}$ F L, quod eſt 36. Unde E F erit 6. ac proinde A B 8, A D 15, & diameter ſeu diagonalis B D 17. Quæ erant inveniendæ.

Eodem modo licet ex data differentia, inter diagonalem & latus quadrati, invenire latus & diagonalem. Si enim hæc differentia ſit 2, oportet tantùm 4, duplum ipſius 2, multiplicare per 2, & ex eo quod fit extrahere radicem quadratam, quæ erit $\sqrt{8}$. Cui ſi addatur 2, habebitur latus $\sqrt{8} + 2$. Huic autem ſi rurſus addatur 2, erit diagonalis $4 + \sqrt{8}$.

XXXVIII.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterum AB, BC circa rectum angulum B, ut & producto reliquorum duorum AC, CB: invenire AC, CB, reliqua latera.

Esto AB 3, & productum ipsorum A C, CB 20. Igitur ut inveniantur AC, CB, describatur centro C intervallo CB circulus BDFE, secans AC in D, eamque productam in E. Tum descripto super C E □^{to} FE, erit completum ▭^{lum} CG 20. Deinde descripto super



GF □^{to} FI, erit AI æqualis AE, adeoque ▭ ID æquale ▭^{lo} sub EA, AD, hoc est, □^{to} ex AB 9 [a]. Est autem [b] □ I F ad ▭ FA, ut IG ad GA, vel AC ad CE. Sed ut AC ad CE, ita quoque est ▭ FA ad □ FE. Proportionalia igitur sunt 3^{a} ▭^{la} IF, FA, & FE. Hinc cum gnomon IKF, qui æqualis est ▭^{lo} ID 9, sit excessus, quo □ IF superat □ FE, quæstio eò reducta erit, ut, Datis medio 20, & differentiâ extremorum 9, 3um proportionalium numerorum, per 26 Prop. hujus quærantur extremi. Quorum major 25, est □ IF, & minor 16, □ FE. E quibus si extrahantur radices, erit AC 5, & CB 4. Quæ erant invenienda.

a 36 Tertii Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.

XXXIX.

XXXIX.

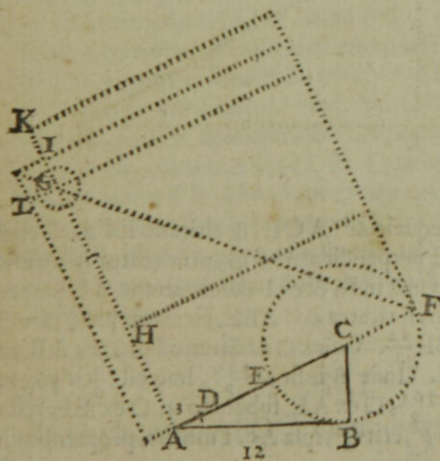
Trianguli rectanguli A B C cognito alterutro laterum circa rectum A B, & hypotenusâ A C ad latus alterum CB cognitâ AD majore existente, quàm in ratione data D C ad C B: invenire hypotenusam A C, & latus alterum C B.

Sit AB 12, AD 3, & DC ad CB, ut 2 ad 1. Igitur ut inveniantur AC, CB, describatur centro C & intervallo CB circulus BEF, secans AC in E, & eandem productam in F. Tum descripto super A F □to F G, erit, assumptâ AH æquali AE, [a] ▭ HF æquale □to ex AB 144. Deinde productâ A G, sumantur in illa G I, I K æquales A D, eritque (quia A G est æqualis AF, & A H æqualis A E) HG æqualis E F, hoc est, duplæ DE: adeoque HK dupla ipsius AE vel AH, & idcirco AK tripla ipsius AH. Patet itaque [b], ▭ KF triplum esse ▭li HF, ideoque facere 432. Est autem gnomon IFL etiam æqualis ▭lo KF. Hinc, si ad 432 addatur □ L I 9, habebitur □tum ex IA 441. Cujus radix 21, erit ipsa IA. E qua subductâ IG 3, relinquitur G A vel A F 18. Ex hac autem si rursus auferatur A D 3, restabit D F 15. Cujus triens 5, erit latus B C. Unde AC erit 13. Quæ erant inveniendæ.

a p 36 Tertii Elem. Eucl.

b p 1 Sexti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.



Notandum hìc est, accidere posse, ut B C non nisi semel contineatur in A C, aliquo remanente excessu; vel etiam pluries, absque reliquo. Quocirca in primo casu operandum erit ut in 6ta Propne factum fuit, ubi ex uno latere AB circa rectum B, & differentia A E reliquorum duorum A C, C B invenimus ipsa AC & CB. Quod autem ad secundum ca-

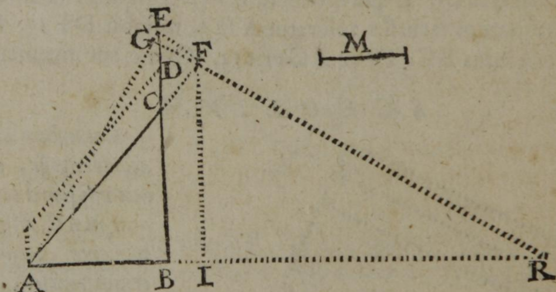
casum attinet, sciendum est, omnem difficultatem in eo tantùm consistere, ut ex cognita rectanguli area, & ratione laterum, inveniantur ipsa latera. Si enim, ex. gr., BC continuatur in AC bis absque reliquo, erit AF tripla AE, ac propterea cum ▭ HF sit 144, nimirum [c] *æquale □*^{to} *ex AB 12: erit □ ex BC 48, & BC √ 48; ac proinde AC √ 192.*

c 36 Tertii Elem. Eucl.

XL.

Trianguli rectanguli ABC cognito AB uno laterum AB, BC circa rectum angulum B, & aggregato hypotenusæ AC & areæ ABC: invenire hypotenusam & aream.

Esto AB 3, & aggregatum ipsius AC & areæ ABC 11. Jam ad inveniendam AC, describatur super ipsa ▭^{mum} AD, latitudinē habens unitatis, quod unà cum area ABC faciat 11. Cui summæ si sumatur æquale △ ABE, & AC producatur donec in eam cadat perpendicu-



laris EF: erit ▭ AD æquale △^{lo} ACE, & altitudo EF 2. Deinde demissâ ex F super AE perpendiculari FG, producatur ipsa donec cum AB productâ conveniat in R, & ex F demittatur in AR perpendicularis FI. His positis, si 11, area △^{li} ABE, dividatur per $\frac{3}{2}$, semissem ipsius AB, orietur BE $\frac{22}{3}$. Cujus □ additum ad 9, □ ex AB, habebitur $\frac{565}{9}$, □ ex AE. Unde AE fit $\sqrt{\frac{565}{9}}$, hoc est, $\frac{1}{3}\sqrt{565}$ vel $\frac{1}{3}\sqrt{}$ 113, 5. Deinde ex $\frac{565}{9}$, □ ex AE, subducto 4, □ ex EF, restabit $\frac{529}{9}$, □ ex AF. Cujus √, erit $\frac{23}{3}$, ipsa AF. Tum fiat, propter simili-

tudi-

tudinem △^{lorum} AEF, AFG, ut AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad AF $\frac{23}{3}$, ita AF $\frac{23}{3}$ ad AG $\frac{23,23}{3\sqrt{113,5}}$, & EF 2 ad FG $\frac{23,2}{\sqrt{113,5}}$. Rursus, ob similitudinem △^{lorum} ABE, AGR, fiat ut AB 3 ad AG $\frac{23,23}{3\sqrt{113,5}}$, ita AE $\frac{1}{3}\sqrt{115,5}$ ad AR $\frac{23,23}{3,3,3}$, & BE $\frac{22}{3}$ vel $\frac{11,2}{3}$ ad GR $\frac{23,23,11,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$. E qua subductâ FG $\frac{23.2}{\sqrt{113,5}}$, relinquitur FR $\frac{226,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$ vel $\frac{113,2,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$. Eodem modo erit, propter △^{la} similia ABE, FIR, ut AE $\frac{1}{3}\sqrt{113,5}$ ad FR $\frac{113,2,23,2}{3,3,3\sqrt{113,5}}$, ita BE $\frac{11,2}{3}$ ad IR $\frac{2,23.2,11,2}{3,3,3,5}$. Quæ ablata ex AR, $\frac{23,23}{3,3,3}$, relinquet AI $\frac{27,23}{3,3,3,5}$ vel $\frac{3,3,3,23}{3,3,3,5}$, hoc est, $\frac{23}{5}$. Denique, ob similia △^{la} AIF, ABC, fiat ut AI $\frac{23}{5}$ ad AF $\frac{23}{3}$, ita AB 3 ad AC 5. Unde area ABC erit 6. Quod erat faciendum.

Aliter.

Fiat ut AB 3 ad EF 2, ita BE $\frac{22}{3}$ ad quartam M. quæ ideo erit $\frac{44}{9}$. Deinde fiat, ut 5, differentia □^{torum} ex AB, EF, ad □ ex AB 9, ita $\frac{25}{9}$, differentia ipsarum AF & M, ad AC 5. Quod hoc modo patet.

Quoniam enim per constructionem BE est ad M, ut AB ad EF; atque etiam, propter similitudinem △^{tum} ABC, EFC, CB ad CF sit, ut AB ad EF: erit quoque [a] subductis CB, CF ex BE, M, reliqua CE ad reliquam M demptâ eidem CF, sicut AB ad EF. Sed ut AB ad EF, ita est quoque AC ad CE. Quare proportionales sunt AC, CE, & M minus CF. Hinc [b], ut □ super prima AC ad □ super 2da CE, hoc est [c], ut □ ex AB ad □ ex EF, ita 1ma AC erit ad 3^{tiam} M minus CF. Hoc est, per conversionem rationis & convertendo [d], ut □ ex AB minus □ ex EF ad □ ex AB, ita AF minus M ad AC. Quæ erat invenienda.

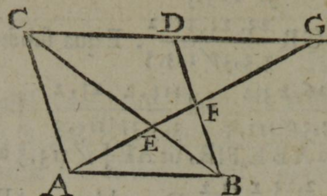
a p 19 Quinti Elem. Eucl.
b p corol. 20 Sexti Elem. Eucl.
c p 22 Sexti Elem. Eucl.
d per corol. 19 Quinti, & Corol. 4 Quinti Elem. Eucl.

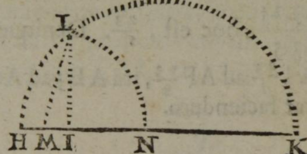
XLI.

Dato rhombo ABDC, cujus diagonales CB, AD: ex A re-

rectam lineam ducere A E F G, quæ conveniat cum latere producto CD, ita ut intercepta EF ad totam AG datam habeat rationem, ut HI ad IK.

Constructio.





Descripto super HK semicirculo HLK, erigatur ex I super ipsam perpendicularis IL, occurrens circumferentiæ in L. Tum divisâ HI bifariam in M, jungatur ML, cui si sumatur æqualis MN, fiat ut NI ad IH, ita AB ad BF: dico, si ex A per F recta ducatur linea, EF esse ad AG, sicut HI ad IK.

Demonstratio.

Ex demonstratis 2^{di} modi $27^{mæ}$ $prop^{nis}$ hujus, HI, IN, & NK sunt 3 proportionales, & per 4^{tam} prop. 6 lib. Elem. Euclidis AFB & ACG sunt duo $\triangle^{la}$ similia. Hinc ut FB ad BA, ita erit AC, hoc est, AB, ad CG; adeoque FB, BA, & CG 3 proportionales. Est autem per constructionem HI ad IN, ut FB ad BA. Quare HI, IN, & NK tres sunt proportionales in eadem ratione quâ FB, BA, & CG: & proinde HI ad IN, NK, hoc est, IK, ita FB ad AB, CG. Jam verò ratio FB ad AB, CG composita est ex ratione FB ad BA, & ex ratione BA ad AB, CG. Quocirca & ratio HI ad IK ex iisdem rationibus erit composita. Rursus cum ratio EF ad AG componatur ex ratione FE ad EA, hoc est [a], FB ad BA, & ex ratione EA ad AG, hoc est, AC vel AB ad AB, CG, ex quibus rationibus componebatur quoque ratio HI ad IK: erit ratio EF ad AG eadem, quæ HI ad IK. Quod erat faciendum.

a p 3 Sexti Elem. Eucl.

Ubi notandum, cum recta, ab A ad D ducta, sit extrema linea, quæ juxta mentem Problematis duci potest, eaque per rectam CB bifariam dividatur, rationem quam EF ad AG habere debet, non majorem requiri quàm 1 ad 2, hoc est, ut HI non major sit dimidiâ IK.

XLII.

Descriptis ſuper recta C A B duobus ſemicirculis CEB & A D B, ſeſe tangentibus in B, & ex C ductâ C D E, tangente minorem ſemicirculum in D, & terminatâ majoris circumferentiâ in E: invenire utriuſque diametrum, ſi CD ſit 10, & DE 6.

Etenim F exiſtente centro minoris ſemicirculi A D B, jungantur B E, F D. Quæ [a] inter ſe erunt parallelæ. Tum ductâ A G parallelâ F D vel B E, erit G D æqualis D E; & C G ad C E, ut C A ad C B. Hinc ſi ex C D 10 auferatur DE vel D G 6, relinquetur C G 4; item ad CD 10 additâ DE 6, fiet CE 16. Ex quibus igitur nota eſt ratio, *a ꝑ 18 & 31 Tertii, ut & 28 Primi Elem. Eucl.*



quam CA habet ad CB, quippe eadem, quæ 4 ad 16, ſeu 1 ad 4. Deinde cum □ ex C D ſit 100, idemque [b] ſit æquale ▭[lo] A C B, quæſtio eò perducta erit, ut, datis ▭[li] ACB areâ 100, & ratione laterum C A, C B, 1 ad 4, inveniantur ipſa latera. Quod fiet, ponendo ut CA ad A C, hoc eſt, ut 1 ad 4, ita [c] ▭ A C B 100 ad □ ex CB 400. Cujus √ ut 20, erit diameter major CB. Quare, cum C B ſit ad CA, ſicut 4 ad 1: erit hæc 5, adeoque minor diameter AB 15.

b ꝑ 36 Tertii Elem. Eucl.

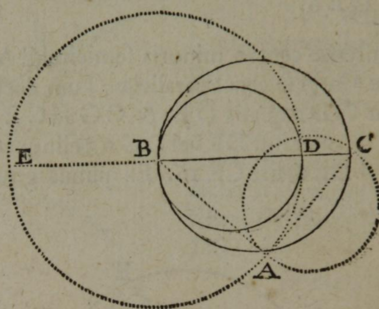
c ꝑ 1 Sexti Elem. Eucl.

XLIII.

Cognitâ duorum circulorum differentiâ, & differentiâ diametrorum D C, invenire utriuſque diametrum B D & B C.

Esto DC 8, & differentia circulorum, hoc est, area lunulæ BACBD 616. Hinc ad inveniendas BD, BC, describatur centro B intervallo BD circulus EDA, secans circulum BCA in A, junganturque BA, AC: eritque [a] descriptus circa AC circulus æqualis lunulæ BACBD, hoc est, 616. Unde facile, statuendo diame-

[a] p. 2 Duodecimi & 47 Primi Elem. Eucl.



trum circuli esse ad ejus peripheriam, ut 7 ad 22, invenitur diameter AC: nimirum, si fiat ut $38\frac{1}{2}$, area ejusdem, ad aream circuli AC 616, ita 49, □tum diametri illius, ad 784, □tum diametri hujus. Unde AC fit 28. Eò itaque Problema reductum est, ut, Datis △li rectanguli ABC latere circa rectum AC 28, & DC 8, differentiâ reliquorum duorum AB, BC, invenienda sint latera AB, BC, per 6tam propnem hujus: eritque AB vel BD 45, & BC 53. Quæ invenienda proponebantur.

XLIV.

Dato semicirculo ABFC, punctum invenire E in diametro AC vel ea producta, è quo si in dato angulo D ad circumferentiam ABC recta ducatur linea EF, quadratum, quod ab ipsa describitur, ad rectangulum AEC, contentum sub rectis EA, AC, inter quæsitum punctum E & diametri AC utrumque terminum A & C interceptis, datam habeat rationem, GH ad HI.

Idem

Idem hoc ab Eutocio *oſtenditur in commentariis ſuis ſuper 53 & 54 prop^{ner} libri* 1^{mi} Conicorum Apollonii.

Primùm igitur, ſi datus angulus D eſt rectus, requiritur, ut H G ſit æqualis H I: quandoquidem ſi ſuper A C utcunque ducatur perpendicularis ad circumferentiam, □^{rum} ipſius ſemper [a] eſt æquale ▭^{lo} A E C.

Quare, ſi D non ſit rectus, ponatur primò GH eſſe æqualis HI, & ex centro M ducatur MF in dato angulo D, eritq; propter æqualitatem linearum AM, MF, & MC, □^{tum} MF æquale ▭^{lo} AMC. Ut requirebatur.

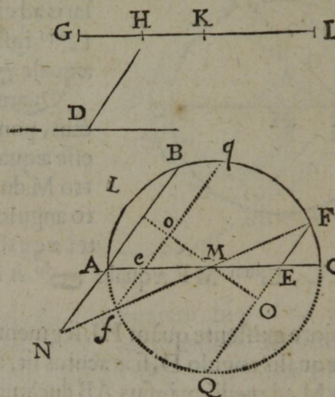
At verò G H majore exiſtente quàm HI, ſegmento GK, conſtituatur angulus CAB æqualis angulo D, ſi is acutus ſit, aut ei deinceps, ſi obtuſus fuerit; & ex M ad medium ipſius AB ducatur ML: quæ [b] ipſi AB erit perpendicularis. Deinde fiat, ut GK ad GI, hoc eſt, ut differentia ipſarum G H, H I ad earundem ſummam, ita LB ad LN, jungaturque NM, ſecans circumferentiam in F. Dico ſi ex F ad A C ducatur FE parallela A B, hoc eſt, in dato angulo D, □^{tum} E F ad ▭^{lum} AEC eſſe, ut GH ad HI.

Ad quod demonſtrandum, producatur FE ad alteram circumferentiæ partem in Q, jungaturque B M, ſecans E F in P. Quoniam itaque per conſtructionem G K eſt ad GI, ut LB ad LN; hoc eſt, invertendo G I ad GK, ut LN ad LB: erit quoque [c] per converſionem rationis, ut GI ad KI, ita LN ad BN, vel OF ad PF. Et ſumptis antecedentium duplis [d], ut dupla GI ad KI, hoc eſt [e], ut G I ad H I, ita QF ad PF; dividendoque [f] ut GH ad HI, ita QP, hoc eſt, EF, ad PF, hoc eſt, QE. Sed ut EF ad EQ, ita eſt [g] (aſſumptâ communi altitudine EF) □ EF ad ▭ QEF vel A E C [h]. Erit itaque ut G H ad HI, ita □ E F ad ▭ AEC.

a p 35 Tertii Elem. Eucl.
b p 3 Tertii Elem. Eucl.
c p corol. 19. Quinti Elem. Eucl.
d Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
e p 15 Quinti Elem. Eucl.
f p 17 Quinti Elem. Eucl.
g p 1 Sexti Elem. Eucl.
h p 35 Tertii Elem. Eucl.

Quòd ſi GH minor ſit quàm HI, ſegmento KI : fiat rurſus, ut KI ad GI (hoc eſt, ut differentia ipſarum GH, HI ad eaſdem ſummam), ita AL ad LN, jungaturq́ue NM, quæ producta ſecet circumferentiam in F : Tum ſi, ut ante, ducatur FE, erit □ FE ad ▭ AEC, ſicut GH ad HI.

Etenim productâ FE, donec ab LM productâ ſecetur in O, & à cir-



cumferentia in Q: quoniam, per conſtructionem, KI eſt ad GI, ut AL ad LN, hoc eſt, invertendo GI ad KI, ut LN ad AL : erit etiam [i] per converſionem rationis, ut GI ad GK, ſic LN ad NA, vel OF ad FE. Et duplatis antecedentibus [k], ut dupla GI ad GK, hoc eſt [l], ut GI ad GH, ita QF ad FE : & dividendo [m] HI ad GH, ut EQ ad FE, hoc eſt, invertendo GH ad HI, ut FE ad EQ, hoc eſt [n], (aſſumptâ communi altitudine FE) ut □ FE ad ▭ FEQ vel AEC [o]. Quibus igitur ſatisfactum erit primæ parti Problematis.

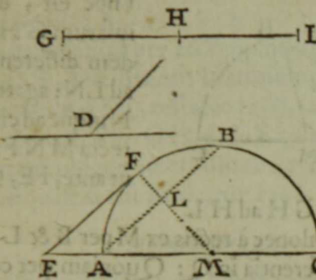
Porrò, ſi punctum E inveniendum ſit in producta AC : ſciendum eſt, datum angulum D eo caſu non poſſe eſſe rectum, cum ex nullo puncto in producta AC perpendicularis duci queat, quæ circumferentiam vel tangat vel ſecet.

Hinc angulo D non exiſtente recto, eſto primùm GH æqualis HI, fiatq́ue angulus CAB æqualis angulo D, ſi is acutus ſit, vel illi

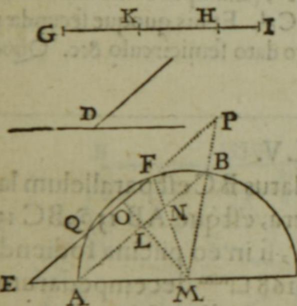
qui

[i] p corol. 19 Sexti Elem. Eucl.
[k] Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
[l] p 15 Quinti Elem. Eucl.
[m] p 17 Quinti Elem. Eucl.
[n] p 1 Sexti. Elem. Eucl.
[o] p 35 Tertii Elem. Eucl.

qui ei est deinceps, si fuerit obtusus, & ex M per medium ipsius A B usque ad circumferentiam ducatur recta M L F: Dico, si F E ducatur



parallela A B, hoc est, in dato angulo D ad productam A C, quadratum EF p æquale esse rectangulo AEC. Ut requirebatur. p p 16 ex 36 Tertii Elem. Eucl.



GH autem majori existente quàm H I, segmento GK, fiat ut G I ad GK, hoc est, ut aggregatum ipsarum GH, H I ad earundem differentiam, ita B L ad L N; agaturque ex M per N usque in circumferentiam recta M N F: Dico, ductâ F E ipsi A B parallelâ, circumferentiam secante in Q, □ FE ad ▭ A E C esse, sicut G H ad H I.

Quod ut demonstretur, producendæ sunt M L & M B, donec ipsi E F occurrant in O & P. Quoniam igitur per constructionem G I ad G K est, sicut B L ad L N: erit quoque q per conversionem rationis G I ad K I, ut L B ad B N, vel O P ad P F. Et duplatis antecedentibus, r ut dupla G I ad K I, hoc est s, ut G I ad H I, ita E P ad P F: dividendoque t ut G H ad H I, ita E F ad F P vel E Q, hoc est, u (assumptâ communi altitudine E F) ut □ E F ad ▭ F E Q vel A E C x.

q p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
r Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
s p 15 Quinti Elem. Eucl.
t p 17 Quinti Elem. Eucl.
u p 1 Sexti Elem. Eucl.
x p 36 Tertii Elem. Eucl.

Deni-

Denique, si G H sit minor quàm H I, segmento K I, fiat rursus, ut G I ad K I, (hoc est, ut aggregatum ipsarum G H, H I ad earundem differentiam) ita A L ad L N; agaturque ex M per N usque ad circumferentiam recta M N F: Dico, ductâ, ut ante, FE, □tum ex FE esse ad ▭lum A E C, sicut G H ad H I.

Productâ enim EF, donec à rectis ex M per B & L ductis secetur in P & O, & à circumferentia in Q: Quoniam per constructionem G I est ad K I, ut AL ad L N: erit quoque [y] per conversionem rationis GI ad GK, ut AL ad AN, vel E O ad EF. Et duplatis antecedentibus [z], ut dupla G I ad G K, hoc est [a], ut G I ad G H, ita EP ad EF; dividendoque [b] IH ad HG, ut PF, hoc est, E Q, ad FE; & invertendo G H ad H I, ut F E ad E Q, hoc est [c], (assumptâ communi altitudine EF) ut □ FE ad ▭ F E Q vel AEC [d]. Et his quoque secundæ parti Problematis satisfactum est. Ergo dato semicirculo &c. Quod faciendum erat.

y p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
z Vide Clavium ad 22 Quinti Elem. Eucl.
a p 15 Quinti Elem. Eucl.
b p 17 Quinti Elem. Eucl.
c p 1 Sexti. Elem. Eucl.
d p 36 Tertii Elem. Eucl.

XLV.

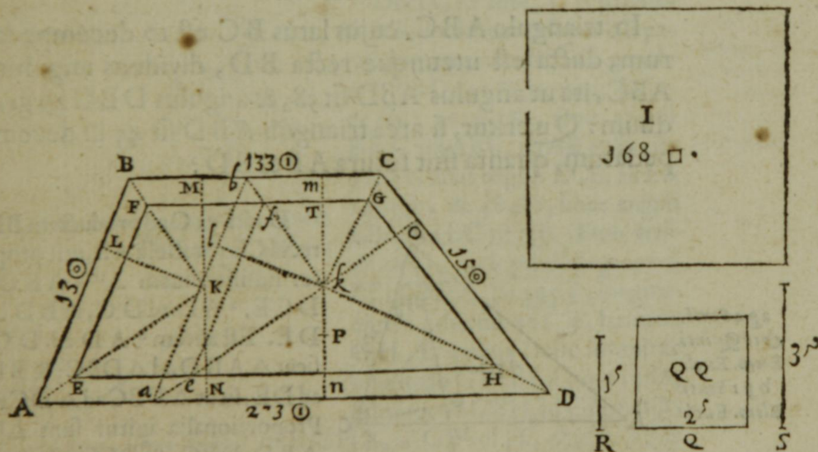
Trapezii A B C D, cujus latus B C est parallelum lateri AD, cognita sunt omnia latera, estque AB 13⓪, BC 133①, C D 15⓪, & A D 273①. Jam, si in eo piscina fodienda sit EFGH, datæ magnitudinis I 168 □rum decempedarum, ita ut cingatur ambulacro ubique ejusdem latitudinis, quæritur, quanta sit futura ejus latitudo T *m*?

Sumptâ *b m* æquali B M, & *a n* æquali A N, quoniam B M, A N simul æquales sunt A B, itemque *m* C & *n* D simul æquales C D: erunt *b* C & *a* D simul æquales ipsis A B & CD, hoc est, 28⓪. Quæ si auferantur ex B C & A D 406①, relinquentur B *b* & A *a* 126①; eritque trapezium *a b* C D simile trapezio *e f* G H. Jam per 8 prop. hujus quæratur latitudo *m n* 12, eritque 6, ejusdem semissis, linea *m k*. Tum

Tum fiat, ut 28, summa ipsarum *b* C, *a* D, ad *mk* 6, ita summa ipsarum B *b*, A *a* 126① ad *k* P 27①. Deinde, ut 28, summa ipsarum *b* C, *a* D, ad *m k* 6, ita 168, area piscinæ I, ad 36, aream □ti QQ. Cujus radix 6, erit ipsum latus Q. Porrò statuendo Q 6 esse mediam è serie trium proportionalium R, Q, & S; & *k* P 27① differentiam extremarum R & S, inveniantur per 26 Prop. hujus extremæ R & S. Quarum minor R 48①, semissis erit latitudinis piscinæ sive recta *k* T. Quæ si auferatur ex *m k* 6⓪, restabit 12①, latitudo ambulacri *m* T. Hinc ductis rectis EF, FG, GH, & HE ipsis AB, BC, CD, & DA parallelis & æquali ubique intervallo ab iis remotis, dico aream piscinæ EFGH æqualem esse datæ areæ I 168.

Demonstratio.

Per constructionem R, Q, & S sunt 3 proportionales, hinc cum T*k* sit æqualis R, & *k* P differentia extremarum R & S: erunt & T *k*, Q, & TP 3 proportionales, adeoq; [a] ▭ sub TP, T *k* æquale □to QQ. *a 17 Sexti*
Deinde quoniã per constructionem est, ut summa ipsarum *b* C & *a* D *Elem. Eucl.*



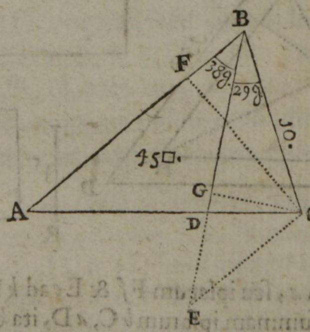
ad *m k*, ita summa ipsarum B *b* & A *a*, seu ipsarum F *f* & E *e* ad *k* P: *b p corol. 4*
erit quoque invertendo [b] ut *m k* ad summam ipsarum *b* C, *a* D, ita *k* P *Quinti E-*
ad summam ipsarum F *f*, E *e*, hoc est, [c] (assumptâ communi altitu- *lem Eucl.* *c p 1 Sexti*
dine *Elem. Eucl.*

dine kT) ita ▭ P kT ad ▭ sub Ff, E e, & kT, hoc eſt, ad parallelogrammum EFfe. Æquè, quoniam propter ſimilitudinem trapeziorum abCD & efGH eſt, ut mk ad ſummam ipſarum bC & aD, ſic kT ad ſummam ipſarum fG & eH, hoc eſt, [d] (aſſumptâ communi altitudine kT) ſicut □ ex kT ad ▭ ſub fG, eH & kT, hoc eſt, ad trapezium efGH: erit quoque per 12.5. ut □ ex kT unà cum ▭lo PkT, id eſt, ▭lo ſub TP & Tk, ad trapezium efGH unà cum parallelogrammo EFfe, hoc eſt, ad trapezium EFGH, ita mk ad ſummam ipſarum bC & aD. Sed ut ſumma ipſarum bC, aD ad mk, ita [e] eſt 168, area piſcinæ I, ad 36, aream □ti QQ, hoc eſt [f], invertendo mk ad ſummam ipſarum bC, aD, ita 36, area □ti QQ ad 168, aream piſcinæ I. Quare erit [g] ut ▭ ſub TP, Tk ad trapezium EFGH, ita □ QQ ad aream piſcinæ I. Eſt autem ▭ ſub TP, Tk æquale oſtenſum ipſi □to QQ. Æquale igitur quoque erit [h] trapezium EFGH areæ piſcinæ I. Quod erat faciendum.

d p 1 Sexti, Elem. Eucl.
e p conſtructionem.
f p corol. 4ta Quinti Elem. Eucl.
g p 11 Quinti Elem. Eucl.
h p 14 Quinti Elem. Eucl.

XLVI.

In triangulo ABC, cujus latus BC eſt 10 decempedarum, ducta eſt utcunque recta BD, dividens angulum ABC, ita ut angulus ABD ſit 38, & angulus DBC 29 graduum: Quæritur, ſi area trianguli ABD ſit 45 □ decempedarum, quanta ſint futura AB & BD?



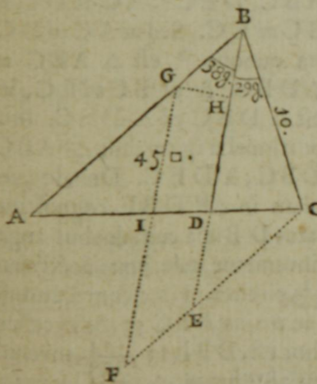
Ductâ ex C ad productam BD rectâ CE parallelâ AB, erit propter ſimilitudinem △rum ABD, DCE, [a] AD ad DC, ut BD ad DE. Eſt autem [b] AD ad DC, ſicut △ ABD ad △ DBC; & BD ad DE, ſicut △ DBC ad △ DCE. Proportionalia igitur ſunt △la ABD, DBC, & DCE. Deinde cum in △lo EBC cognoſcantur latus BC & bini anguli CBE & E, hoc eſt, ABD: invenietur ex iis, juxta doctrinam triangulorum planorum, area △li EBC 36 $\frac{25}{100}$, cir-

a p 4 Sexti, & 16 Quinti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.

circiter. Hinc cum trium dictorum $\triangle^{lorum}$ cognoſcatur 1^{mum} A B D, & aggregatum reliquorum duorum D B C, EDC, hoc eſt, E B C $36\frac{25}{100}$: invenietur, per modum operandi in Scholio $27^{mæ}$ hujus oſtenſum, $\triangle$ DBC eſſe $23\frac{73}{100}$: ac proinde totum $\triangle$ ABC $68\frac{73}{100}$, adeoque duplum ejus [c], ſive rectangulum contentum ſub AB & perpendiculari C F, eſſe $137\frac{46}{100}$. E quibus porrò innoteſcit rectangulum ſub A B & B C, ſi fiat ut F C ad C B, hoc eſt, ut 92050, ſinus anguli FBC, ad 100000, ſinum anguli recti B F C, ita $137\frac{46}{100}$ ad $149\frac{33}{100}$. Quod diviſum per B C 10, dat A B $14\frac{93}{100}$, hoc eſt, 14 decempedarum, 9 pedum, & 3 digitorum, circiter. *c p 41 Primi Elem. Eucl.*

Porrò ut inveniatur BD, ponendum erit, ut GC ad CB, hoc eſt, ut 48481, ſinus anguli DBC, ad 100000, ſinum anguli recti C G B, ita $47\frac{46}{100}$, ▭ ſub D B & perpendiculari G C ſeu [d] duplum $\triangle^{li}$ DBC, ad $97\frac{89}{100}$, ▭ ſub D B & BC. Quod diviſum per B C 10, dat D B $9\frac{79}{100}$, hoc eſt, 9 decemp., 7 ped., & 9 dig. circiter. *d p 41 Primi Elem. Eucl.*

Aliter.



Ductâ, ut ante, C E parallelâ A B, conſtituatur ſuper BE parallelogrammum BEFG æquale $\triangle^{lo}$ ABD, 45 □ decemp. Deinde fiat, ut 61566, ſinus anguli B E C vel ABE, ad AB 10⓪, ita 92050, ſinus anguli ECB, ad EB 1495②, & 48481, ſinus anguli EBC, ad EC 787②. Tum diviſâ 45⓪, areâ parallelogrammi BEFG, per E B 1495②, longitudinem: orietur 301②, latitudo GH. E quibus facilè invenitur longitudo G B, ſi fiat, ut 61566, ſinus anguli GBH, ad GH 301②, ita 100000, ſinus anguli recti G H B, ad GB vel FC 489②. Quæ ad EC 787② addita, dat FC 1276②. Porrò, cum æqualia ponantur $\triangle$ ABD & parallelogrammum BEFG, erit, ablato communi trapezio IGBD, quoque $\triangle$ AGI æquale trapezio FIDE. Quibus ſingulis ſi addatur $\triangle$ EDC, erit $\triangle$ FIC æquale binis $\triangle^{lis}$ AGI, EDC. Quare

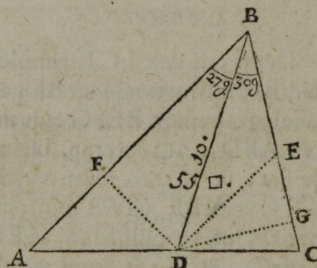
cum ipsa [e] inter se similia sint, adeoque [f] ad se invicem ut □ta homologorum laterum: erit □ ex F C æquale binis □tis ex A G & E C. Hinc si ex 1628176④, □to ex F C, auferatur 619369④, □ ex E C, relinquetur 1008807④, □ ex A G, cujus radix 1004②, erit ipsa A G. Cui additâ G B 489②, habebitur A B 1493②. Ut supra.

e p 29 Primi, & 4 Sexti Elem. Eucl.
f p 19 Sexti Elem. Eucl.

E quibus facile etiam est invenire B D, statuendo, ut 2280②, summa ipsarum A B, E C, ad E B 1495②, ita A B 1493② ad B D 979②. Unde porrò A D & D C inveniuntur juxta doctrinam triangulorum.

XLVII.

In triangulo ABC cognitis angulis ABD 29, & DBC 30 graduum, lineâ B D 10 decempedarum, & areâ trianguli ABC 55 □ decempedarum: invenire AB & BC.



Ductâ ex D rectâ D E parallelâ AB, occurrente ipsi B C in E: erit propter similitudinem △rum A B C, D E C [a], A C ad D C, ut B C ad E C. Sed ut A C ad D C, ita quoque [b] est △ A B C ad △ D B C; & ut B C ad E C, ita est △ D B C ad △ D E C. Proportionalia igitur sunt △la A B C, D B C, & D E C. Deinde quoniam in △lo D B E cognoscitur latus D B unà cum duobus angulis D B E & B D E, hoc est, ABD: invenietur inde, juxta doctrinam △lorum planorum, area DBE $13\frac{533}{1000}$, circiter. Hinc cum dictorum 3 triangulorum cognoscatur 1mum ac majus A B C 55, & excessus, quo 2dum DBC superat 3tium DEC, hoc est, D B E $13\frac{533}{1000}$, invenietur, per modum Scholii propositionis 28væ hujus, △ D B C fore $30\frac{955}{1000}$, vel $24\frac{45}{1000}$. Unde si D B C ponatur esse $30\frac{955}{1000}$, erit A B D $24\frac{45}{1000}$; at verò supponendo D B C esse $24\frac{45}{1000}$, erit A B D $30\frac{955}{1000}$. Quare sumendo A B D esse $24\frac{45}{1000}$, erit ejus duplum, hoc est [c], ▭ sub AB & perpendiculari FD contentum, $48\frac{90}{1000}$. E quibus porrò invenitur ▭ sub AB & B D, si fiat, ut FD ad DB, hoc est, ut 45399, sinus anguli A B D, ad 100000, sinum anguli recti D F B,

a p 4 Sexti, & 16 Quinti Elem. Eucl.
b p 1 Sexti Elem. Eucl.
c p 41 Primi Elem. Eucl.

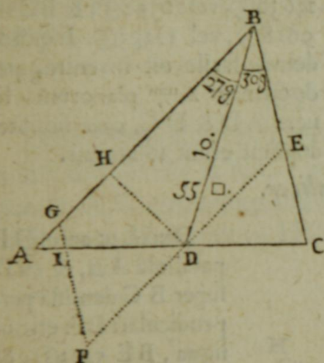
ita 48 $\frac{99}{1000}$ ad 105 $\frac{927}{1000}$. Quo diviso per D B 10, orietur A B 10 $\frac{593}{1000}$, circiter, hoc est, 10 decemp., 5 ped., 9 dig. & 3 granorum.

Porrò ut inveniatur B C, fiat ut D G ad D B, hoc est, ut 50000, sinus anguli DBC, ad 100000, sinum anguli recti DGB, ita 61 $\frac{910}{1000}$, ▭lum sub B C & perpendiculari D G, hoc est [d], duplum △li DBC, ad 123 $\frac{820}{1000}$, ▭ sub DB, BC. Quod per DB 10 divisũ, dat paulò minus quàm 12 $\frac{382}{1000}$, hoc est, 12 decemp., 3 ped., 8 dig., & 2 gran. pro BC.

d p 41 *Primi Elem. Eucl.*

Eodem modo, si A B D ponatur 30 $\frac{955}{1000}$, invenietur A B circiter 13 $\frac{637}{1000}$, & BC 9 $\frac{618}{1000}$; ita ut latera A B, B C singula duplicem sortiantur valorem, & quidem A B sit vel 10 $\frac{593}{1000}$ vel 13 $\frac{637}{1000}$; & B C vel 12 $\frac{382}{1000}$ vel 9 $\frac{618}{1000}$.

Aliter.

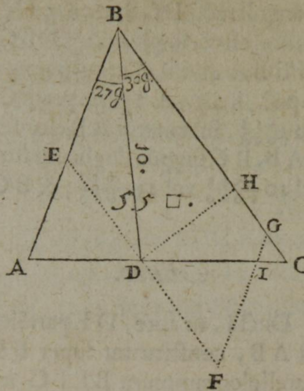


Ductâ, ut ante, D E parallelâ A B, constituatur super B E parallelogrammum B E F G æquale △lo A B C, hoc est, 55 □ decemp. Tum fiat, ut 83867, sinus anguli D E B, vel A B C, seu D E C 57 grad., ad D B 10⓪, ita 45399, sinus anguli BDE seu A B D, ad BE 5413③; & 50000, sinus anguli DBE, ad DE 5962③. Deinde, ut 100000, sinus anguli recti D H B, ad D B 10⓪, ita 45399, ad 4540③, perpendicularem D H. Hinc divisâ 55⓪, areâ parallelogrammi B E F G, per 4540③, perpendicularem seu latitudinem D H, orietur 12115③, longitudo G B seu F E. E qua subductâ D E 5962③, restabit F D 6153③. Porrò quoniam parallelogrammum B E F G æquale ponitur △lo ABC, erit subductâ communi areâ I G B E D, △ FID æquale duobus simul △lis A G I & DEC. Hinc cum ipsa [e] inter se similia sint, ac proinde [f] ad se invicem ut □ta laterum homologorum, erit □ ex F D æquale binis □tis ex AG & DE: adeoque si à □to ex FD 37859409⑥ auferatur □ ex DE 35545444⑥, relinquetur 2313965⑥, □ ex AG. Cujus radix 1521③, erit ipsa AG. Huic si addatur G B 12115③, fiet AB 13636③, paulò minor, quàm suprà.

e p 29 *Primi, & 4 Sexti Elem. Eucl.*

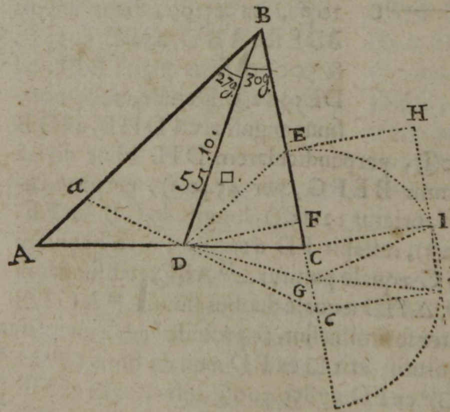
f p 19 *Sexti Elem. Eucl.*

Porrò ut inveniatur B C, fiat, ut 7674③, differentia ipſarum A B DE, ad BE 5413③, ita AB 13636③ ad BC 9618③. ut ſupra.



Eodem modo, ſi D E agatur parallela BC, donec occurrat ipſi AB in E, & ſuper EB, ut ſupra, conſtituatur parallelogrammum BEFG æquale $\triangle^{lo}$ A B C, invenietur AB 10592③, paulò minor, quàm ante; & BC 12383③, paulò major, quàm ſupra; Ita ut A B & B C ſingula ſint duplicis ſolutionis, nimirum A B vel 13636③, vel 10592③; & BC vel 9618③, vel 12383③. E quibus deinde facile eſt invenire, per doctrinam $\triangle^{rum}$ planorum, lineas A D & D C, quæ ſimiliter duplicis erunt ſolutionis.

Adhuc aliter.



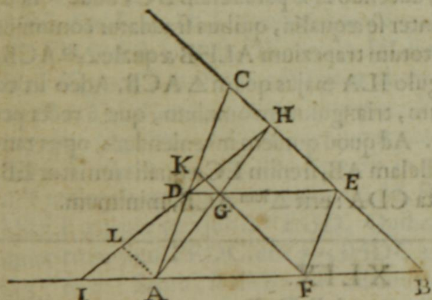
Ductâ, ut ante, D E parallelâ A B, & ex D ſuper B C demiſſâ perpendiculari DF: erit, ut ſupra, BE 5413③, & DE 5962③. Tum fiat, ut 100000, ſinus anguli recti DFB, ad DB 10⓪, ita 50000, ſinus anguli DBF, ad DF 5⓪. Deinde ſupponendo $\triangle^{lum}$ DBG æquale ſemiſſi $\triangle^{li}$ A B C, hoc eſt, 275①, ſi dividatur 275① per 25①, ſemiſſem perpendicularis DF, ſeu, quod idem eſt, 55 per 5, orietur baſis BG 11⓪. Si jam BE 5413③ ſemiſſis fuerit ipſius BG 11⓪, inventa quo-

quoque fuisset BC 11⓪, ac proinde AB & BC singulæ unius tantùm solutionis. Sed cum hîc minor sit, erunt AB & BC singulæ duplicis solutionis. Ad quas inveniendas, ponendo EH æqualem EB, eidemque perpendicularem, describatur centro G intervallo GE semicirculus EI*i*, qui secetur à recta HIi (ipsi BC parallelâ) in punctis I, *i*. E quibus si super BC demittantur perpendiculares IC & *ic*, ostendent ipsæ longitudinem lateris BC. Hinc si 29300569⑥, □ ex BE, EH, vel *d ꝑ 4 hujus,*
CI, auferatur à □^to ex GE vel GI 31214569⑥, relinquetur [d] □ ex *vel 47 Primi Elem.*
CG 1914000⑥. E quo extractâ radice, invenietur GC vel G*c* 1383③. *Eucl.*
Quæ ex BG 11⓪ ablata, aut eidem addita, dat BC 9617③, vel 12383③. Cujus demonstratio ex modo præcedenti est manifesta. *e ꝑ 4 Sexti*
Denique ad inveniendum AB, fiat [e] ut CE 4204③, vel 6970③ *Elem. Eucl.*
ad ED 5962③, ita CB 9617③, vel 12383③ ad AB 13638③, vel 10592③.

XLVIII.

Dato triangulo ABC, productisque lateribus AB, BC indefinitè versùs A & C: per punctum D, utcunque datum in AC extra ejus medium, rectam lineam ducere IDH; ita ut triangulum IHB sit æquale triangulo ACB.

Constructio.



Ductâ DE parallelâ AB, tum EF parallelâ AC, ac rursus FG parallelâ CB, agatur ex A per G recta AGH: dico, si ex H per D ducatur HDI, triangulum IHB æquale esse triangulo ACB.

Demonstratio. *a ꝑ 29 Primi, & 4*
Etenim productâ FG *Sexti Elem.*
ad K, erit [a] propter similitudinem triangulorum FGE, KGD, EG *Eucl.*
ad GD, ut FG ad GK. Sed ut EG ad GD, ita quoque est BA ad AI; *b ꝑ 1 Sexti*
& BA ad AI, [b] ut △ BAH ad △ HAI: itemque FG ad GK, ut BH *Elem. Eucl.*
ad

ad H C; & B H ad H C, ut △ B A H ad △ A H C. Erit igitur ut △ BAH ad △ HAI, ita idem △ BHA ad △ AHC; adeoque [c] △ HAI æquale $\triangle^{\text{lo}}$ A H C. Hinc si illis addatur commune △ B H A: erit △ IHB æquale $\triangle^{\text{lo}}$ ACB. Quod erat faciendum.

c 9 Quinti Elem. Eucl.

Aliter.

Fiat ut C B ad E B, ita E B ad E H. Etenim quoniam [d], propter similitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ AHB, AGF, AB est ad AF, sicut BH ad FG, hoc est, E B: erit quoque dividendo [e] BF ad F A, ita H E ad EB. Sed ut BF ad FA, ita est, [f] propter parallelas FE, AC, BE ad EC. Quare erit [g] ut HE ad E B, ita EB ad EC: & convertendo [h] CE ad EB, ita EB ad EH. Quod erat demonstrandum.

d p corol. 4 Sexti Elem. Eucl.
e p 17 Quinti Elem. Eucl.
f p 2 Sexti Elem. Eucl.
g p 11 Quinti Elem. Eucl.
h p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.

Adhuc aliter.

Fiat ut F B ad B A, ita AF ad BI. Quoniam enim, ut ante, AB est ad AF, sicut B H ad EB; & per conversionem rationis [i] AB ad B F, ut BH ad HE: erit quoque invertendo [k] FB ad BA, sic E H ad HB, hoc est, [l] propter similitudinem $\triangle^{\text{rum}}$ H E D, H B I, ut D E, hoc est, A F, ad I B. Quod erat ostendendum.

Porrò punctum D extra medium lineæ AC dari debere, hinc patet, quoniam, si in medio ipsius datum fuerit, nulla recta I H per id duci potest, faciens $\triangle^{\text{lum}}$ IHB æquale $\triangle^{\text{lo}}$ ACB, sed semper majus. Id quod manifestum est, ducendo A L parallelam B C, unde [m] fiunt duo $\triangle^{\text{la}}$ ALD, D H C inter se æqualia, quibus si addatur commune trapezium ADHB: erit totum trapezium ALHB æquale $\triangle^{\text{lo}}$ ACB, ac proinde △ IHB triangulo ILA majus quàm △ ACB. Adeò ut eo casu △ A C B sit minimum, triangulorum omnium, quæ à recta per D ducta constitui possunt. Ad quod quidem inveniendum, opùs tantùm est ducere DE parallelam AB, si enim EC æqualis sumatur EB, & ex C per D agatur recta CDA: erit $\triangle^{\text{lum}}$ ACB, minimum.

i p corol. 19 Quinti Elem. Eucl.
k p corol. 4ta Quinti Elem. Eucl.
l p corol. 4ta Sexti Elem. Eucl.
m p 26 Primi Elem. Eucl.

XLIX.

Dato parallelogrammo A B D C, ex vel per punctum E, datum in uno laterum B D, vel eodem producto, rectam lineam ducere EF, occurrentem lateribus oppositis AC, CD, vel iisdem productis: ita ut triangulum FCG, ab eadem

eadem contentum, ad parallelogrammum ABDC datam habeat rationem, HD ad DB. *Vide figuras paginâ versâ.*

Est hæc 164 Prop. libri 7 Collectionum Mathematicarum Pappi Alexandrini, *quam hic generalem proposuimus & solvimus, cujus quidem constructionem non ostendit, sed petere videtur ex libris* Apollonii *de* Spatii Sectione, *qui temporum injuriâ perierunt, atque postea restituti sunt ab eruditissimo, celeberrimóque Viro* D. Willebrordo Snellio, *qui & de* Determinata & Rationis Sectione *libros, in lucem revocavit.*

Constructio.

Ductâ HI parallelâ AB vel CD, faciente parallelogrammum HDCI, describatur super HE semicirculus HKE, in quo aptatâ EK æquali ED, jungatur HK: dico, si IF sumatur æqualis HK, & per puncta F, E recta linea agatur, △ FCG esse ad ▭ ABDC, ut HD ad DB.

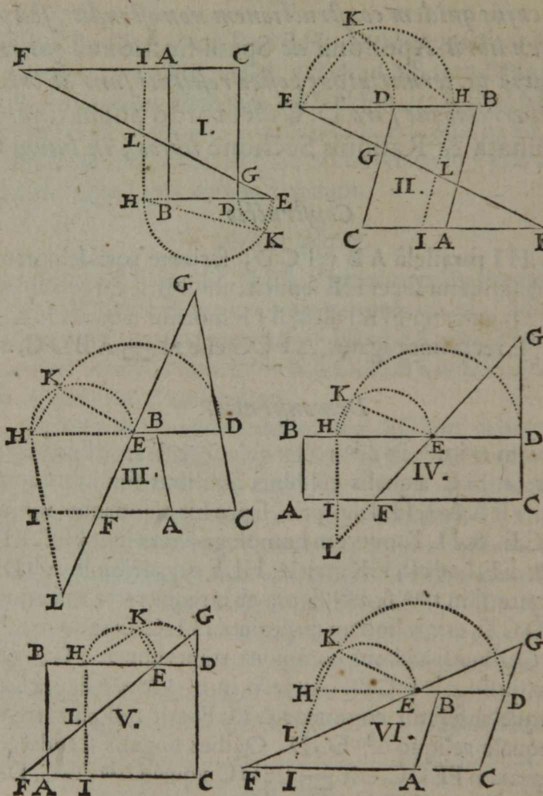
Demonstratio.

Quoniam enim [a] in △^{lo} rectangulo HKE rectilinea figura descripta super HE æqualis est binis similibus similiterque positis figuris super EK & KH descriptis, si pro his assumantur similia △^{a} HLE, DGE, & ILF, quorum homologa latera sunt HE, ED, hoc est, EK, & EF, hoc est, HK: erit △ HLE æquale binis △^{lis} DGE & ILF. Quare si in 1ma & 2da figura ab utraque parte auferatur commune △ DGE, erit reliquum trapezium HLGD reliquo △^{lo} ILF æquale. Quibus si addatur commune trapezium LICG erit ▭ HICD æquale △^{lo} FCD. At verò in 3^{tia} & 4ta figura si à dictis △^{lis} utrinque auferatur commune △ ILF, erit reliquum trapezium IHEF æquale reliquo △^{lo} EGD. Quibus singulis si addatur commune trapezium FEDC, erit ▭ IHDC æquale △^{lo} FGC. Denique in 5ta & 6ta figura, si dictis △^{lis} addatur utrobique commune spatium ILEDC, erit ▭ IHDC æquale △^{lo} FGC. Quocirca cum in omnibus hisce figuris ▭ IHDC sit æquale △^{lo} FGC, & [b] ▭ IHDC sit ad ▭ ABDC, sicut HD ad DB: erit quoque △ FGC ad ▭ ABDC, ut HD ad DB. Quod erat faciendum.

[a] *p 31 Tertii, & 31 Sexti Elem. Eucl.*

[b] *p 1 Sexti Elem. Eucl.*

Quod ad 1mam & 2dam figuram attinet, ipsæ unam tantùm admittunt solutionem, nec ulli determinationi sunt obnoxiæ, ut contra fit in 4or reliquis. *In quibus H E non minor esse debet quàm E D.* Æqualibus enim existentibus, recta ex I per E ducta quæsito satisfaciet,



eritque I E G △rum omnium, rectâ per E ductâ contentorum, minimum. Hoc est Problema eo casu erit μοναχὸν seu *unius tantùm solutionis*, cum aliàs duplicem admittat. Etenim inventâ lineâ FEG, ut osten-

ſtenſum eſt, ducenda erit per E, ut in præcedenti Problemate, alia recta, faciens △^{lum} æquale ipſi FGC, alteram præbens ſolutionem. Quæ quidem breviùs hic invenitur, ponendo tantùm HK, quam in 3^{tia} & 4ta figura ab I ad F versùs C poſuimus, in eadem recta ad alteram partem, ut in 5ta & 6ta figura factum eſt; & illam, quam in 5ta & 6ta figura ab I ad F versùs alteram partem poſuimus, ponendo in eadem recta versùs C, ut in 4ta & 5ta figura factum eſt; ducendo deinde ex invento hoc puncto per E rectam lineam.

Ubi porrò patet in 3^{tia} & 6ta figura, ubi punctum E in producto latere BD datum eſt, rationem ipſius HD ad DB, majoris ſemper inæqualitatis eſſe debere, hoc eſt, HD majorem quàm DB: quoniam in hiſce caſibus △ FGC ſemper majus eſt quàm ▭ ABDC.

Denique, quod ſpectat ad reliquos caſus, ſi in ipſis cum Pappo velimus ut △ FGC ſit æquale ▭^{mo} ABDC, quo caſu HD, DB ſemper æquales ſunt, & IH eadem quæ AB: ſciendum, conſtructione ac demonſtratione invariatâ manente, punctum B loco H aſſumendum eſſe, & A loco puncti I.

Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, ita ut △ FCG ſit æquale dato ſpatio, ſi tantùm [c] ▭ HICD fiat dato ſpatio æquale; & his quidem cunctis Problematis caſibus ſatisfactum putamus. c 44 aut 45 Primi Elem. Eucl.

L.

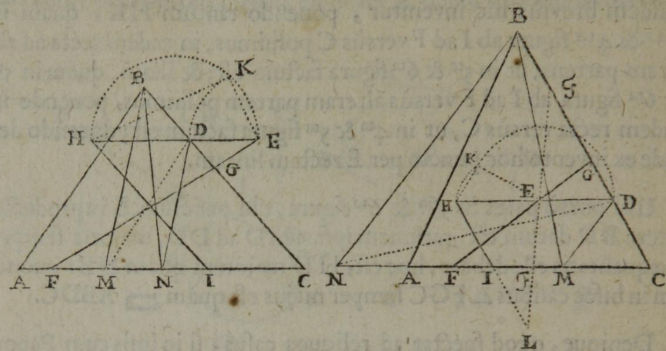
Triangulum ABC ſecare in data ratione rectâ EFG, procedente ex vel per datum punctum E, extra vel intra triangulum ABC.

Conſtructio.

Sectâ AC in M in ratione data, junctâque BM ducatur ED parallela AC, occurrens ipſi BC vel eidem productæ in D, deſcribaturque ſuper DC, per 44 prop. 1 lib. Elem. Eucl. ▭^{mum} IHDC æquale △^{lo} MBC: vel brevius, mutando tantùm △ MBC in △ NDC (ducendo ad hoc BN parallelam DM) dividendoque NC bifariam in I: eritque recta EFG, ex vel per E ducta (ut in antecedenti Proble-

mate) faciens △ FCG æquale ▭mo IHDC, recta quæsita.

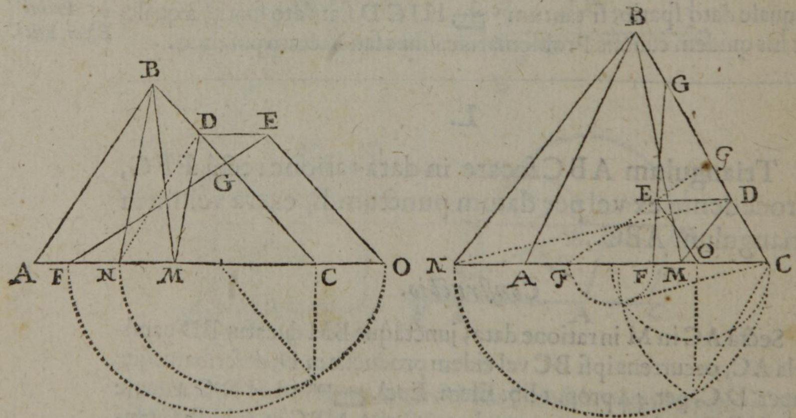
Eodem modo ex vel per E recta ducitur linea, faciens △ FCG



æquale dato ſpatio, conſtituendo tantùm ▭ IHDC dato ſpatio æquale.

Aliter.

Mutato, ut ante, △lo MBC in NDC, ducatur EO parallela BC,

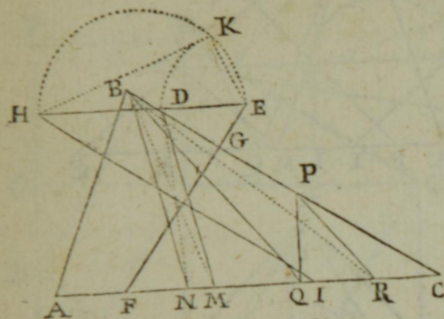


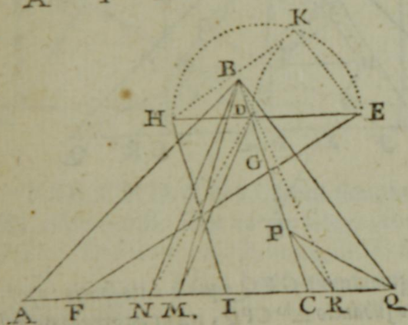
occurrens ipſi AC eidemvé productæ in O. Tum ſumendo NC eſſe unam

unam extremarum, & CO differentiam mediæ & alterius extremæ, è serie trium proportionalium, inveniatur per 28 prop. hujus media FC, eritque FO altera extrema. Quibus positis, si ducatur recta FEG, erit ipsa quæsita.

Similiter si △lum FCG æquale requiratur dato spatio, eodem modo operandum erit, facto priùs △lo NDC eidem spatio æquali.

Demonstratio.





Quoniam enim FO, FC, & NC a tres sunt proportionales, & super 1ma & 2da descripta sunt similia △la FEO & FGC: erit b 1ma FO ad 3tiam NC, sicut △ FEO super 1ma ad △ FGC super 2da. Sed ut FO ad NC, ita quoque c est idem △ FEO ad △ NDC, hoc est, MBC. Quare, cum △ FEO ad △ FGC eandem habeat rationē quam ad △ MBC, erit d △FGC æquale △lo MBC, adeoque reliquum segmentum ABGF æquale reliquo △lo ABM. Sed ut ABM ad MBC, sic e AM est ad MC. Erit igitur ut ABGF ad FGC, ita AM ad MC. Quod erat faciendum.

a Ex constructione.

b p corol. 19 Sexti Elem. Eucl.

c p 1 Sexti Elem. Eucl.

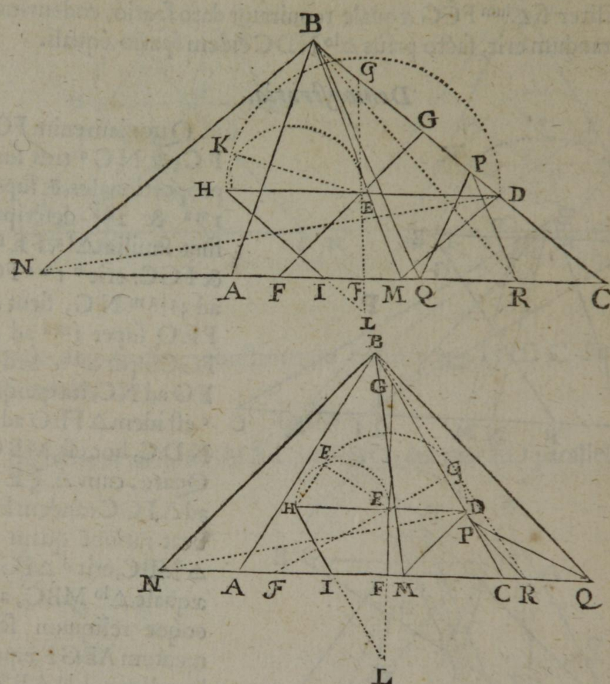
d p 9 Quinti Elem. Eucl.

e p 1 Sexti Elem. Eucl.

SCHOLIUM.

Eodem modo licet trapezium ABPQ secare in data ratione, rectâ procedente ex vel per punctum E, extra vel intra trapezium ABPQ datum: mutando tantùm ABPQ in △ ABR, secandoque AR in M in ratione data. Operando deinde (postquam ▭ IHCD, ut ante, factum est æquale △lo NDC,

NDC, hoc est, MBC) ut in primo modo fuit ostensum: vel etiam ut in secundo, inveniendo ad N C, unam extremarum, & C O, hoc est, D E, differentiam mediæ & alterius extremæ, mediam FC.

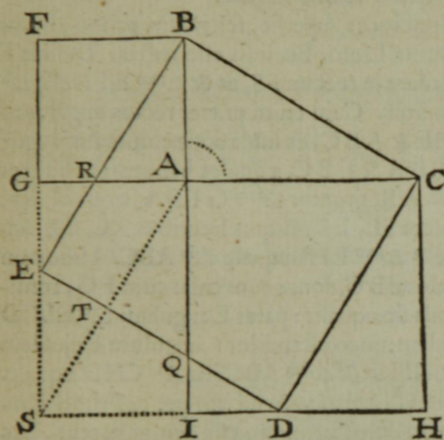


Similiter ad auferendum segmentum F G P Q æquale dato spatio: oportet, eidem prius addito vel ab eo subducto △lo CPQ, ita ut aggregatum vel differentia sit △ NDC, operationem porrò instituere, ut supra.

Id quod eodem modo de omnibus figuris rectilineis est intelligendum.

FINIS.

Quoniam penultima Primi Elementorum Euclidis, quam in 4ta harum aliter demonstravimus, permagni usus existit; placuit in gratiam Geometriæ tyronum, qui in perpendendis Propositionibus, quæ admirandas proprietates conspicuasque utilitates exhibent, delectari, atque longâ antecedentium Propositionum serie deterreri solent, concinniorem hanc ejus demonstrationem subnectere.



Quadratum EBCD quadratis GFBA & ACHI simul sumptis æquale esse, ita ostenditur. Producantur FG, HI donec sibi invicem occurrant in S, jungaturque SA. Quoniam itaque figura SFBCH excedit $\square^{tum}$ EBCD tribus $\triangle^{lis}$ EFB, CHD, & DSE; at verò duo $\square^{ta}$ GFBA & ACHI rectangulo SGAI & $\triangle^{lo}$ ABC: ostendendum tantùm restat $\triangle^{la}$ EFB, CHD, & DSE simul sumpta $\sqsubset\!\sqsupset^{lo}$ SGAI unà cum $\triangle^{lo}$ ABC esse æqualia. Hoc autem liquet, considerando tria $\triangle^{la}$ EFB, CHD, & DSE tum inter se, tum ipsis SGA, AIS, & ABC sigillatim, hoc est, ipsi $\sqsubset\!\sqsupset^{lo}$ SGAI unà cum $\triangle^{lo}$ ABC esse æqualia. Quare constat propositum.

Vel etiam hoc modo, ut Vir Doctissimus D. Andreas ab Oudts-hoorn, *Mathematum peritiâ ac omni virtutis genere splendidissimus.*

Triangulum RBA & trapezium ACDQ communiter continentur tam in $\square^{to}$ EBCD quàm in duobus $\square^{tis}$ GFBA & ACHI. Deinde, duas reliquas partes ABC & RAQE, in $\square^{to}$ EBCD contentas, tribus reliquis partibus GFBR, CHD, & DIQ, in $\square^{tis}$ GFBA, ACHI

ACHI contentis, æquales esse, patet, quòd $\triangle^{lum}$ quidem ABC sit æquale ipsi CHD, at trapezium RAQE æquale ipsi GFBR unà cum $\triangle^{lo}$ DIQ. utpote, tollendo summam $\triangle^{li}$ EGR ac trapez ii SEQI tum ex summa $\triangle^{lorum}$ SGA, AIS, hoc est, ex ▱^{lo} SGAI, tum ex summa $\triangle^{lorum}$ EFB & SED, præcedentibus æqualium. Quocirca cum omnes partes in $\square^{to}$ EBCD contentæ etiam contineantur sive æquales sint omnibus partibus, $\square^{ta}$ GFBA & ACHI simul constituentibus, relinquitur $\square^{tum}$ EBCD quadratis GFBA, ACHI æquale esse. Quod erat ostendendum.

Expletio demonstrationis.

Quò nullus dubitationi locus superfit, sciendum primò, lineas GAC & BAI per 14 Primi Elem. Euclidis esse rectas. Deinde E angulum $\square^{ti}$ EBCD cadere in rectam FS, ut & $\triangle^{lum}$ EFB esse $\triangle^{lo}$ ABC æquale, ita ostenditur. Cum enim præter rectos angulos ad F & A etiam angulos FBE & ABC, ex sublatione communis anguli EBA ab utroque recto FBA & EBC, æquales habeant; ac insuper eorum quoque latera FB, AB, propter $\square^{tum}$ GFBA, æqualia sint: erunt itidem [a] reliqua latera FE, EB reliquis lateribus AC, CB, singula singulis, æqualia; & [b] $\triangle^{lum}$ EFB æquale $\triangle^{lo}$ ABC. Hinc cum EB, ducta in recto angulo ad BC, donec conveniat cum FG, continuatâ in E, ipsi BC ostensa sit æqualis: patet E angulum $\square^{ti}$ EBCD cadere in rectam FS. Eodem modo ostenditur [c], angulum E ejusdem $\square^{ti}$ EBCD cadere in latus IH, ut & $\triangle^{lum}$ ABC esse $\triangle^{lo}$ CHD æquale. Porrò $\triangle^{lum}$ SGA esse $\triangle^{lo}$ AIS æquale, cōvincitur per 34 Primi Elem. si modò ▱^{lum} SGAI parallelogrammum esse demonstretur, hoc est, cujus opposita latera sint parallela. Id quod liquet [d] ob æqualitatem rectorum angulorum BAC, FGA, & AIH. Præterea $\triangle^{lum}$ SGA ipsi EFB, hoc est, ut supra, ipsi ABC æquale esse, vel hinc arguitur, quòd SG [e] sit ipsi IA, hoc est, AC æquale, & GA ipsi AB; & quòd anguli AGS & BAC ab iis comprehensi recti sint, ideoque æquales. Denique $\triangle^{lum}$ AIS æquari $\triangle^{lo}$ SED, ita constat. Quoniam enim, ut supra, FE est æquale AC, hoc est, AI, & FS [f] æquale BI: erit quoque ES ipsi BA æquale. Similiter quia DH æquatur AB, hoc est, GA, & SH æquatur GC: erit etiam SD æquale AC. Hinc cum in $\triangle^{lis}$ SED, ABC latera circa æquales rectos ad S & A sint singula singulis æqualia: erunt quoque ipsa $\triangle^{la}$ [g] æqualia. Est autem $\triangle^{lum}$ ABC, ut supra ostensum, æquale $\triangle^{lo}$ EFB seu SGA, hoc est, $\triangle^{lo}$ AIS. Quare etiam $\triangle^{lum}$ SED ipsi AIS æquale erit.

a p 26 Primi Elem. Eucl.

b p 4 Primi Elem. Eucl.

c Vide ea, quæ habentur pag. 41.

d p 28 Primi Elem. Eucl.

e p 34 Primi Elem. Eucl.

f p 34 Primi Elem. Eucl.

g p 4 Primi Elem. Eucl.

FRAN-

113

FRANCISCI à SCHOOTEN

LEYDENSIS

In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,

LIBER II.

DE

Constructione Problematum Simplicium

GEOMETRICORUM,

SEU

Quæ solvi possunt, ducendo tantùm rectas lineas.



LUGD. BATAV.

Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,

Academiæ Typographi.

cIↃ IↃC LVI.

Nobilissimis atque Amplissimis Dominis,

ILLVSTRIS ACADEMIÆ

LUGDUNO-BATAVÆ, CURATORIBUS,

D. AMELIO à BOUCKHORST, Domino de Wimmenum, Ordinis Equestris Assessori, Rhenolandiæ aggerum Præfecto ac Comiti, antehac in Consessu Ordinum Generalium Delegato, nunc autem Collegii Deputatorum Holl. Ordinum Præsidi.

D. GERARDO SCHAEP, Equiti, Domino de Cortenhoef, Reïp. Amstelodamensis Consuli, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Hollandiæ Consiliariorum Delegato, atque ad Sereniss. ac Potentiss. Daniæ & Sueciæ Reges Legationibus perfuncto.

D. CORNELIO de BEVEREN, Equiti, Strevelshouckii, West-Iselmundæ, Lindæ, &c. Domino, ad Sereniss. ac Potentiss. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Exlegato, antehac in Consessu Ordinum Generalium & Collegii Ordinum Holl. Consiliariorum Delegato, atque Reïp. Dordracenæ Exconsuli.

UT ET,

D. CORNELIO ANTONIDÆ à BUYTEVEST,
D. GVILIELMO PAEDTS, JCto, Rhenolandiæ Consiliario,
D. PAVLO à SWANENBVRG JCto,
D. JOHANNI MEERMAN JCto,
} *Florentissimæ Reip. Lugd. Batavæ Consulibus.*

NEC NON,

Amplissimo, Prudentissimoq́, Viro,

D. JOHANNI à WEVELINCHOVEN JCto, Reïp. Lugd. Bat. Syndico, iisdemq; D. D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-



Nobilissimi atque Amplissimi Viri,

DUM perpendo quantum in ære vestro sim, quòd studiis meis non modò prospexeritis, sed & iis promovendis etiamnum nulla denegetis subsidia: æquum duxi, ut conatus hosce, profectusque, quos in stadio à Vobis mihi proposito fecisse autumo, judiciis Vestris exponerem; ut vel hinc intelligatis me singularis istius beneficentiæ immemorem non esse. Neque me dubitare sinit eximia Vestra humanitas, quin id, quod offero, muneris, gratum acceptumque Vobis sit futurum, quum & primitias laborum meorum antehac luculento suffragio comprobaveritis, & alioqui semper favere iis ultro soleatis, qui ingenuas artes Reipublicæ bono promovendas excolendasque suscipiunt. Quanta autem Mathematicarum non modò sit utilitas, sed & necessitas; quantum illæ in excolendis, amplificandis, muniendis, & exornandis urbibus conferant subsidii; quanta insuper disciplinis hisce ex inevinci-

bili certitudinis ſuæ evidentia, quâ cæteris omnibus præcellunt, accedat dignitas: non opùs eſt ut hîc deprædicem Vobis, quibus id tam ex variis ac ſupremis Reipublicæ muneribus obeundis, quàm ex crebris ad potentiſſimos Reges & Principes Legationibus, quibus ſumma cum laude atque exterorum admiratione defuncti eſtis, abundè conſtat. Videtur equidem mihi rem acu tetigiſſe, qui dixit: *Scientias haſce ac artes adeò humano generi eſſe neceſſarias, ut, qui illas è ſocietate humana tollat, Solem ipſum è mundo tollere videatur.* Quamvis igitur conatus eorum vel maximè laudandos putem, qui eaſdem ad Reipublicæ uſum non tantùm diligenter excolunt; ſed etiam excultas poſteritati tradunt atque commendant: non minori tamen honore extollendi videntur ii, qui, neceſſitate illarum probè perſpectâ, ipſarum Fautores exiſtunt ac Mecœnates, omnemqúe operam dant, ut cum reliquis ſimul ſcientiis ac artibus propagentur. Quod ſanè, quantâ à Vobis curâ fiat, vel inde patet, quòd Artes Mathematicas non ſolùm in hanc Academiam introduci; verùm etiam vernaculâ noſtrâ linguâ doceri volueritis, & laudabili hoc veſtro inſtituto aliis, quibus in moderandis ſtudiis æqua poteſtas vobiſcum data eſt, imitando exemplo præluxeritis,

Vobiſqúe æmulos creaveritis. Quæ verò hinc gloriæ decoriſqúe Academiæ Veſtræ facta ſit acceſſio, teſtatur tot Nobilium, Ducum, ac Principum appulſus frequens, qui eam, ut præclara ſidera cœlum, illuſtrem reddunt, & ob hanc præcipuè cauſam adeunt, ut in Mathematicis Scientiis addiſcendis omnem ſuam operam collocent. Taceo hîc viros innumeros, qui ex hoc fœcundiſſimo Athenæo, tanquam ex equo Trojano, prodierunt, de Republica noſtra bene meritos, quiqúe eam contra tot hoſtiles inſultus inconcuſſam ac fermè invincibilem reddiderunt: quorum ope in civium ſalutem atque incolarum requiem ac ſecuritatem tot loca munita, tot fortalitia extructa, tot denique inimicorum deluſi conatus. Fœtus ergo quos belli tempore Mathematum cultura heic pepererit, lubens prætereo, cum paſſim omnes norint, quòd militaris diſciplina, moduſqúe gerendi belli, ſive in oppugnando, ſive in defendendo, qualis hîc excultus aut exercitus fuit, parem in orbe haud invenerit, & is quidem etiam hoc nomine apud omnes gentes celebratur. Pacis verò tempore, quantam hæ artes Reipublicæ utilitatem afferant, fruſtra ego commemorem Vobis, qui & jam pridem perſpectum habuiſtis, & quotidie experimini: Omnem ex

iis hominum manare ſolertiam, eorumqúe in muneribus ſuis feliciter obeundis dexteritatem. Etenim cum ad Reipublicæ noſtræ clavum ſedeatis, plurimùm illam Vobis, Nobiliſſ. atque Ampliſſ. Viri, debere ſemper judicavi: quandoquidem ipſa mihi robur fermè ſuum à Mathematis accipere, atque ex iiſdem promovendis conſervare viſa eſt; quibus propagandis per Dei gratiam, juxta ac Veſtram Curam & Diligentiam, ad id faſtigiūm, quale hodie cernitur, adſcendit. Quare dum mente revolvo, Vos, ritè perpensâ harum Scientiarum utilitate, ſemper eaſdem promoviſſe, atque earum cultoribus faviſſe: officii mei eſſe duxi, laboris hujus ſive novæ ſpeculationis fœtum, jam pridem à me conceptum, etſi munus ſublimi Dignitati Veſtræ valde impar, in debitæ obſervantiæ ac gratitudinis teſtimonium publicum illuſtribus Veſtris Nominibus conſecrare. Quem ſi eo vultu, quo me accipere ſoletis, acceptum iri intelligam, animos mihi addetis his majora ac magis digna moliendi. Deus Opt. Max. Vos Reipublicæ, literatis omnibus ac ſtudiorum candidatis, diu incolumes atque felices ſervet. Ita vovet & precatur,

Veſtrarum Nobb. & Ampp.

humillimus cliens

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

NEminem tam leviter in Geometricis versatum opinor, quin vel ille quoque, qui primoribus tantùm labris ea degustavit, utilitatem vulgarium Euclidis Problematum in difficilioribus construendis deprehenderit. Etenim si ratio habeatur eorum, quæ passim tam in Geometria, quàm aliis in artibus, quæ eidem superstructæ sunt, facienda occurrunt: nonnisi continuus dictorū Problematum usus & exercitatio comperietur. Quibus perspectis, ratus sum, quòd, si quid in horum Problematum constructione fortè desideratum foret, & à me inventum demonstrarem, similiter omnibus reliquis, quæ iisdem innituntur, me satisfecisse omnino confidere possim. Quapropter, cum animadverterem, dicta Problemata in campo longè aliter, quàm in charta, & ab omnis generis operariis ac artificibus absolvi, in mentem venit, id inde originem ducere, quòd in charta ad eorum constructionem secundùm Euclidem aliquid passim postulari & concedi debeat, quod quidem in campo non eodem modo nec æquè facilè expeditur. Hinc, cùm penitiùs hæc introspiciens perciperem, in tribus tantùm totius rei cardinem versari, ut: à dato puncto ad datum punctum rectam lineam ducere; datam rectam in continuum rectâ producere; & è dato puncto, tanquam centro, & intervallo quovis circulum describere: deprehendi, considerando quàm difficulter circulus in campo describatur, quam ob causam ibidem à vulgari Euclidis construendi modo recessum, & ad alium, qui parum Geometricus censendus est, deventum sit. Unde factum, ut, si, verbi gratiâ, datus angulus bifariam sit dividendus, ad circulorum descriptionem illîc evitandam, instrumentum, quod Astrolabium dicitur, circulus existens in 360 partes æquales, gradus appellatas, divisus; quique rursus singuli in 60 minuta mente subdividuntur, ad id præstandum communiter adhibeatur. Quocum anguli amplitudine in di-

ctis partibus observatâ, si dioptra ad semissem numeri harum partium applicetur, angulus in duos æquales dispescitur. Quis non hujusmodi processum à Geometria alienum judicet; quippe tam anguli quàm lineæ dantur, quorum magnitudo, dum nullo partium hujus divisionis numero exprimi potest, irrationalis dicitur? Quinimò, si vel nulli tales anguli reperirentur, nihilominùs modus hic procedendi pro Geometrico habendus non esset: quandoquidem hoc pacto Problematis Geometrici constructio per Arithmeticæ principia, adeóque non per propria perficitur. Sicuti nec pro Geometrica constructione haberi debet, si ad triangulum ex datis tribus rectis lineis constituendum, datâ rectâ aliquâ pro communi mensurâ utamur (quemadmodum vulgò fit,) & ad eam cujusque lineæ longitudinem exploremus, ut exinde magnitudo singulorum angulorum calculo innotescat. Etenim præterquam quòd longitudo uniuscujusque harum trium linearum in propositæ mensuræ partibus non semper explicabilis sit, vel quoque magnitudo singulorum angulorum per circuli partes antedictæ divisionis semper exprimi possit, consistit tertiò tota operatio in numerorum calculo, quæ ne minimùm quidem cum Geometrica constructione convenire dicenda est. Quartò accedit, ipsam instrumenti in prædictas partes divisionem Geometricam longè difficiliorem esse, ac proinde necessariò post propositi Problematis constructionem sequi debere. Quintò denique considerando, quòd operis perfectio in totum pendeat, tum ab accurata instrumenti fabrica, tum & justa circuli in prædictas partes divisione (quæ utraque ab ipsis etiam peritissimis artificibus ad perfectionem non perducitur): facilè concluditur, ejusmodi operationem imperfectam esse ac naturæ Geometriæ repugnare.

Hinc cum processum in campo perspectum haberem, ubi Geometria hanc prærogativam sibi vendicare videbatur, quòd ibidem magis purè & naturæ suæ convenienter exerceri possit, quippe ubi lineæ & figuræ omnes mente duntaxat descriptæ concipiuntur, & nonnisi punctorum signa in usu sunt: visum fuit circulorum descri-

scriptionem, omnino illic ineptam, rejicere, ac ad dictorum Problematum constructionem postulatum hoc substituere : Ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem. *Quod licet ab Euclide ut Problema construatur, & tamen à nullo non ob simplicitatem suam proprio marte facilè absolvatur, ego pro principio habendum duxi, ac proinde à quovis concessum supposui: siquidem id non modò ubivis idoneam praxin admittit, verùm etiam (meo quidem judicio) naturâ suâ multò simplicius, quàm circuli descriptio existit; in cujus etiam minimæ portiunculæ efformatione è dato puncto non tantùm una sed infinitæ rectæ alteri datæ æquales sunt sumendæ aut concipiendæ.*

Porrò perpendendo in Geometria, nullum Problema, quantumvis simplex, Geometricè construi posse, in quo ad minimum æqualitas duarum rectarum linearum non sit consideranda, nec etiam hactenus ullum ex Problematibus Euclidis absque circuli descriptione constructum sit: judicavimus, quòd, licèt sæpiùs in construendis vulgaribus hisce Euclidis Problematis ad punctum aliquod lineam alteri æqualem ponamus, constructio tamen nostra propterea magis composita censeri non debeat; sed simplicior, in quantum eam aliquoties tantùm ponere, quàm infinities assumere, facilius est. Non equidem inficias eo, instrumentorum ope sæpe aliquid faciliùs obtineri, & consequenter ea admitti posse, ubi eorum usus tale emolumentum suppeditat, quandoquidem in eum finem sunt excogitata; ut, exempli gratiâ, circinus, tam ad longitudinem lineæ capiendam, quàm ad eandem ex puncto infinities ponendo circulum in plano describendum. Quoniam verò hoc & his similia ad Mechanicam potiùs quàm ad Geometriam pertinent, cujus quidem scopus in contemplanda constructione & demonstratione consistit, non autem circa instrumenta, quibus ipsa perficitur, versatur: placuit prædicta Problemata ita construere, ut contemplatio eorum constructionis ubiq; proficua esse possit.

Præterea, cum in Geometria ab Antiquis tria genera Proble-

matum statuta sint, ut, Planorum, Solidorum, & Linearium, *in hoc discrepantium, quòd* Plana *ductis lineis rectis descriptisq; circulis construantur, &* Solida *descriptâ insuper Coni sectione, at* Linearia *in locum hujus assumptâ aliâ curvâ, magis compositâ: visum fuit, considerando infinita esse Problemata, adeò simplicia, ut solis rectis lineis construi possint, sub prædicto genere* Planorum Problematum *genus aliquod subalternum, utputa,* Simplicium Problematum, *constituere; quorum itaque constructionem in hoc tractatu exhibere animus est. Ad quod vel eo magis incitati atque instigati fuimus, quòd Nobilissimus ac Celeberrimus Vir Renatus Des Cartes in sua Geometria (quam aliquot abhinc annis ex Gallico idiomate in Latinum translatam, nunc denuo uberioribus commentariis illustratam edimus) succinctam & generalem methodum ostenderit, ad prædicta superiorum generum Problemata, per curvas lineas, in certa genera à se distinctas, construenda.*

Vnde, quandoquidem nullæ simpliciores lineæ quàm rectæ excogitari queunt, quæ quidem in campo per radios visuales citra omne instrumentum designantur: æquum duxi constructionem horum vulgarium Euclidis Problematum, ad quæ alia omnia Simplicia Problemata methodo prædictæ Geometriæ D^ni^ *Des Cartes reduci possunt, in hoc tractatu ostendere; sicut etiam, quo pacto Planorum Problematum constructio fieri possit, edocere, ita ut ea tam in campo quàm in charta locum obtineat, eademq; simul quàm paucissimis circulis descriptis absolvatur, ubique observans, ne, quod paucioribus ritè peragere licet, pluribus perficiatur.*

Quamobrem, existimans me mentem meam abundè hîc declarasse, Lectorem non diutiùs detinendo, Præfationi finem impono, ipsumq; ad operis examen ablegans, ut hæc, quæ novæ contemplationis inventa sunt, favore excipiat ac in usum suum convertat, rogo. Vale.

DE



DE

Constructione Problematum Simplicium

GEOMETRICORVM,

SEU,

Quæ solvi possunt, ducendo tantùm rectas lineas.

PETITIONES SIVE POSTVLATA.

I.



Postuletur, ut à quovis dato puncto ad quodvis datum punctum rectam lineam ducere concedatur.

II.

Et : rectam lineam inter duo data puncta terminatam, ex utraque parte in directum & continuum producere.

III.

Item : ad datum punctum in data recta indefinita rectam lineam collocare, datæ rectæ terminatæ æqualem.

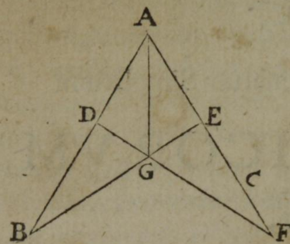
Sequuntur Problemata.

PROBLEMA I.

Problema 4 Primi Elem. Euclidis.

Datum angulum rectilineum B A C bifariam secare.

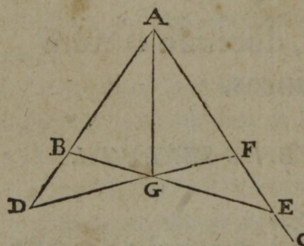
Constructio.



a p 3 Petit.

b p 1 Petit.

Sumptis in recta A B ad libitum punctis B & D ponatur[a] ad punctum A in recta A C linea A E æqualis A D, ac rursus ad punctum E in eadem recta linea E F æqualis D B; ductisque[b] rectis B E, D F, se invicem secantibus in G: Dico rectam ex A ad G ductam angulum BAC bifariam secare.



Demonstratio.

Quoniam enim ex constructione A D, A E, ut & DB, EF æquales sunt, erunt etiam A B, A F æquales. Hinc cùm △lorum A B E, A F D latera B A, A E lateribus F A, A D sint æqualia, & angulus ad A utrique communis: erunt quoque [c] reliqui anguli EBA & AEB, reliquis DFA & ADF, singuli singulis, æquales. Sunt autem [d] anguli A D F, F D B, ut & A E B, B E F in prima figura æquales duobus rectis. Hinc cum anguli A D F & A E B sint ostensi æquales, erunt etiam anguli BDF & FEB æquales. Quoniam verò in 2da figura [e] anguli ABE, E B D, ut & AFD, DFE sunt æquales duobus rectis, & quidem anguli A B E & A F D, æquales sint ostensi, æquales quoque erunt anguli DBE & EFD. Quare cum in utraque figura anguli DBG, GDB angulis EFG, GEF, singuli singulis, sint æquales, ac porrò latus D B △li BDG æquale lateri F E △li FEG, erit & latus [f] D G lateri G E æquale. Denique cum △lorum DAG, GEA latera DA, AG lateribus EA, AG, singula singulis, sint æqualia, ac 3tium latus DG etiam sit æquale ostensum 3tio lateri GE: erit

c p 4 Primi Elem. Eucl.
d p 13 Primi Elem. Eucl.
e p 13 Primi Elem. Eucl.
f p 26 Primi Elem. Eucl.

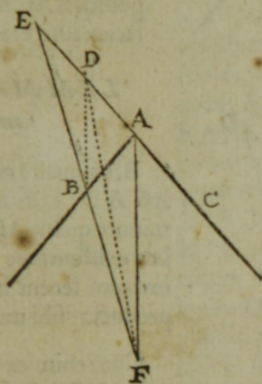
erit & [g] angulus DAG angulo GAE æqualis, adeoque angulus BAC per rectam AG bifariam divisus, hoc est, in duos æquales angulos BAG, FAG. Quod erat faciendum.

g 8 ℞ Primi Elem. Eucl.

Aliter.

Assumpto in AB utcunque B puncto, sumantur in producta CA rectæ AD, DE [h] singulæ ipsi AB æquales, ductâque [i] rectâ per puncta E & B, ponatur in ea BF æqualis BE, ac jungatur AF: dico hanc angulum BAC secare bifariam.

h ℞ 3 Petit.
i ℞ 1 & 2 Petit.
i ℞ 3 Petit.



Quoniam enim ductâ DF △[la] BDF & DBA singula ipsi BDE sunt æqualia[k], erunt & ipsa inter se æqualia. Unde cum eidem insistant basi BD, erunt quoque [l] in iisdem parallelis DB & AF; eritque angulus [m] BAF æqualis angulo ABD, & angulus FAC æqualis angulo BDA. Quocirca cum [n] anguli ABD & BDA sibi invicem sint æquales, erunt pariter anguli BAF & FAC inter se æquales, ac proinde angulus BAC rectâ AF bifariam divisus. Quod erat faciendum.

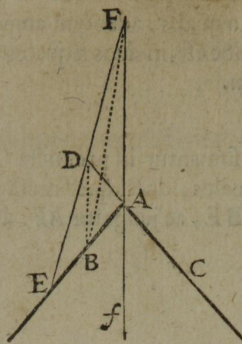
k ℞ 38 Primi Elem. Eucl.
l ℞ 39 Primi Elem. Eucl.
m ℞ 29 Primi Elem. Eucl.
n ℞ 5 Primi Elem. Eucl.

Corollarium.

Hinc patet: si AB sit æqualis AD, jungaturque DB, hanc ipsi AF, quæ angulum BAC bifariam secat, esse parallelam.

Adhuc aliter.

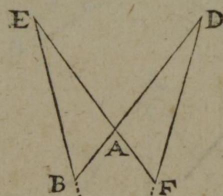
Sumptâ, ut ante, AD æquali AB, junctâque BD, sumatur BE æqualis BA, & ex E per D recta agatur indefinita. In qua si ponatur



D F æqualis D E, & ex F per H ducatur F A *f* : dico hanc angulum B A C bifariam ſecare.

Junctâ enim B F, patet, ut ſupra, △la B D F & B D A inter duas eſſe parallelas B D, A F. Sed per præcedens corollarium B D parallela eſt rectæ, angulum BAC bifariam dividenti. Quocirca recta F A *f* angulum B A C bifariam ſecabit. Quod faciendum erat.

LEMMA ad ſequentem modum.

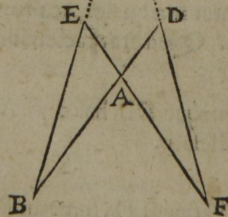


B A æquali exiſtente ipſi AF, & AE ipſi A D; at verò E A vel majore vel minore quàm AB, BAD & FAE duabus exiſtentibus rectis lineis, quæ ſe invicem ſecent in A: dico E B, F D productas ſibi mutuò occurrere.

Cum enim ex hypotheſi latera B A, A E, △li B A E ſingula æqualia ſint lateribus ſingulis F A, A D, △li F A D; nec non o angulus B A E contentus ſub B A, A E æqualis angulo F A D, ſub A D, F A contento, erit quoque p angulus B E A angulo F D A æqualis.

o p 15 Primi Elem. Eucl.

p p 4 Primi Elem. Eucl.



Si igitur E A quàm A B major eſt, erit etiam q angulus E B A ipſi oppoſitus major oppoſito E, hoc eſt, D. Hinc cum angulus r E B A unà cum angulo ſibi deinceps A B G ſit æqualis duobus rectis, erunt anguli D & ABG duobus ſimul rectis minores, ac proinde s rectæ E B, D F inferiùs productæ ſibi mu-

q p 18 Primi Elem. Eucl.

r p 13 Primi Elem. Eucl.

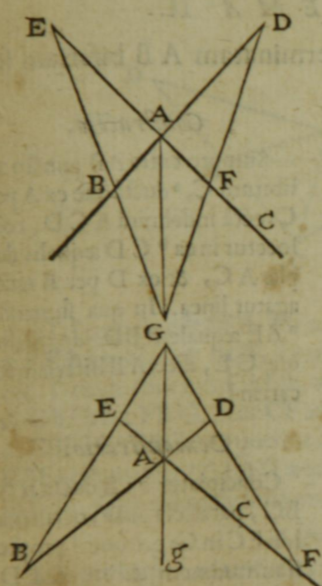
s p 11 axioma.

mutuò occurrent, ubi anguli duobus simul rectis sunt minores.

Si verò A E minor sit quàm A B, quoniam [t] tunc angulus ipsi oppositus B minor est opposito AEB, hoc est, FDA; & hic quidem cum angulo sibi deinceps A D G [u] æquetur duobus rectis: erunt anguli B & A D G simul sumpti duobus rectis minores, [x] rectæque E B F D superiùs productæ coïbunt.

t p 18 Primi Elem. Eucl.
u p 13 Primi Elem. Eucl.
x p 11 axioma.

Rursum aliter.



Sumpto in A B ad libitum puncto B, & ad A collocata in A C recta A F æquali A B, producatur C A ad E; ita ut E A sit vel major vel minor quàm A B. Deinde productâ B A, in eaque ad punctum A positâ rectâ A D æquali A E, agantur per puncta E, B, & D, F, rectæ lineæ EBG & DFG, quæ per Lemma præcedens sibi mutuò occurrant in G. Quibus peractis, si per puncta A G recta ducatur linea, secabit ipsa angulum BAC bifariam.

Cùm enim, ut in præcedenti Lemmate, angulus BEA sit æqualis angulo F D A, & ex eadem ratione angulus A B E æqualis angulo A F D, atque in prima figura anguli A B E, A B G, ut & anguli AFD, AFG [y] duobus simul æquentur rectis: sequitur, angulis ABE, AFD æqualibus existentibus, angulos ABG, AFG æquales esse. Eodem modo in 2da figura cum anguli BEA, AEG, ut & FDA, ADG duobus simul æquentur rectis, & anguli quidem BEA, FDA æquales ostensi sint: erunt quoque A E G, A D G æquales. Hinc cùm in utraque figura BA est æqualis AF, & AD æqualis A E, ideoque tota

y p 13 Primi Elem. Eucl.

BD

BD æqualis toti EF; ac anguli præterea ABG, ADG △li BDG singuli æquales sint angulis singulis AFG, AEG △li FEG: erit etiam [z] latus BG lateri GF æquale: quare cum latera BA, BG △li BAG singula æqualia sint lateribus singulis AF, FG △li AFG; & tertium latus AG utrique sit commune, erit [a] quoque angulus BAG angulo FAG æqualis: ac proinde BAC angulus in 1ma figura à recta AG bifariam divisus. Qui porrò æquales anguli, si in 2da figura singuli à duobus auferantur rectis, relinquentur etiam [b] æquales anguli BAg & FAg. Quod erat faciendum.

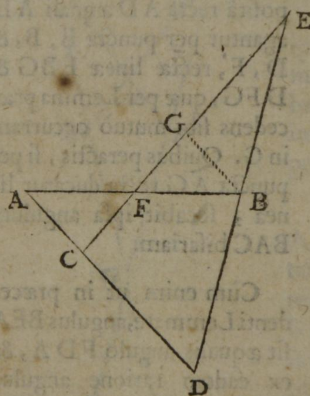
z p 26 Primi Elem. Eucl.
a p 8 Primi Elem. Eucl.
b p 13 Primi Elem. Eucl.

PROBLEMA II.

Problema 5 Primi Elem. Euclidis.

Datam rectam lineam terminatam AB bifariam secare.

Constructio.



Sumpto extra AB puncto ad libitum C, [a] ductâque ex A per C rectâ indefinitâ ACD, collocetur in ea [b] CD æqualis duplæ AC, & ex D per B recta agatur linea. In qua sumendo [c] BE æqualem BD, jungendoque CE, dico AB bifariam secari in F.

a p 1 & 2 Petit.
b 3 Petit.
c p 3 Petit.

Demonstratio.

Concipiatur ex B ducta recta BG, parallela AD, occurrens ipsi EC in G: eritque [d] propter similitudinem △lorum CED, GEB, ED ad DC, ut EB ad BG; & permutando [e] ED ad EB, ut DC ad BG. Est autem ED dupla ipsius EB. Quare & DC ipsius BG dupla erit. Hinc cùm [f] DC sit quoque ipsius AC dupla, sequitur AC & BG inter se esse æquales. Deinde, quoniam [g] propter similitudinem △lorum ACF & FBG, AC est ad AF, ut GB ad BF, & prima quidem AC tertiæ GB ostensa sit æqualis: erit etiam [h] 2da AF quartæ FB æqualis: Et idcirco AB in F bifariam secta. Quod erat faciendum.

d p 4 Primi Elem. Eucl.
e p 16 Quinti Elem. Eucl.
f Ex constructione.
g p 4 Sexti Elem. Eucl.
h p 14 Quinti Elem. Eucl.

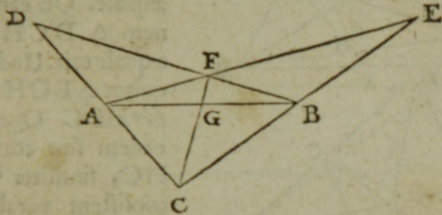
Ali-

Aliter.

Assumpto, ut ante, extra A B puncto aliquo C, ductisque ex eo [i] per A & B rectis C A D, C B E, sumatur [k] A D æqualis A C, & B E æqualis B C. Tum [l] junctis D B, A E, sese secantibus in F; dico, si agatur FC, hanc secare AB bifariam in G.

Cum enim △^{la} B D C & C E A angulum ad C communem habeant, lateraque circa hunc sint reciprocè proportionalia, hoc est, [m] ut AC sit ad CB, sicut DC ad CE: erit [n] △BDC æquale △^{lo} CEA. A quibus singulis, si auferatur commune trapezium C A F B, relinquetur

i p 1 & 2 Petit.
k p 3 Petit.
l p 1 Petit.
m p 15 Quinti Elem. Eucl.
n p 15 Sexti Elem. Eucl.



△ ADF æquale △^{lo} FEB. Est autem [o] △ ADF æquale △^{lo} FAC, & △ F E B æquale △^{lo} BCF. Quare etiam △ F A C △^{lo} C B F æquale erit. Deinde cum [p] △ CAF sit ad △ FAG, sicut CF ad FG: itemque △ CBF ad △ FBG, sicut CF ad FG: erit △ CAF [q] ad FAG, sicut △ CBF ad △ FBG. Quocirca cum △ CAF æquale sit ostensum △^{lo} CBF: erit pariter [r] △ FAG æquale △^{lo} FBG, ac proinde [s] AG æqualis G B. Quod erat faciendum.

o p 38 Primi Elem. Eucl.
p p 1 Sexti Elem. Eucl.
q p 11 Quinti Elem. Eucl.
r p 14 Quinti Elem. Eucl.

Adhuc aliter.

Sumpto rursus, ut ante, extra AB puncto C, & [t] ex B per C ductâ rectâ indefinitâ, sumatur [u] in ea C D æqualis C B, jungaturque A D. Deinde [x] in D A assumptâ D E æquali D C, ut & EF æquali C B, agantur BE, FC, secantes se invicem in G, tum DGH secans FB in H.

Si igitur F punctum cadit in punctum A, incidet etiam linea F B in lineam A B, eritque ipsa in H bifariam secta; nam cum D H per Problema primum angulum FDB secet in duos æquales angulos, lateraque FD, DH △^{li} FDH lateribus BD, D H △^{li} B D H circa illos sint æqualia: erit [z] & tertium latus F H tertio lateri H B æquale.

s p 1 Sexti Elem. Eucl.
t p 1 & 2 Petit.
u p 3 Petit.
x p 3 Petit.
z p 4 Primi Elem. Eucl.

Sed puncto F cadente supra aut infra A, dico, si per puncta C & H agatur porrò CH, rectam AB in I ab ea bifariam secari.

Ductis enim rectis AC, DI, cum FH sit æqualis HB, erit & [a] △ FCH △lo HCB æquale. Ob eandem rationem △ DCH △lo HCB æquale erit. Unde porrò sequitur △ FCH æquale esse △lo HDC. Quæ cum super eadem sint constituta basi HC, similiter [b] inter duas consistent parallelas AD, HC. E quibus exinde liquet [c] △ ADI esse △lo ADC æquale. Est autem propter æqualia △la ADC, ACB [d] triangulum ADC dimidium totius ADB. Quapropter etiam △ ADI totius ADB dimidium erit, ideóque æquale △lo IDB. Hæc igitur cum sint ejusdem altitudinis, consistent etiam [e] super æqualibus basibus AI, IB. Quod erat faciendum.

a p 38 Primi Elem. Eucl.

b p 39 Primi Elem. Eucl.

c p 37 Primi Elem. Eucl.

d p 38 Primi Elem. Eucl.

e p 1 Sexti Elem. Eucl.

PRO-

PROBLEMA III.

Per datum punctum C rectam lineam ducere, datæ rectæ AB parallelam. *Problema 10 Primi Elem. Euclidis.*

Constructio.

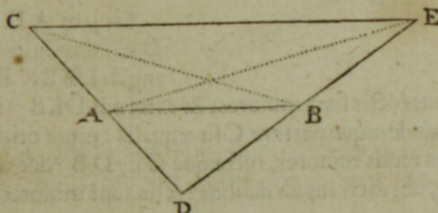
Ductâ ex C per A [a] rectâ indefinitâ, sumatur in ea [b] AD æqualis AC & [c] ex D per B agatur DBE. In qua si [d] ponatur BE æqualis BD jungaturque CE, dico hanc ipsi AB fore parallelam.

a p 1 & 2 Petit. *b p 3 Petit.* *c p 1 & 2 Petit* *d p 3 Petit.*

Demonstratio.

Quoniam enim ex constructione DA est æqualis AC, & DB æqualis BE, ideoque DA ad AC, ut DB ad BE: sequitur [e] CE ipsi AB esse parallelam.

e p 2 Sexti Elem. Eucl.



Vel etiam hoc modo.

Junctis CB, AE, patet, ex demonstratione secundi modi præcedentis Problematis, △[la] BCD & DAC esse æqualia. A quibus singulis si auferatur commune △ DAB, relinquetur △ CAB æquale △[lo] BAE. Quæ cum ex eadem parte uni basi insistant AB, etiam [f] inter duas constituentur parallelas CE, AB.

f p 39 Primi Elem. Eucl.

CAB autem ipsi BAE esse æquale, patet quoque ex eo, quòd singula [g] sint æqualia ipsi DAB, ac proinde etiam inter se. Parallela igitur est CE ipsi AB. Id quod facere oportebat.

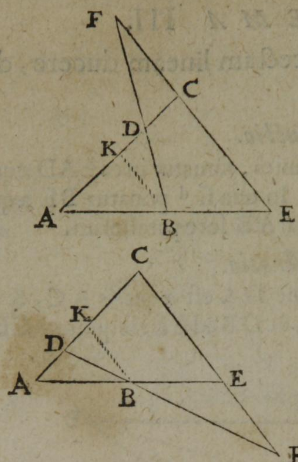
g p 38 Primi Elem. Eucl.

I LEMMA, *ad sequentem modum.*

Existente AB æquali BE, sed AD majore aut minore quàm DC: dico CE, BD productas concurrere.

Esto AK æqualis KC, jungaturque KB, quæ ex præcedenti de-

monſtratione ipſi CE erit æquidiſtans. Id quod arguit, BD, CE parallelas non eſſe, ſed productas concurrere.



h p 17 Primi Elem. Eucl.

i p 29 Primi Elem. Eucl.
k p 15 Primi Elem. Eucl.
l p 11 axioma.

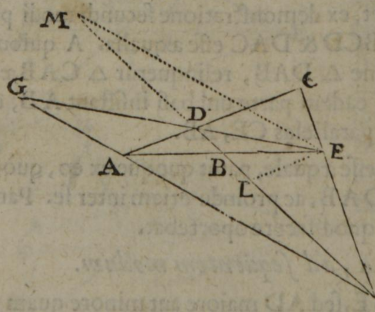
Quoniam igitur [h] bini anguli DKB, BDK trianguli KDB duobus rectis ſunt minores, & angulus quidem DKB [i] alterno DCF æqualis ſit: at verò BDK [k] æqualis oppoſito CDF: erunt pariter bini DCF & CDF duobus rectis minores, rectæque EC, BD [l] ſurſum productæ concurrent.

m p 17 Primi Elem. Eucl.
n p 29 Primi Elem. Eucl.
o p 11 axioma.

Sit jam AD minor quàm DC, quia igitur rurſus [m] bini anguli DKB & BDK trianguli KDB duobus rectis ſunt minores, & externus DKB [n] interno & oppoſito, ad eandemque partem C ſit æqualis: erunt etiam bini BDK & C duobus rectis minores, rectæque CE, DB [o] deorſum productæ concurrent, ubi dicti anguli duobus rectis ſunt minores.

II LEMMA, *ad ſequentem modum.*

Sit rurſus AB æqualis BE, ſed AD minor quàm DC, & producantur CE, DB, donec coëant in F: dico ſimiliter DE & AF productas concurrere.



p p 16 Primi Elem. Eucl.

Cum enim [p] externus angulus AEF △[li] ACE major ſit interno & oppoſito CAE, patet, ſi ex eo abſcindatur angulus BEL æqualis an-

angulo C A E, lineam E L secare B F in L, facientem [q] B L æqualem B D.

[q] p 15 & 26 Primi Elem. Euclidis.

Fiat jam B M æqualis B F, jungaturque M E. Quoniam igitur latera M B, B E △li M B E lateribus F B, B A △li A B F singula singulis sunt æqualia, ut & [r] anguli E B M & A B F (qui sub æqualibus lateribus continentur): erit & [s] angulus B E M angulo B A F æqualis. Deinde quia B L minor est quàm B F, siquidem punctum L cadit inter puncta B & F, erit etiam B D minor quàm B M: ac proinde angulus B E D minor angulo B E M vel B A F. Est autem angulus F A B, unà cum angulo B A G [t] æqualis duobus rectis. Quare anguli B E D & B A G duobus rectis simul minores erunt, lineæque D E, F A sursum productæ sibi mutuò coïncident, ubi hi duo anguli duobus rectis sunt minores. Quod erat propositum.

[r] p 15 Primi Elem. Eucl.
[s] p 4 Primi Elem. Eucl.
[t] p 13 Primi Elem. Eucl.
[u] p 11 axioma.

Sequitur alius modus.

Aliter.

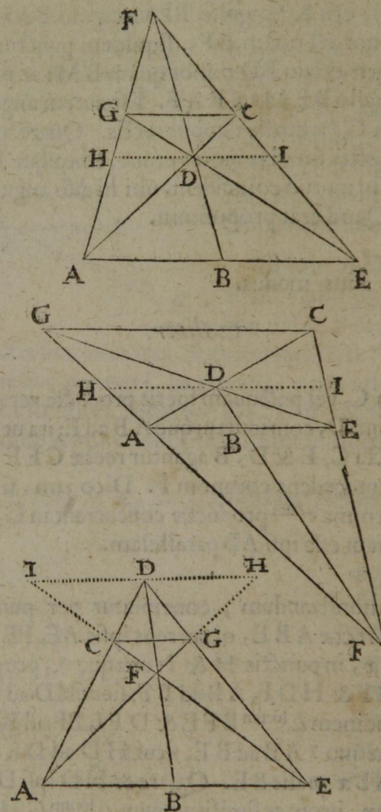
Sumatur in A C, vel postquam fuerit producta versùs C, punctum aliquod ad libitum D, continueturque A B ad E; ita ut B E sit æqualis B A, & per puncta C, E & D, B agantur rectæ C E F & D B F, quæ per Lemma I antecedens coëant in F. Dico jam, si ducantur A F, D E, quæ per Lemma 2dum productæ concurrant in G, rectam à puncto C ad G ductam esse ipsi A B parallelam.

Ad quod demonstrandum, concipiatur per punctum D recta H D I parallela rectæ A B E, occurrens ipsis A F, F E, vel postquam fuerint productæ, in punctis H & I: eritque [x], propter similitudinem △lorum A B F & H D F, A B ad B F, sicut H D ad D F: ac rursus, propter similitudinem △lorum B F E & D F I, B F ad B E, sicut D F ad D I, hoc est, ex æquo [y] A B ad B E, sicut H D ad D I. Est autem ex constructione A B æqualis B E. Quare & H D ipsi D I erit æqualis. Deinde quoniam, propter similitudinem △lorum G H D & G A E, [z] H D est ad D G, sicut A E ad E G, hoc est, permutando [a] H D ad A E, sicut D G ad E G: itemque, propter similitudinem △lorum C D I & C A E, I D ad D C, sicut E A ad A C, hoc est, permutando D I ad A E, sicut D C ad C A: patet, cum H D, D I sint æquales, [b] D G esse ad

[x] p 4 Sexti Elem. Eucl.
[y] p 22 Quinti Elem.
[z] p 4 Sexti Elem. Eucl.
[a] p 16 Quinti Elem. Eucl.
[b] p 11 Quinti Elem. Eucl.

 GE,

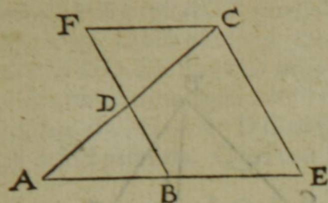
c p. 1 Sexti Elem. Eucl. GE, sicut DC ad CA. Sed ut DG ad GE, ita est [c] △CDG ad △GCE: & DC ad CA, ita idem △CDG ad △GCA. Quare [d] △GCE △[lo] GCA æquale erit. Quæ cum ab eadem parte uni insi-
d p. 9 Quinti Elem. Eucl.



e p. 39 Primi Elem. Eucl. stant basi GC, necessariò [e] consistent etiam inter duas parallelas. Parallela igitur est GC ipsi AB. Quod erat faciendum.

NOTA.

NOTA.

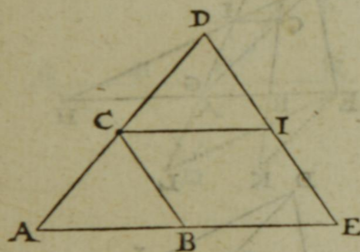


Si contingit A D esse æqualem D C, quoniam tunc, ex demonstratione prioris modi, BD ipsi EC est parallela, atque idcirco productæ nunquam concurrunt: sumenda erit tantummodo D F æqualis D B, jungendaque F C, eritque ipsa ipsi A B parallela.

Cum enim △lorum ADB, FDC anguli qui ad D [f] sint æquales, & circa eos latera AD, DB æqualia lateribus DC, DF, singula singulis: erit quoque [g] angulus A æqualis angulo A C F; ac proinde [h] F C parallela A B. Quod erat faciendum.

f p 15 Primi Elem. Eucl.
g p 4 Primi Elem. Eucl.
h p 27 Primi Elem. Eucl.

Aliter.



Ductâ ex A per C rectâ indefinitâ, in eâque collocatâ C D æquali C A, producatur A B ad E, ita ut B E sit æqualis B A. Tum junctis B C, E D, sumatur in E D recta E I æqualis BC, agaturque CI: dico hanc ipsi AB esse parallelam.

Quoniam enim, ut ante, E D parallela est ipsi B C, atque in illa E I sumpta æqualis B C: erit quoque [i] CI ipsi A B E parallela. Quod erat faciendum.

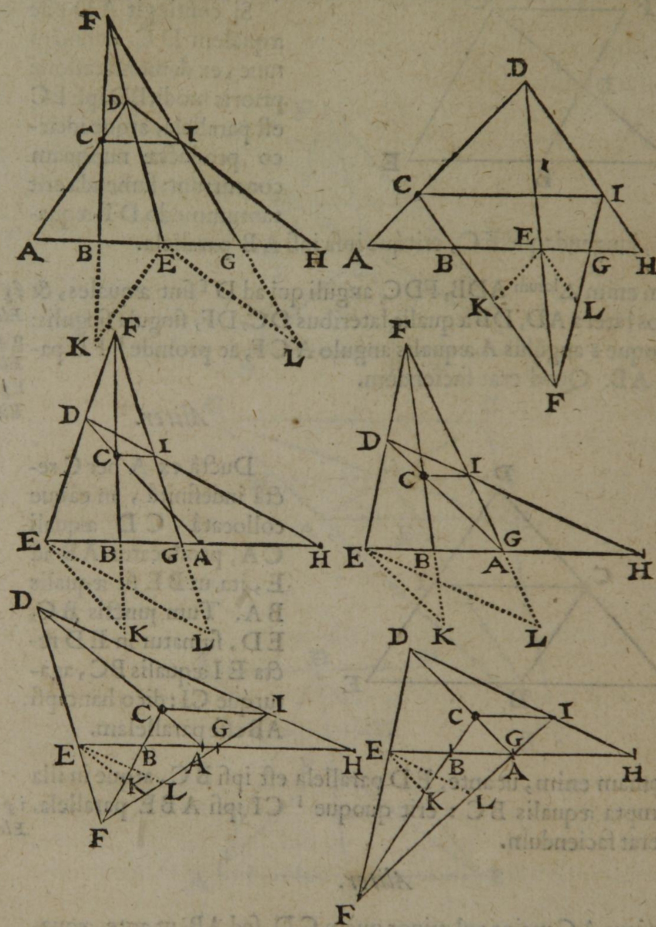
i p 33 Primi Elem. Eucl.

Aliter.

Esto jam A C major vel minor quàm C D, sed AB, ut ante, æqualis B E: lineæque B C, ED productæ, per 1mum Lemma, conveniant in F. Deinde assumpto in A B, ipsâve productâ, ad libitum puncto G, ponatur GH æqualis GE, ac per puncta F & G recta linea agatur,

secans

ſecans rectam D & H connectentem in I : eritque juncta C I ipſi A B H parallela.



k p 15 Primi Elem. Eucl. Ad quod demonſtrandum, fiant BK, GL æquales BC, GI, junganturque E K, EL. Hinc cum △lorum K B E, A B C k tam anguli qui ad B, quam

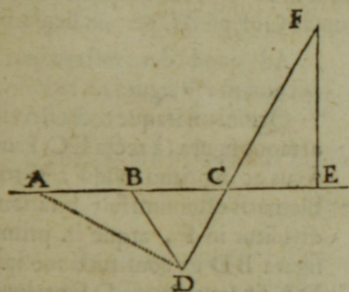
B, quàm, quæ ipsos comprehendunt, latera sibi invicem sint æqualia: erit quoque KE [l] ipsi AC æqualis, ut & angulus BEK angulo A: ac proinde [m] KE ipsi ACD parallela. Eâdem ratione EL æqualis erit IH, ac ipsi DIH parallela. Deinde cum, propter similitudinem △lorum FCD, FKE, [n] FD sit ad FE, ut DC ad EK, hoc est, CA; & rursus, ob similitudinem △lorum FDI, FEL, FD ad FE, ut DI ad EL, hoc est, IH: erit [o] DC ad CA, sicut DI ad IH: ideoque [p] CI ipsi ABH parallela. Quod erat faciendum.

[l] p 4 Primi Elem. Eucl.
[m] p 27 Primi Elem. Eucl.
[n] p corol. 4 tæ Sexti Elem. Eucl.
[o] p 11 Quinti Elem. Eucl.
[p] p 2 Sexti Elem. Eucl.

PROBLEMA IV.

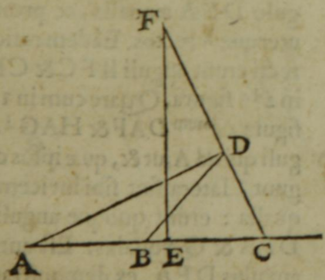
Super data recta linea indefinita perpendicularem constituere.

Constructio.



Concipiatur data recta linea transire per puncta A & B, ut igitur super ea constituatur perpendicularis, fiat BC æqualis AB, & ex B utcunque ducatur BD, hoc est, faciens cum AC quoscunque libuerit angulos. Deinde in illa assumptâ [a] BD æquali BA vel BC, per puncta C & D agatur [b] recta linea indefinita. In qua si ponatur CF æqualis CA, atque in recta ABC sumatur CE æqualis CD, dico junctam EF ipsi AB fore perpendicularem.

[a] p 3 Petit.
[b] p 1 & 2 Petit.



Demonstratio.

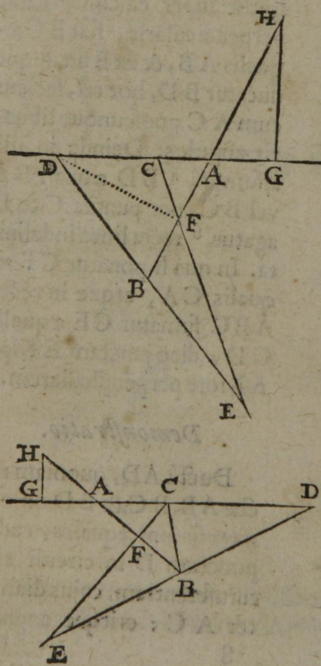
Ductâ AD, quoniam rectæ AB, BC, & BD omnes inter se sunt æquales, cadet punctum D in circuli circumferentiam, cujus diameter AC: eritque angulus

e p 31 Tertii Elem. Eucl.
d p 15 Primi Elem. Eucl.
e Ex constructione.
f p 4 Primi Elem. Eucl.

[c] ADC ob id rectus. Dein cum △lorum ADC & CFE [d] anguli ACD & ECF, ut & latera AC, CD lateribus FC, CE [e] utrumque utrique sint æqualia: erunt quoque [f] ADC & E, à lateribus æqualibus subtensi, æquales. Est autem angulus ADC rectus. Quare & angulus E rectus erit, adeoque EF perpendicularis ad AB. Quod erat faciendum.

Aliter.

Fingatur data recta transire per puncta A & C; ad hanc igitur ut ducamus perpendicularem, sumatur CD æqualis duplæ CA, & ex D, ut in 1ma figura, ad libitum agatur DBE, faciendo in illa DB æqualem DA; aut ex C, ut in 2da figura, ducatur utcunque CB, in eáque sumendo CB æqualem CA, agatur DBE. Deinde positâ EB æquali BD, ducantur EC & BAH sese secantes in F. Si ergo, ut in 1ma fig., AH ponatur æqualis AD; vel, ut in 2da fig., AH æqualis AC, ac deinde AG fiat æqualis AF, erit juncta GH ipsi AC perpendicularis.



g p 8 Primi Elem. Eucl.
h p 8 def. Primi Elem. Eucl.
i p 15 Primi Elem. Eucl.
k p 4 Primi Elem. Eucl.

Ad quod demonstrandum, ducatur in 1mâ figura recta DF.

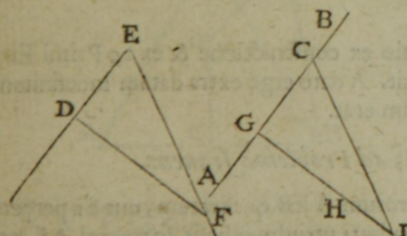
Quoniam itaque recta BA, in utraque figura, à recta EC, haud secus ac in primo modo 2di Problematis ostensum fuit, bifariam dividitur in F, atque in prima figura BD ex constructione ipsi DA sit æqualis, & DF utrique △lo BDF & FDA communis: erit quoque [g] angulus BFD angulo DFA æqualis, ac proinde uterque [h] rectus. Eâdem ratione recti erunt anguli BFC & CFA in 2da figura. Quare cum in 1ma figura △lorum DAF & HAG [i] anguli qui ad A, ut &, quæ ipsos cingunt, latera sint sibi invicem æqualia: erunt quoque anguli [k] DFA & G æquales. Est autem angulus DFA, ex demonstratis, rectus. Quapropter & angulus G re-

G rectus erit, ac idcirco G H perpendicularis ad A C. Eodem argumento concludes, angulum G in 2da figura recto angulo C F A esse æqualem; ideoque G H, ut ante, ipsi A C perpendicularem. Quod erat faciendum.

PROBLEMA V.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ A B, à puncto in ea vel extra ipsam dato C, rectam lineam ducere C F, quæ ad datam AB sit perpendicularis. *Problema VI & VII Primi Elem. Euclidis.*

Constructio.



Ductâ, ut in præcedenti Problemate, super A B utcunque perpendiculari D E, agatur ex C per tertium Problema eidem parallela C F: eritque hæc ipsa quæsita.

Cujus demonstratio ex 29 Primi Elementorum Euclidis est manifesta.

PROBLEMA VI.

Ad datam lineam rectam A B, datumque in ea punctum C, angulum rectilineum constituere A C I, dato angulo rectilineo E æqualem. *Problema IX Primi Elem. Euclidis.*

Constructio.

Constitutâ super D E, per 4tum Problema, perpendiculari D F, occurrente ipsi E F in F, ponatur ad punctum C in A B a recta C G ipsi E D æqualis, & ex G excitetur super A B, per antecedens Problema, perpendicularis G H: dico, si in ea sumatur

a p 3 Petit.

b p 3 Petit. matur [b] G I æqualis D F, jungaturque C I, angulum A C I angulo E esse æqualem.

Demonstratio.

c Ex constructione. Quoniam enim △lorum D E F, G C I anguli qui ad D & G [c] recti sunt, ac idcirco æquales; & latera E D, D F lateribus C G, G I, quæ circa æquales sunt angulos, singula singulis sunt æqualia: erunt etiam anguli G C I & E [d] æquales. Quod facere oportebat.

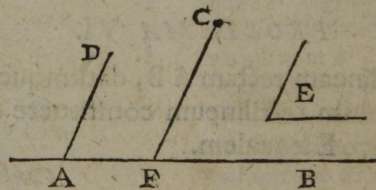
d p 4 Primi Elem. Eucl.

PROBLEMA VII.

Datâ rectâ lineâ indefinitâ A B, à puncto extra ipsam dato C rectam lineam ducere C F, quæ cum data A B angulum rectilineum faciat C F B, dato angulo rectilineo E æqualem.

Constructio.

Ad punctum quodcunque A in A B constituto, juxta præcedens Problema, angulo D A B æquali dato E, ductâque ex C per 3tium Problema rectâ C F parallelâ rectæ A D: dico angulum C F B angulo E

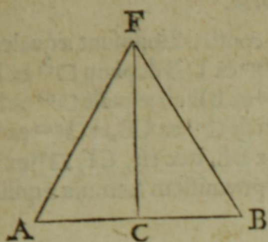


esse æqualem. Demonstratio ex constructione & ex 29 Primi Elementorum Euclidis elucescit. A dato ergo extra datam indefinitam puncto &c. Quod faciendum erat.

LEMMA, ad Problema sequens.

Triangulorum æquilaterorum A F B quadratum, quod à perpendiculari F C describitur, quadrati utriusque basis segmenti A C vel C B triplum est.

Quod



Quod enim AC & CB sint æqualia, hinc patet, quòd $\square^{ta}$ ex AF & FB æqualia sint; & $\square^{tum}$ quidem ex AF æquivaleat [a] duobus ex AC & CF, & $\square^{tum}$ ex FB duobus ex BC & CF. Unde commune utrinque auferendo $\square^{tum}$ ex CF, relinquitur $\square^{tum}$ ex AC æquale ei quod ex CB; ac proinde AC æquale CB. Jam verò $\square^{tum}$ ex AB vel AF est $\square^{ti}$ ex AC quadruplum. Quocirca qualium partium $\square^{tum}$ ex AC est 1; talium $\square^{tum}$ ex AF erit 4; & $\square^{tum}$ ex CF partium 3, hoc est, $\square^{tum}$ ex CF triplum erit $\square^{ti}$ AC vel CB. Quod erat propositum. Ubi etiam facile est ostendere, si in $\triangle^{lo}$ AFB quadratum perpendicularis CF quadrati utriusque basis segmenti AC vel CB est triplum, $\triangle^{lum}$ illud esse æquilaterum. Etenim $\square^{to}$ ex AC vel CB valente 1, cum sic $\square^{tum}$ ex CF valeat 3, ideoque [b] $\square^{tum}$ ex AF vel FB 4; atque tantundem etiam valeat $\square^{tum}$ ex AB, erunt tria $\square^{ta}$ ex AF, FB, & AB inter se æqualia, adeoque etiam eorum latera AF, FB, & AB, ac eapropter $\triangle$ AFB æquilaterum. Ut proponebatur.

a ꝑ 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2dæ partis primi tractatus.

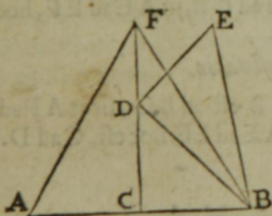
b ꝑ 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2dæ partis tractat primi.

PROBLEMA VIII.

Super data recta linea terminata AB triangulum æquilaterum constituere.

Problema 1 Primi Elem. Euclidis.

Constructio.



Secetur AB per 2^{dum} Problema bifariam in C, & ex C super AB per 5^{tum} Problema erigatur perpendicularis CF, deinde sumendo in ea [a] CD æqualem AC vel CB, ducatur DB, & super hac constituatur per 5^{tum} Problema ad punctum D perpendicularis DE æqualis DC, jungaturque EB. Dico si sumatur CF æqualis BE, aganturque AF, FB, $\triangle^{lum}$ AFB esse æquilaterum.

a ꝑ 3 Petit.

Demonſtratio.

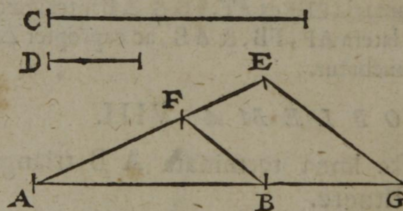
Quoniam enim rectæ C D, C B ex conſtructione ſunt æquales, & C D ad A B perpendicularis, erit [b] □tum ex D B duplum □ti ex D C vel C B. Eodem modo, quoniam □tum ex BE eſt æquale □tis ex BD, DE, atque □tum quidem ex BD duplum ſit □ti ex CB, at □tum ex D E æquale □to ex D C vel CB, erit □tum ex BE, hoc eſt, CF, □ti ex AC vel CB triplum: ac idcirco △ AFB per præmiſſum Lemma æquilaterum. Quod erat faciendum.

b p 47 pr. lib. 1. Eucl: vel per 4 pr. tractatus primi.

PROBLEMA IX.

Datam rectam lineam terminatam A B producere ad G, ita ut tota AG ad productam G B datam habeat rationem C ad D.

Conſtructio.



a p 3 Petit.

Ductâ ex A rectâ A E, faciente cum A B angulum quemcunque, ponatur [a] in ea A E æqualis C, ut & EF æqualis D; junctâque FB: dico, ſi eidem agatur parallela EG, occurrens productæ A B in G, A G eſſe ad G B, ut A E ad E F, hoc eſt, C ad D.

Demonſtratio.

Per 2dam Sexti Elem. Eucl. A B eſt ad B G, ſicut A F ad F E; & componendo [b] A G ad G B ſicut A E ad EF, hoc eſt, C ad D. Ut faciendum proponebatur.

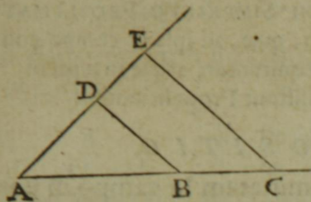
b p 9 Quinti Elem. Eucl.

PROBLEMA X.

Problema IV Sexti Elem. Euclidis.

Tribus datis rectis lineis terminatis A B, B C, & A D quartam proportionalem adinvenire D E: *hoc eſt, ut A B ſit ad B C, ſicut A D ad D E.*

Pro-



Problema hoc juxta modum Euclidis construi potest, ponendo nempe duas priores AB, BC in aliqua recta A C, & tertiam AD in quacunque alia AE, quæ cum A C quemvis faciat angulum CAE. Si enim ducatur BD, tum ipsi parallela CE: erit D E quarta quæsita.

Ubi hoc solùm notandum, ut omnia rectis lineis perficiantur, quòd CE duci debeat ipsi BD parallela juxta 3^{tium} nostrum Problema, non autem juxta 10^{mum} Problema lib. 1. Elem. Euclidis. Quemadmodum etiam non aliter dissentimus ab Euclide in 3^{tio} Problemate Sexti Elem. ubi docet: *Ad datas duas rectas lineas terminatas tertiam proportionalem invenire*; ut & in primo: *Ad imperatam aut imperatas partes è data recta terminata auferendas*; sicut etiam in secundo. *Ad datam rectam terminatam datâ ratione similitérve secandam, ut data altera terminata secta fuerit.*

Probl. III Sexti Elem. Eucl.

Probl. I Sexti Elem. Eucl.

Probl. II Sexti Elem. Eucl.

Eodem modo per solas rectas lineas solvere licet 11, 12, 13 & 14 Problemata lib. 1^{mi}; 1^{mum} lib. 2^{di}; 1, 4 & 6^{tum} lib. 3^{tii}; 2, 3, 6, 7, & 15um lib. 4^{ti}; & 6^{tum} & 10^{mum} lib. 6^{ti} Elem. Euclidis. Id quod patet, considerando illa, vel per unum, vel per plura jam soluta Problemata, semper esse solubilia, & quòd in his ipsis construendis sit sequenda tantùm methodus jam ostensa.

Quare cum omnia Geometrica Problemata simplicia semper aliqua horum existant, vel ad hæc mediante æquatione reduci possint, de solutione illorum satis superque dictum existimamus.

SVP-

SUPPLEMENTUM CONSTRUCTIONIS SIMPLICIUM PROBLEMATUM, continens expoſitionem eorum, quæ, ad ipſa in campo conſtruenda, tanquam obvia requiruntur; atque in ſeptem fermè ſequentibus conſiſtunt Propoſitionibus.

I PROPOSITIO.

Datam rectam lineam terminatam in campo in continuum & directum ab utraque parte producere.

Recta linea in campo communiter dari ſolet terminata per ſola ejus extrema puncta, quæ in praxi Geodætica deſignantur baculis rectis ſeu paxillis ad plumbum in terram defixis, inter quæ puncta tum porrò recta illa linea mente ducta concipitur. Quæ quidem lineæ aliàs, cùm limites agrorum, foſſas, propugnacula, valla, ſimiliáve deſignare debent, indicari ſolent per tenues ſulcos, terræ leviter impreſſos, quos Belgæ vulgariter *kielſpitten* appellant.

C A B D

Poſito itaque datam rectam A B in campo deſignari per duos baculos rectos in A & B perpendiculariter in terram defixos: ut ipſa hinc inde in continuum producatur, prodire oportet extra eam ad C & D, ita ut, exiſtente in C, ſi dirigatur viſus versùs baculos in A & B, hi ipſi inter ſe congruere videantur, hoc eſt, in eodem viſus radio appareant; at verò exiſtente in D, convertendo oculos ad A & B, ut eidem rurſus in eodem radio viſuali ſeu ſibi ipſis reſpondere conſpiciantur. Quod ſi fieri ſupponatur & baculi duo ad plumbum in C & D defigantur, linea A B ad utramque partem erit producta ad C & D. Eodem modo, progrediendo ſemper ulteriùs atque ulteriùs, licet AB ad utramque partem in continuum & directum in campo producere.

E quibus etiam fit manifeſtum, in campo rectam dari poſitione ſeu utrinque indefinitam, datis tantummodo utcunque duobus punctis, per quæ recta illa incedere ſeu tendere intelligatur, ſupplendo cogitatione ipſam hinc inde indefinitè prædicto modo in directum eſſe protenſam.

II PRO-

II *PROPOSITIO.*

A dato puncto A ad datum punctum B rectam lineam in campo ducere.

C A D B

Problema hoc per præcedens absolvitur. Etenim si primò linea A B, quam inter data puncta A & B concipimus, ad unam aut alteram partem producamus, ut hîc ad C; tumque ab A ad B cum baculo aliquo D progrediamur, ita ut respiciendo baculi in A & C continuè sibi ipsis respondere videantur: ducta intelligetur ab A ad B recta linea; hoc est, translatio baculi D ab uno loco A ad alterum B, lineæ quæsitæ ductum designabit.

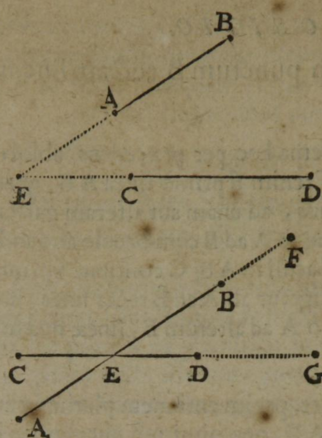
Quod & alio modo præstare licet, per inventionem plurium punctorum, non producendo rectam A B, ope nimirum alicujus socii. Etenim manente uno penes alterutrum baculorum A vel B, puta A, injunget alteri, ut alibi locorum inter A & B in eodem radio visuali baculum rectum erigat D, hoc est, ut baculus D in A congruere videatur cum baculo B, seu D impediat quo minùs B ex A conspici possit. Quod ut fiat, is, qui ad A est, manu vel pileo signum dabit ad dextram vel sinistram (prout ad hanc vel illam partem baculus est constituendus) donec illum in eodem radio, neque ampliùs deflectentem, deprehenderit. Dein signum manu vel pileo dabit deorsum, significans baculum D in terram perpendiculariter esse figendum. De istis enim socios ante inter se convenire oportet.

Eodem modo innumera puncta inter A & B in campo reperiri possunt. Atque hâc ratione licet prodeundo ab A ad B cum baculo recto D ab uno dato puncto A ad alterum datum punctum B rectam lineam in campo ducere.

III *PROPOSITIO.*

Datis in campo duabus rectis terminatis non parallelis, ipsarum concursus seu intersectionis punctum invenire.

Esto data inter A & B puncta recta A B, non parallela rectæ C D, datæ inter puncta C & D.



Si ergo AB, CD ad se invicem inclinent ad partes A & C, & quæratur punctum E, in quo sibi mutuò productæ occurrant, producenda est AB, juxta 1mam Prop., versùs A, hoc est, exire oportet ab A in directum ipsius AB cum baculo recto usque dum perventum sit in directum ipsius CD, hoc est, eò loci, quò baculi in C, & D sibi mutuò respondere videantur. Quod si fieri contingat in E, ibique perpendiculariter baculus humi defigatur, is quæsitum in campo concursus punctum ostendet.

Sed AB secante CD, oportebit, productis primùm AB, CD, juxta 1mam Prop., ad unam aut alteram partem ad F & G, invenire, ut jam dictum est, rectarum BF, DG punctum concursus E. Erecto enim in E baculo recto monstrabit is similiter punctum, in quo rectæ AB, CD in campo sese mutuò intersecant. Ut requirebatur.

Quemadmodum autem aliquis producendo utramque rectam AB, CD ad F & G, sine alterius ope, punctum intersectionis E investigare potest, ita quoque licet continuando tantùm alterutram, puta AB, ad F, idem auxilio secundi invenire, hoc modo:

Etenim exeunte uno cum baculo aliquo à B versùs A in directum ipsius BF, donec ab altero ad D, sicut præcedenti Propositione fuit explicatum, sit certior factus se pervenisse in rectam DC, quod contingere suppono in E: ostendet rursus baculus in E erectus perpendicularis punctum intersectionis quæsitum.

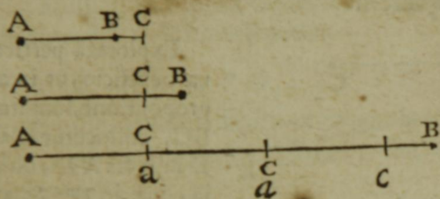
Quod idem etiam neutram producendo rectam obtineri potest, si tres sint. Si enim consistente primo ad A, secundus exeat cum baculo ab A versùs B in recta AB, donec pervenerit in rectam CD, quod ex tertio, qui consistit ad D, uti supra dictum fuit, rescire potest, ibique baculum erigat perpendicularem; inventum erit rursus in campo quæsitum punctum intersectionis E.

IV PRO-

IV PROPOSITIO.

De modo capiendi longitudinem datæ rectæ lineæ terminatæ in campo.

Esto in campo data recta intercepta inter puncta A & B, cujus longitudinem ut exploremus, eligendus erit baculus perlongus seu pertica AC; aut ejus loco catena ferrea vel cuprea longitudinis cujuslibet, quæ vice funis vel restis, quæ expansioni aut contractioni nimis



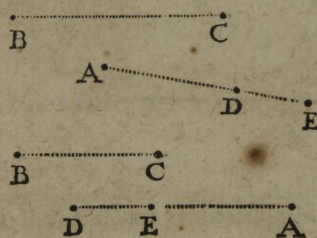
est obnoxia, fungatur. Hæc enim si applicetur ad puncta A & B, ita ut una ejus extremitas conveniat cum medio unius baculi A, indicabit medietas alterius baculi B in ea longitudinem datæ rectæ A B. Quòd si verò pertica hæc aut catena A C minor fuerit rectâ A B, oportebit admotâ illâ cum una sua extremitate ad punctum A eandem cum altera sua extremitate extendere versùs B, totiesque in recta A B huc progrediendo deferre, donec cum hac ipsa perventum fuerit ad B vel C, ubi reliqua longitudo CB brevior sit reperta quàm AC. In quem finem si alter cum extremo catenæ aut perticæ A C præcedens singulis vicibus bacillum humi defigat, qui ab insequente altero colligatur, denotabit A C toties sumpta, quoties bacillus fuerit collectus, unà cum parte reliqua B C, totius rectæ A B longitudinem quæsitam.

Ubi notandum, in delatione ipsius A C in recta AB, advertendum esse, quod in 2ᵈᵃ Propositione fuit expositum: item quòd quis solus ope perticæ datæ rectæ longitudinem in campo investigare queat, ubi, si catenâ id præstare velit, socium habere oportet. Denique, ad dictam longitudinem A B illic capiendam, haudquaquam opùs esse,

ut attendamus, quot virgæ, pedes, pollices, aliævè partes contineantur in AC, sive etiam CB, cum nihil referat ipsam AC per hujus aut illius mensuræ numeros exprimere, verùm sufficerit datæ AB magnitudinem, catenæ aut perticæ beneficio, non aliter quàm in charta rectæ alicujus magnitudo, seu inter data puncta intercapedo, circino, qualis reipsa existit, accipi solet, comprehendisse atque indagasse.

V PROPOSITIO.

Ad datum punctum A in data recta indefinita AD rectam lineam in campo collocare AE, datæ rectæ terminatæ BC æqualem.



Exploratâ perticæ aut catenæ beneficio, ut in antecedenti propositione, longitudine rectæ BC, collocetur ea ab A versùs D in recta AD, observando ad id, quæ in 1ma & 2da Propbus sunt exposita. Hæc igitur si pertingere supponatur usque ad E, erit AE æqualis BC.

Etenim, quoniam, quæ eidem æqualia sunt, etiam inter se æqualia existunt, illa autem æqualia dicantur, quæ in omnibus sibi mutuò congruunt: sequitur, si BC & AE singulæ longitudini æquales sunt, quæ perticâ aut catenâ comprehenditur, esse quoque AE ipsi BC æqualem. Ut requirebatur.

His adjunge binas sequentes Propositiones, ejusdem naturæ cum præcedente.

VI PROPOSITIO.

Datis in campo duabus rectis terminatis AB & C, alterutri AB rectam lineam in directum adjungere BD, æqualem alteri C.

Quo-

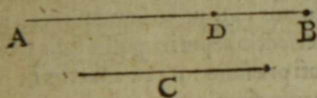
Quoniam hoc fieri poteſt producendo rectam AB versùs A vel B, ſupponamus id fieri debere ex parte B: hinc productâ AB per 1mam



Prop. uſque ad D, ita ut BD per antecedentem Prop. ſit æqualis ipſi C, erit AD ipſarum AB & C ſumma quæſita.

VII PROPOSITIO.

Datis in campo duabus rectis terminatis inæqualibus AB & C, de majore AB rectam lineam detrahere AD, æqualem minori C.



Quandoquidem hoc ſimiliter fieri poteſt ad partem alterutram A vel B; ſupponamus id faciendum eſſe ad partem A. Quocirca collocatâ ad punctum A in recta AB per 5tam Prop. rectâ AD æquali ipſi C, erit C ex AB ſubducta, ac relinquetur DB. Quemadmodum requirebatur.

Et tantum de Problematum Simplicium exegeſi, cui breviter ſubjungemus conſtructionem Planorum Problematum, hoc eſt, ad quorum ſolutionem circuli porrò deſcriptione eſt opùs, explicantes ſimul modum, quo ipſa in campo expedire licet.

De Constructione Planorum Problematum Geometricorum, seu, quæ, ductis rectis lineis, descriptisque circulorum circumferentiis, solvi possunt.

POSTULATUM.

Postuletur: ut è dato puncto ceu centro in dato intervallo circulum describere liceat.

Explicatis iis, quæ ad Simplicium Geometriæ Problematum constructionem pertinent, atque eorum concernunt praxin in campo: congruum videtur, ut deinceps hîc exponamus Planorum Geometricorum Problematum constructionem, tradendo similiter simul ea, quæ, ad ipsam in campo expediendam, cognitu sunt necessaria. Quare cum Simplicia Problemata, ut ex præcedentibus constat, absque ullo instrumento perfici queant, nisi quis perticam aut baculos, quibus ad eorum praxin usi sumus, pro talibus habere velit: ita hæc è contra, præter illa, quæ ad Simplicium constructionem opùs sunt, sine instrumento ad id requisito in campo absolvi nequeunt. Etenim quemadmodum simplicia Problemata per solas rectas lineas, Plana verò descriptis insuper circulis solvuntur; atque in campo rectarum quidem linearum occursus sive intersectio reperiri possit solis radiis visualibus, absque ullius instrumenti præsidio: ita ex adverso fit, ut rectæ lineæ & circuli, vel etiam duorum circulorum occursus sive intersectio in campo sine eo non inveniatur. In quem igitur finem apud Geodætas in usu est instrumentum æneum rotundum, Astrolabium dictum Geometricum, divisum in 360 partes æquales, quas vocant gradus; quorum singuli rursus mente in 60 alias minores seu minuta subdividi concipiuntur. Sed quoniam omnem cognitionem ex præcedentibus constare oportet, & antequam ad Planorum Problematum constructionem accedatur scire decet, quo pacto circulus Geometricè in dictos gradus & minuta sit dividendus; quod quidem difficilius quàm ipsa Planorum Problematum solutio est habendum, cum ad id scientificè perficiendum constructio Solidorum & Linearium Problematum nota requiratur: idcirco non convenit juxta artis naturam, ejusmodi instrumentum



ad planorum in campo constructionem adhibere, sed de simpliciore cogitandum est. Unde cum quærendo illud reperissem, ad id simplicius magisvé proprium excogitari non potuisse, quàm Crux vulgaris Metatoria, qualis hîc depicta cernitur, quatuor constans fixis & immobilibus pinnacidiis seu pinnulis, æquali distantiâ à se invicem remotis, quatuorque constituentibus angulos rectos: Illam ergo, postquam superiùs ostendimus, quâ ratione rectus angulus constituatur, sine difficultate ulla ad Planorum Problematum solutionem in campo admittendam esse censuimus, ideoque usum ejus in sequentibus Problematibus enucleandum.

I PROBLEMA.

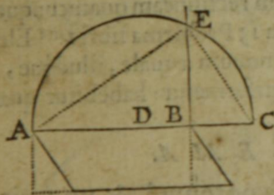
Datis duabus rectis lineis, mediam inter eas invenire proportionalem: *Problema 5 Sexti Elem. Euclidis.*

Vel,

Datum parallelogrammum in quadratum transformare.

Invenienda sit inter A B & BC media proportionalis: vel esto AB longitudo, & B C latitudo parallelogrammi, quod in quadratum sit convertendum.

Constructio.



Constitutis A B, B C in una linea recta A C, dividatur [a] hæc bifariam in D, & ex D intervallo A D vel D C, per Postulatum præcedens, describatur super A C semicirculus AEC. Tum ex B erectâ super A C [b] perpendiculari B E, occurrente peripheriæ in E, erit B E media proportionalis inter A B & B C, vel etiam □ᵘᵐ ex BE æquale erit parallelogrammo longitudinis AB, & latitudinis B C.

a p 2 Probl. pag. 128.

b p 5 Probl. pag. 129.

Cujus demonstrationem manifestam reddunt prop. 13tia lib. 6, ut & prop. 14 lib. 2di Elem. Euclidis.

Ut autem per allatam *Crucem Metatoriam* in campo inveniatur locus

cus E, in quo perpendicularis BE circumferentiæ AEC occurrit: notandum eſt, angulum AEC, contentum ſub rectis AE, EC [c] eſſe rectum, ac proinde ſi, deambulantes in recta B E cum cruce, experiamur, conſpiciendo punctum unum A per duas oppoſitas pinnulas, punctum alterum C tunc ſimul etiam conſpici poſſe per duas reliquas oppoſitas, deſignabit punctum E, ubi hoc continget, cum tam in recta B E, quàm in circumferentia A E C exiſtat, locum ante dictum quæſitum.

c p 31 Tertii Elem. Eucl.

Idcirco, ut progrediendo in B E innoteſcat, num eum ita quærendo ulteriùs à B recedere oporteat, an verò propiùs ad B accedere: ſciendum eſt, rectas omnes, ductas ex aliquo puncto in B E, ſumpto inter B & E, ad puncta A & C, obtuſos ſemper angulos efficere; at verò illas omnes, quæ ducuntur ex quolibet puncto in producta B E extra E ad A & C puncta, acutos ſemper conſtituere angulos. Quocirca ſi, conſpiciendo punctum A per oppoſitas duas pinnulas, punctum C appareat extra radium duarum aliarum oppoſitarum ad ſiniſtram, perſpicuum eſt ulterius in B E à B versùs E eſſe recedendum; ſin autem C extra hunc radium ad dextram apparuerit, tum in eadem recta propiùs accedendum eſſe ad B, donec ſimul utrumque punctum per crenas oppoſitarum pinnularum conſpici poſſit. Id quod eodem modo in ſequentibus Problematibus intelligi debet.

NOTA.

Haud diſſimili ratione licet figuram rectilineam quamcunque in quadratum commutare. Si enim, juxta 13 Problema libri 1^mi Elem. Euclidis, datæ figuræ fiat parallelogrammum æquale, illudque, ut modò oſtenſum fuit, in quadratum transformetur: habebitur quæſitum.

II *PROBLEMA.*

Trianguli rectanguli datâ Hypotenusâ, & uno circa rectum angulum latere: invenire latus alterum circa rectum:

Vel,

Duobus datis inæqualibus quadratis, invenire tertium, æquale differentiæ datorum.

Eſto

Esto A B hypotenusa, & B C unum latus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus latus alterum circa rectum est inveniendum; vel sunto AB, BC latera duorum inæqualium quadratorum, AB quidem majoris, B C autem minoris, & oporteat invenire tertium quadratum æquale differentiæ datorum.

Constructio.

Constitutis A B, B C in directum, producatur AC versùs C, & ex B intervallo A B [a] describatur semicirculus A E D. Tum ex C ductâ C E ipsi A D [b] perpendiculari, occurrente circumferentiæ in E: dico ipsam esse latus alterum trianguli quæsitum; vel etiam si super C E describatur quadratum, hoc ipsum esse differentiam quadratorum ex AB & BC.

a p antecedens Postulatum

b p 5. Probl. pag. 139.

Demonstratio.

Junctâ B E, quoniam [c] △ B E C est rectangulum, & data B C unum latus circa angulum rectum, & hypotenusa BE [d] æqualis datæ AB: patet CE esse latus alterum circa rectum.

Porrò cum [e] □tum ex B E sit æquale duobus □tis ex B C & C E: constat, si □tum ex BC à □to ex BE auferatur, differentiam esse □tum ex CE. Quare si △li rectanguli &c. Quod erat faciendum.

c p Constructionem.

d p 15 Def. Primi Elem. Eucl.

e p 47 Primi Elem. Eucl. vel p 4 prop. 2. partis 1. tractatus.

NOTA.

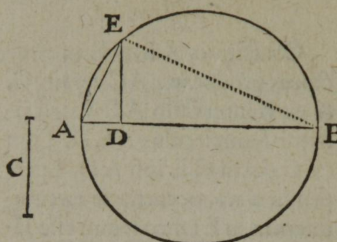
Ejusdem naturæ videtur Problema 2dum lib. 3 Elem. Euclidis, nempe: *Ex dato puncto C rectam lineam ducere C F, quæ tangat datum circulum FB.* Quod ut fiat, ducatur ex C per A recta linea, & ex A intervallo A C describatur semicirculus C E D. Deinde [f] ex B ductâ BE perpendiculari ad DC, occurrente circumferentiæ in E, jungatur AE, secans circumferentiam circuli FB in F, ac denique CF, quæ circulum FB tan-

f p 5. Problema pag. 139.

tanget in F. Huc referendum quoque videtur Problema 1mum lib. 4. Elem. Euclidis: *In dato circulo (cujus diameter A B) rectam lineam collocare A E, æqualem datæ rectæ lineæ C, quæ ipsâ A B non sit major.* Idem namque hoc est, ac si ex uno dato latere circa rectum angulum & hypotenusa trianguli rectanguli quæratur latus alterum circa rectum.

g p 3 Probl. Sexti Elem. Eucl.

h p 5 Probl. pag. 139.



Si enim g, ut pag. 143 dictum est, ad A B & C inveniatur tertia proportionalis A D, hoc est, ut A B sit ad C, sicut C ad A D; & ex D h ad A B erigatur perpendicularis D E, occurrens circumferentiæ in E, ducaturque AE: dico A E æqualem esse ipsi C. Ad quod demonstrandum, si jungatur E B, erit i A B ad A E, sicut A E ad A D. Quare cum per constructionem A B sit ad C, sicut C ad AD, sequitur AE ipsi C esse æqualem.

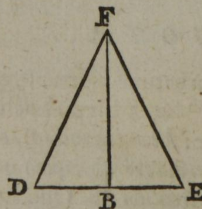
i p 31 Tertii Elem. Eucl. & coroll. 8væ Sexti Elem. Eucl.

LEMMATA, ad sequens Problema.

I.

Esto D F E triangulum isosceles, æqualia habens latera D F, FE: dico, si ex F ad latus tertium D E demittatur perpendicularis FB, segmenta D B & B E similiter esse æqualia.

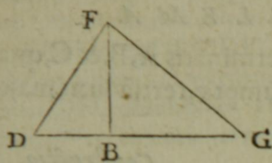
k p 47 Primi Elem. Eucl. vel 4 Prop. 2. partis 1. tractatus.



Quoniam enim D F æqualis ponitur ipsi F E, erit & □tum ex D F æquale □to ex FE. Jam verò □ DF k æquale est duobus □tis ex D B & BF; at □ FE æquale duobus □tis ex EB & BF. Æqualia igitur sunt bina □ta ex D B & B F binis □tis ex EB & BF. Unde dempto utrobique communi □to ex B F, remanebit □tum ex D B æquale □to ex BE; ac proinde D B æqualis B E. Quod erat propositum.

II. Esto

II.



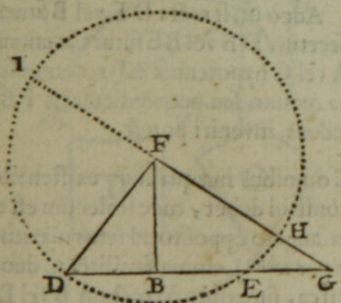
Esto triangulum D F G, inæqualia habens latera DF, FG, quorum D F sit minus quàm FG. Dico, si ex F ad latus tertium D G demittatur rursus perpendicularis FB, segmenta DB & B G similiter fore inæqualia, ac D B minus quàm B G.

Cum enim DF minor sit quàm FG, erit quoque □^{tum} ex DF minus □^{to} ex FG. Jam verò [l] □^{tum} ex D F est æquale duobus □^{tis} ex D B & B F, & □^{tum} ex FG æquale duobus □^{tis} ex G B & B F simul sumptis: ac proinde, si utrinque commune tollatur □^{tum} ex B F, relinquetur □^{tum} ex DB minus □^{to} ex BG, & consequenter DB minor quàm B G. Quemadmodum proponebatur.

l p 47 Primi Elem. Eucl. vel per 4 Prop. 2. partis 1. tractatus.

III.

Si trianguli scaleni D F G majus latus D G assumatur pro basi, & ad id ex opposito angulo F ducatur perpendicularis FB: erit, ut basis D G ad summam duorum reliquorum laterum D F, F G, ita eorundem laterum DF, F G differentia ad differentiam, quæ est inter D G & duplum minoris segmenti D B.



Descripto ex F intervallo FD circulo DE HI, secante DG in E, & FG in H, producatur FG ad circumferentiam in I: eritque IG summa, & H G differentia, laterum DF, FG; at EG differentia, quæ est inter D G basin & D E duplum minoris segmenti D B [m]. Quibus ita positis, dico D G esse ad IG, sicut H G ad E G.

m p 3 Tertii Elem. Eucl.

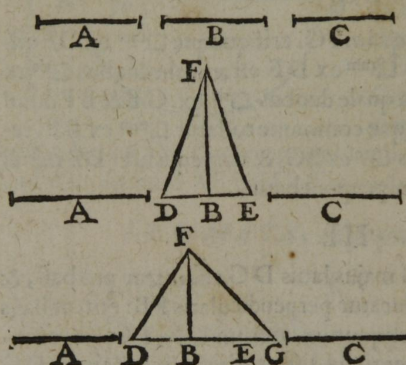
n p corol. 36tæ Tertii Elem. Eucl.
o p 16 Sexti Elem. Eucl.

Quoniam enim [n] rectangulum DGE æquale eſt rectangulo IGH, ſequitur [o] DG eſſe ad IG, ſicut HG ad EG. Quod erat propoſitum.

III PROBLEMA.

Ex tribus datis rectis lineis terminatis A, B, & C, quarum duæ ſimul, quomodocunque ſumptæ, tertiâ ſunt majores, triangulum conſtituere.

Conſtructio.



Primò igitur, ſi tres hæ rectæ A, B, & C inter ſe æquales fuerint, ſequitur, triangulum, quod ex ipſis conſtitui debet, fore æquilaterum. Cujus ergo conſtructio, ſicut Problemate 8. pag. 141 à nobis oſtenſum fuit, perfici poteſt.

At verò duabus tantùm æqualibus exiſtentibus, ut A & C, manifeſtum eſt $\triangle^{lum}$ quæſitum fore iſoſceles. Quo caſu perpendicularis, quæ ex angulo oppoſito cadit in tertium latus, juxta 1^{mum} Lemma, illud bifariam ſecabit. Adeò ut, ſi recta DE vel B ſumatur pro baſi, eaque [a] in B bifariam ſecetur, DB vel BE futura ſit unum ex lateribus circa rectum, & linea A vel C hypotenuſa $\triangle^{li}$ rectanguli; ex quibus porrò latus alterum circa rectum ſeu perpendicularis FB, ut & $\triangle$ DFE, per Problema præcedens, inveniri poteſt.

a p 2 Probl. pag. 128.

Denique, lineis A, B, & C omnibus inæqualibus exiſtentibus, quoniam $\triangle^{lum}$, quod ex ipſis conſtrui debet, tunc ſcalenum eſt: ſequitur, perpendicularem, quæ ex angulo oppoſito ad latus maximum ceu baſin demittitur, illud ipſum per 2^{dum} Lemma ſimiliter in duo inæqualia ſegmenta ſecare. Quocirca, ſupponendo rectam B vel DG maximam eſſe, ſi ea ſumatur pro baſi, & per Problema 10. p. 142 fiat, ut DG ad ſummam rectarum A & C, ita differentia earundem A & C ad 4^{tam}: indicabit ea, poſtquam à G ad E in recta DG poſita eſt,

per

per 3^{tium} Lemma, differentiam, quâ basis D G superat duplum minus segmentum D B. Hinc, [b] secando D E bifariam in B, erit D B minus, & BG majus basis segmentum. Eò igitur Problema reductum est, ut [c] ex alterutro laterum circa rectum, & hypotenusâ $\triangle^{li}$ rectanguli (ut hic, ex DB & DF seu A trianguli DBF; vel ex BG & FG seu C trianguli B F G) inveniendum sit 3^{tium} latus B F. Unde & $\triangle^{lum}$ quæsitum DFG obtinebitur. Hinc:

b p 1. Probl. pag. 128.

c p 2 Praecedens Probl.

Datis 3^{bus} rectis lineis terminatis A, B, & C, &c. Quod erat faciendum.

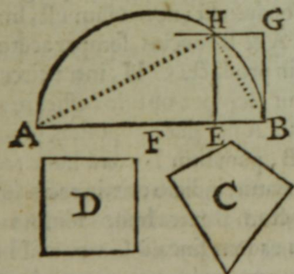
NOTA.

Id quod in hoc Problemate intendebamus, est, ut quæsito non nisi per unius tantùm circuli & rectarum linearum descriptionem satisfieret, vel etiam omnino per rectas lineas, si datæ omnes inter se æquales sint. Quod alioquin duobus circulis descriptis fieri assolet. Idem quoque in iis, quæ in fine Præcedentis Problematis à nobis ostensa sunt, animadvertere licet.

IV *PROBLEMA.*

Parallelogrammi rectanguli, datis A B, summâ laterum, & plano C, æquali spacio, quod sub iis comprehenditur: invenire latera.

Constructio.



Converso plano C [a] in quadratum D, secetur A B bifariam in F, & ex F intervallo A F vel F B super A B describatur semicirculus AHB. Deinde ex B erectâ super A B perpendiculari B G æquali lateri quadrati D, agatur ex G ipsi AB parallela G H, secans vel tangens circumferentiam in H, & ex H ductâ H E parallelâ BG (hoc est, sumptâ BE æquali G H): erunt AE & EB latera parallelogrammi quæsita, hoc est, id quod sub A E & EB comprehenditur spacium, æquale erit dato plano C.

a p 1. Probl. pag. 151.

Demonſtratio.

Primò enim, quòd G H ſemper circumferentiam A H B ſecet vel tangat, fit, quia quadratum D per conſtructionem eſt æquale plano C; & A B ex hypotheſi ſumma laterum parallelogrammi rectanguli æqualis quadrato D. Quorum quidem parallelogrammorum, quę ſub ſegmentis ipſius A B fiunt, [b] maximum eſt illud, quod ſuper A B vel FB deſcribitur, quadratum. Adeò ut EH vel BG, hoc eſt, latus quadrati D, nunquam excedere poſſit ſemidiametrum A F vel F B; ac proinde G H circumferentiam AHB in H ſemper ſecare vel tangere debeat. Deinde, quoniam rectangulum A E B, ut ex 14ta $Prop^{ne}$ 2^{di} lib. Elem. Eucl. colligitur, æquale eſt quadrato ſuper E H vel B G, hoc eſt, quadrato D, id quod [c] æquale eſt plano C: patet, A E & E B eſſe latera rectanguli æqualis dato plano C, quorum laterum ſumma eſt AB. Quod faciendum erat.

[b] ꝑ 5 Secundi Elem. Eucl.

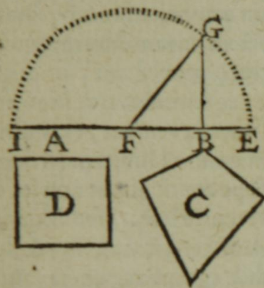
[c] ꝑ Conſtructionem.

Ut autem punctum H in campo inveniatur, in quo G H circumferentiam A H B ſecat vel tangit: oportet, eundo cum *cruce metatoria* in recta G H, à G ad H euſque procedere, donec, dirigendo viſum per duas oppoſitas pinnulas versùs A, per duas reliquas oppoſitas conſpiciatur & ſimul B: Quoniam punctum H, ubi hoc contingit, exiſtens in linea G H, ut & in circumferentia A H B, quæſitum punctum eſt. Quocirca, ut, ad hoc explorandum, conſtet, utrum, dum in recta G H obambulamus, à G versùs H ulteriùs progrediendum, an verò ab H versùs G recedendum ſit: notandum eſt, lineas à puncto, inter G & H aſſumpto, ad A & B eductas, ſemper acutos angulos efficere; at, quæ ex puncto in producta G H, intra circumferentiam, ultra H ad A & B ducuntur, ſemper obtuſos efficere angulos. Adeoque, ſi, collimando versùs A per duas oppoſitas pinnulas, ac ſimul per reliquas duas versùs B, punctum B extra hunc radium viſualem versùs ſiniſtram deprehendatur: indicio erit, in recta GH ab H versùs G eundum eſſe; ſed ſi punctum B extra hunc radium versùs dextram appareat, è contra tunc in eadem linea à G versùs H ulteriùs procedendum eſſe, uſque dum utrumque punctum per binas pinnulas conſpicuum compererimus.

V PROBLEMA.

Datis parallelogrammi rectanguli differentiâ laterum A B, & plano C, æquali spacio, quod sub iis comprehenditur: invenire latera.

Constructio.



Mutato plano C, ut ante, in quadratum D, & A B in F [a] bifariam divisâ, erigatur [b] ex B super A B perpendicularis B G, æqualis lateri quadrati D, jungaturque F G. Deinde, [c] centro F & intervallo F G, descripto circulo I G E, secante A D hinc inde productam in I & E: erunt I B & B E quæsita rectanguli latera, hoc est, erit id, quod sub IB & BE comprehenditur spacium, æquale dato plano C.

a p Probl. 2 pag. 128.
b p Probl. 5 pag. 139.
c p Antecedens Postul.

Demonstratio.

Etenim existente IF æquali F E, & A F æquali F B, erit & I A æqualis B E. Quibus singulis, si addatur A B, erit etiam I B æqualis AE. Quoniam autem rectangulum I B E, hoc est, AEB, ut ex 14ta Propne 2di lib. Elem. Eucl. colligitur, æquatur quadrato super BG, hoc est, quadrato D, quod, per constructionem, æquale est plano C: manifestum est A E & E B esse latera rectanguli, dato plano C æqualis, quorum laterum differentia est AB. Quod erat faciendum.

Ubi observandum, ad quæsitum in campo obtinendum, postquam planum C in quadratum D est transmutatum, ut pag. 151 dictum est, quòd F E solummodo æqualis sumenda sit ipsi F G, ita ut semicirculum IGE describere non sit opùs.

FINIS.

APPEN-

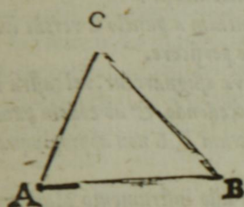
APPENDIX SIMPLICIVM PROBLEMATVM.

Actenus de Simplicibus Problematîs Geometricis actum fuit, quatenus ipsa in campo tanquam in plano infinito expediri possunt, supponendo, ubivis in illo aditum patere, haud secus ac vulgò Problemata Euclidis & aliorum absolvi intelliguntur, postulantium nempe, ut in eo à quovis dato puncto ad quodvis datum punctum, rectam lineam ducere, eamque ad utramque partem in infinitum producere concedatur, ut & quovis loco & intervallo circulum describere: ac summatim ut in eo omnia, quæ communiter in Geometria construenda veniunt, expediri queant, nullâ necessitate ea ad ullum terminum vel limitem astringente. Quoniam autem in praxi Geodætica sæpe contingit, ut non ita indifferenter ad quævis loca hujus plani pervenire liceat, sed illud ipsum quibusdam in locis pervium, quibusdam verò invium sit, & fluviis, paludibus, fossis ac aquis obsitum, unde complura puncta (alioquin data) inaccessa fiunt; aut idem etiam quibusdam in locis arboribus ac silvis consitum, & in quibusdam denique ædificiis, pagis, ac urbibus occupatum, aut etiam limitibus, collibus, similibusvé eminentiis impeditum, unde diversa puncta, hîc quidem visibilia, illîc autem invisibilia & plerumque inaccessa sunt, quo fit, ut ductus quidam aut linearum positiones, quæ aliàs pro datis haberi possunt, hinc incertæ & incognitæ evadant: Patet, quòd, in præcedentium Problematum Simplicium aliorumque in campo constructione, plurima expedienda occurrant, quæ aliquatenus in hac Appendice, quoniam, ut supra quidem factum fuit, perfici nequeunt, afferenda & construenda duximus. Ad quod magis adhuc me instigavit ac propensum reddidit tractatus quidam, ad manus meas ante aliquod tempus delatus, cum hoc titulo: *Geometria Peregrinans*, dialogum continens, in quo Arithmetica & Geometria tanquam sorores de fortuna sua confabulantur & de temporis conditione doctè inter se contendunt. Hic autem cum sine nomine Autoris & Typographi in lucem prodierit, ut & absque anni & loci, ubi impressus sit, indicatione; tamen ex iis, quæ in eo recensentur, eum haud ita pridem editum, colligere non est difficile.

Quem tractatum, mihi à secundo commodatum (cum hîc nusquam

quam cognitus, nedum venalis esset, nec etiam ob rationes dictas facilè comparandus; sed solummodo conjecturâ constaret, eum in Polonia typis mandatum fuisse, & quòd ejus Author nobilis esset Polonus, qui aliquamdiu in Batavia se detinuerat, ibique pluribus lustratis castris Celsissimo Principi Auriaco, Guilielmo Secundo, laudatissimæ memoriæ, fuerat familiaris), breviter perlegi, & ex eo Propositiones aliquot, quas in libello quodam pertractasse videbatur, annotavi, quarum hæc sunt verba:

Propositiones, quæ in posteriore libello explicantur, istæ sunt.



1. *Quomodo lineæ A B inaccessibilis longitudo inveniri possit?*

2. *Quomodo lineæ propositæ, perticulis A, B terminatæ, eam non adeundo, ad indictam ab ipsa distantiam, linea parallela conformanda sit?*

3. *Quomodo ad datæ lineæ inaccessibilis A B longitudinem (sive illa conspectibilis sit, sive non) parallela eminus facienda sit?*

4. *Ex puncto C, quocunque loco extra lineam AB constituto (modò illud lineæ, punctis A, B terminatæ, oppositum sit) in eandem lineam A, B, ad illam non accedendo, perpendicularem demittere.*

5. *A dato puncto C ad lineam subjectam A B inaccessibilem, perpendicularis longitudinem indicare.*

6. *A dato extra lineam propositam puncto, quod versus lineæ propositæ extremitatem propositum sit, perpendicularem eminus demittere.*

7. *Ad extremitatem datæ lineæ inaccessibilis perpendicularem tantæ longitudinis, quanta postulabitur, demittere.*

8. *A puncto, extra datam lineam A B remotiùs assignato, in eandem lineam A B triplo vel quadruplo breviorem perpendicularem demittere.*

9. *Super data linea A B (sive illa conspectibilis sit, sive non) ipsam non attingendo, quadratum rectangulum æquilaterum, vel qualecunque aliud postulatum, constituere.*

10. *Dato in linea proposita, sive muro hostili, loco aliquo notabili, & certa distantia, ex qua tormentum ad locum assignatum juxta rectum angulum dirigendum sit, locum eidem distantiæ & situi convenientem invenire.*

11. *Extra datam lineam, vel muri partem, punctis A, B terminatam, ad indictam ab ejusdem muri opposito puncto distantiam, locum qui ab utroque A & B puncto æquali spatio distet, invenire.*

12. *Quomodo extra datam lineam inaccessibilem, vel murum A B, punctum inveniri possit, quod à punctis A, B juxta indictam remotionem inæqualem, exactè distet?*

13. *Idem in sylva, ubi puncta A, B eminus videri non possunt, artificiosè perficere.*

14. *Quomodo à puncto C versùs lineam oppositam A B, ob periculum vel impedimentum aliquod, propiùs non accedendo, & intra quartam, vel octavam totius distantiæ partem, à puncto C non recedendo, ex eodem puncto C in subjectam lineam A B perpendicularis demittenda sit?*

15. *Idem vel ad aliquot perticarum distantiam à puncto C versùs lineam AB non procedendo, aliâ ratione, commodè perficere.*

16. *Si punctum C in margine lacus vel sylvæ assignaretur, vel castra retrò nimis vicina essent, post punctum C non procedendo, & ab eodem puncto C ultra aliquot perticarum spatium versùs murum A, B non appropinquando, perpendicularem commodè producere.*

Hactenus recensui Problemata, quæ absque ullo instrumento Mathematico, etiam circini, ac regulæ usu, lineam A, B non adeundo, in loco patenti & aperto, per solos bacillos expediri possunt, &c.

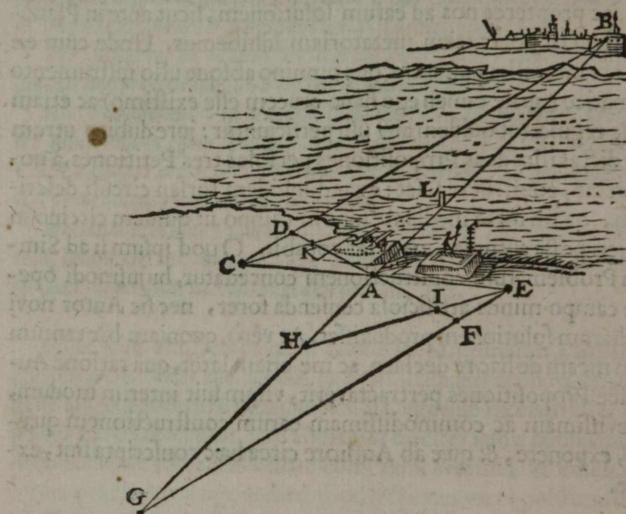
Hinc cum ante complures annos in Simplicium Problematum contemplationem inciderim, nec tamen audiverim legerimvé cuidam aliquid eorum in mentem venisse, egoque interim illa, sicut superiùs pertractata sunt, jam abhinc 13 circiter annis conscripserim, & postmodum amicis quibusdam communicaverim, ac etiam nonnullorum praxin in campo auditoribus, lectiones meas publicas frequentantibus, ostenderim: summopere miratus sum, quòd allatas Propositiones, ex superioribus Problematîs Simplicibus manantes, quæque non nisi pro sedula eorundem in variis casibus praxis Geodæticæ exercitatione & animadversione haberi possunt, in prædicto tractatu offenderim. Inter quas Propositiones, cum aliquæ sint, quas mihi olim in eodem sensu considerandas proposuerim, invenerimque quo pacto absque ullo instrumento in campo perfici possent, verbi gratiâ, rectam lineam ducere, parallelam rectæ inaccessibili A B, ut &, idem perficere, quando quæsita linea per datum punctum C transire debet, ipsi A B non appropinquando, &c. nunquam mihi, quoad modum in

in hiſce uſitatum, ſatisfacere valui, quippe qui nonniſi inſtrumenti ope ac multùm tentando abſolvitur. Unde vel eo magis gaviſus fui, quòd exercitatum ingenium, mecum hac in re idem ſentiens, reperim, exinde judicans haud inutile fore, ſi tempus meum utcunque in hiſce inſumerem. Quocirca ad uſum Simplicium Problematum in diverſis caſibus praxis Geodæticæ exhibendum, & authorem ad operis ſui editionem inſtigandum, juxta quaſdam noſtras Propoſitiones etiam jam citatas dicti tractatus in hac Appendice breviter conſtruemus, exceptis 12 & 13 Propoſitionibus, quas inter Plana Problemata numeramus, adeoque abſque circuli deſcriptione ſolvi nequeunt, ac propterea nos ad earum ſolutionem, ſicut ante in Planorum conſtructione, crucem metatoriam adhibemus. Unde cum eæ ab Authore inter illas ponantur, quę omnino abſque ullo inſtrumento Mathematico (quale tamen ego hanc crucem eſſe exiſtimo) ac etiam circini & regulæ (ut quidem ait) uſu perficiuntur: jure dubito utrum Author dictas illas duas Propoſitiones per ſolas tres Petitiones, à nobis adductas, conſtruere ſciat: quandoquidem forſan circuli deſcriptionem, quam fortè mediante fune in campo ut quidem circino in charta fieri poſſe autumat, in partes vocabit. Quod ipſum ſi ad Simplicium Problematum conſtructionem concedatur, hujuſmodi operatio in campo minùs artificioſa cenſenda foret, nec ſic Autor novi quid in harum ſolutionem produxiſſet. At verò, quoniam hîc tantùm mentem meam de hac re declaro, ac me etiam latet, quâ ratione Author haſce Propoſitiones pertractaverit, viſum fuit interim modum, quo breviſſimam ac commodiſſimam earum conſtructionem quæliverim, exponere, & quæ ab Authore circa hæc conſcripta ſint, exſpectare.

I PROPOSITIO.

Invenire longitudinem lineæ A B, cùm ad alterutrum tantùm ejus extremum A aditus patet.

Erecto ubicunque in C baculo, ac deinde in recta C B utcunque alio, ut, ex. gr., in D, ſumantur in productis CA, DA rectæ A E, A F ipſis A C, A D æquales, & in directum ipſius E F retrocedatur, donec perventum fuerit in productam A B, hoc eſt, uſque dum utrumque



punctum A & B in eadem recta appareat. Id quod ſuppono fieri in G, eritque G A æqualis ipſi A B.

Quocirca, ut innoteſcat quot virgas, pedeſvé, &c. linea A B longa ſit, oportet tantùm catenâ aut perticâ longitudinem lineæ G A explorare, habebiturque numerus virgarum, pedumvé, &c. longitudinis lineæ A B, quæſitus.

2 *PROPOSITIO.*

A puncto A in recta AB rectam datam definire A L.

Non rarò contingit, ut in construendis chomatibus, promontoriis, similibusvé, recta linea determinanda sit, datum virgarum aut pedum numerum continens: ad quod faciendum, oportet operando, ut ante, in linea AG ab A usque ad H tot virgas, pedesvé metiri, quot linea A L continere debet, ac ducere H E, quæ AF secet in I. Tum sumptâ A K æquali A I, cum scapha navigandum erit ab A versùs B in recta A H, donec perventum fuerit in rectam K C, quod suppono fieri in L: eritque AL æqualis datæ rectæ AH.

3 *PROPOSITIO.*

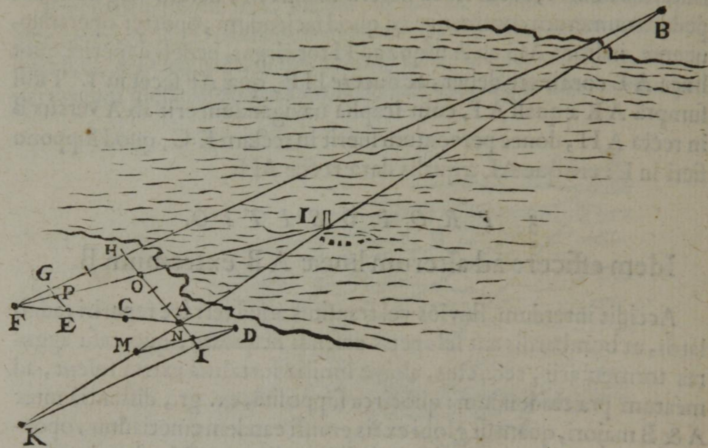
Idem efficere ad alterum lineæ A B extremum B.

Accidit interdum, fluvios vel transitus aquâ terráve reperiri, adeò latos, ut bombardis aut sclopetis defendi nequeant, quo casu aggeres tormentarii, reductus, aliáve similia fortalitia extrui solent, ad meatum præcludendum: quocirca suppositâ, ex. gr., distantiâ inter A & B majori, quàm ut globi ex iis emissi eandem emetiantur, oportet, ut à B versùs A in recta A B definiatur linea, ut B L, datæ longitudinis, quemadmodum in 1ma Propositione ostensum fuit, lineam invenire GA æqualem ipsi A B, ac deinde in ea assumere G H æqualem longitudini datæ: ductâ enim rursus HE, secante AF in I, si A K sumatur æqualis A I, &, ut ante, ab A versùs B in rectâ A H exeatur, donec perventum fuerit in rectam CK: erit LB æqualis GH. Ut requirebatur.

Quoniam autem plerumque fit, ut in linea A B non eò usque retrogradi liceat, donec GA ipsi AB sit æqualis, adeoque ad præcedentes Propositiones superiori modo construendas ad scopum pertingere non detur: idem tamen præstari potest, faciendo tantùm G A ipsius A B partem qualemcunque aliquotam, accommodando se nimirum loco ad id concesso.

Quocirca, ut, exempli gratiâ, in producta A B inveniatur A K, quæ sit ipsius A B $\frac{1}{3}$tia pars, oportet, ut ante, defixo alicubi baculo C in producta A C assumere hinc DA æqualem A C, & illinc A F æqualem triplo ipsius A C: ac deinde in recta F B erecto utcunque baculo G, fa-

G, factâque FH triplâ FG, ponatur in producta HA recta AI æqualis GE, & ab I in directum ID retrocedatur, usque dum perventum fuerit in lineam AB: eritque AK tertia pars ipsius AB. Quæ si in recta aliqua linea ter sumatur, lineæ AB longitudinem exhibebit.



Haud secus, si ab A versùs B in linea AB recta designanda sit, quæ datæ AM tripla existat, oportet, ut ante, ductâ MD, secante AI in N, factâque AO triplâ ipsius AN, exire ab A versùs B, manendo continuò in recta AM, donec perventum fuerit in rectam FO; id quod suppono fieri in L: eritque AL tripla datæ AM.

Eodem modo procedendum erit, si LB requiratur datæ KL tripla. Ubi etiam facile est ostendere, quo pacto, L & B duabus turribus aliisvé eminentioribus locis existentibus, ita ut ad ea accessus non pateat, sed tantùm ad A, punctum aliquod in producta BL, distantia eorum LB inveniri possit. Etenim inventâ primùm, ut ante, rectâ AK æquali trienti ipsius AB (supponendo scilicet loci conditionem non permittere, ut ea inveniatur æqualis, quippe quod rarò fit), ducatur FL secans GE in P; factâque AN æquali PE, ex D per N ducatur recta DNM, occurrens ipsi AK in M: erit KM tertia pars datæ LB. Quæ si ideo in recta aliqua linea ter ponatur, inventa erit longitudo ipsius LB.

1mæ PROPOSITIONIS *alia Constructio.*

Sumpto in producta AB utcunque puncto C, sumatur extra eam punctum aliud, ut D, & ex A & C per D rectis ductis lineis ADE & CDF, ponantur in iis DE, DF æquales DA, DC. Deinde ab E exeundo in directum ipsius EF donec perveniatur in rectam DB productam, id quod fieri suppono in G: erit GE æqualis AB, Ac proinde quoties data quævis mensura in GE continetur, toties eadem continebitur quoque in AB, unde & ipsa AB data erit.

2dæ PROPOSITIONIS *alia Constructio.*

A puncto A in recta AB rectam definire AI, æqualem datæ.

Accepto, ut ante, in producta AB puncto C, & extra eam puncto D, ducantur ADE & CDF, ita ut DE, DF sint æquales DA, DC. Deinde productâ FE ad H, ita ut HE æquetur datæ rectæ definiendæ, oportet, ut ante, ab A versùs B exire in recta CA, usque dum perventum fuerit in productam HD. Id quod si fieri supponatur in I, erit AI æqualis ipsi HE, hoc est, datæ rectæ. Ut requirebatur.

3tiæ PROPOSITIONIS *alia Constructio.*

Quòd si autem IB æqualis facienda sit datæ rectæ, oportebit primùm, juxta 1mam Propnem invenire GE æqualem AB; ac deinde, collocatâ in ea GH æquali datæ rectæ definiendæ, erit rursus, si ab A versùs

versùs B in directum ipsius C A exeatur, donec perventum fuerit in productam HD, recta IB æqualis datæ GH.

Si verò retroeundo ab E in directum ipsius FE eousque pervenire non detur, donec GE sit æqualis AB, ita ut præcedentes Propositiones, ut ante, expedire non liceat: poterit tamen idem præstari, faciendo ad hoc, juxta loci commoditatem, GE certam ipsius AB partem aliquotam, verbi gratiâ, tertiam.

Etenim erecto rursus in productâ AB ubicunque baculo C, in eademque assumptâ AE æquali triplæ AC, extra eam, ut ante, defigendus erit utcunque baculus D, & in recta AD sumenda AF æqualis triplæ AD. Dehinc in eadem linea producta sumendo FG æqualem AD, & in producta EF sumendo FH æqualem CD, oportet à G in directum ipsius HG retrogradi, donec perveniatur in productam BF, quod suppono fieri in K: eritque tum GK æqualis tertiæ parti ipsius AB.

Pari modo si à B versùs A in recta AB linea abscindenda sit, quæ datæ rectæ, verbi gratiâ, KL, tripla existat: oportebit, inventâ GK, in eadem à K versùs G designare datam KL, ac deinde ab A versùs B, ut ante, in recta AB exire, manendo in eum finem continuò in directum ipsius AC; donec perventum fuerit in productam FL, quod si fiat in I: erit IB tripla ipsius KL. Id quod etiam usui esse potest, si BA, latitudinem fluvii designans, major fuerit, quàm ut tormentis bellicis ab hoste integra ex B infestari possit, ad diversos in fluvio ter-

terminos definiendos, ut I, extrema ictuum determinantes, quò ipse securè navigari possit.

Nec aliter fit, si AI ipsius GL tripla requiratur.

Cæterùm facilè hîc etiam ostendi potest, quo pacto longitudo lineæ B I, cùm ad punctum duntaxat A in ejus producta pervenire licet, aliter quàm supra ostensum est, inveniri possit.

Inventâ enim priùs G K, æquali trienti ipsius A B, ut hîc expositum fuit, opùs tantùm erit prodire ab F in directum ipsius IF, donec perveniatur in productam HG. Quod si fiat in L, erit LK tertia pars ipsius B I, adeoque B I data.

Sequuntur tres præcedentes PROPOSITIONES *adhuc alio modo Constructæ.*

1ma PROPOSITIO.

Acceptis in producta AB utcunque duobus punctis C & D, & extra eam pro libitu puncto E, sumantur in linea D E rectæ D F, F G æquales DC, CA, junganturque GC, A F, sese secantes in H. Deinde ex D per H ductâ DHI, junctâque GB, eandem secante in I: fiet,

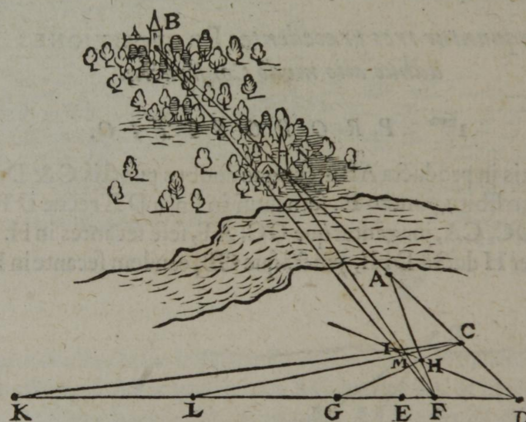
B
N
L
I
A
M
C
H
K
L
G
E
F
D

si per puncta A, I recta ducatur A I K, occurrens ipsi D E in K, linea GK æqualis propositæ AB. Hinc quoties data quævis mensura continetur in GK, continebitur eadem etiam in A B; ac proinde & ipsius AB longitudo data erit.

Idem præstare licet, si loco rectarum G B & A I K ducantur rectæ F B & C I K, reliquis manentibus, ut ante.

2da PROPOSITIO.

Si jam ab A versùs B in recta A B linea determinanda sit æqualis datæ, accipiantur, ut ante, in producta B A puncta C & D utcunque, & extra eam assumpto, ut libet, puncto E, sumptisque in linea D E rectis D F, F G æqualibus D C, C A, agantur G C, A F, sese secantes



in H, & ex D per H recta linea agatur D H I. Deinde factâ G L æquali datæ, junctâque L A, secante D H I in M: fiet, si ab A versùs B, ut supra, in directum ipsius A C exeatur, donec perventum sit in productam G M, recta A N æqualis datæ G L. Id quod etiam fieri potest loco L A & G M N ducendo rectas L C & F M N, manentibus reliquis invariatis.

3tia PROPOSITIO.

Huc pertinent binæ præcedentes figuræ.

At si B N requiratur æqualis datæ rectæ, oportet ut in 1ma Propne invenire G K æqualem A B, & in eadem assumptâ K L æquali datæ ducere L A aut L C, secantem D H I in M. Deinde eundo ab A versùs

B in

B in directum ipſius A C, uſque dum perventum fuerit in productam GM aut FM: erit BN æqualis ipſi K L.

Quod ſi contingat, ut in recta D E non eouſque progredi liceret, donec G K ipſi A B ſit æqualis, ad 1^{mam} & 3^{tiam} Propoſitionem juxta hunc modum conſtruendas: fieri poteſt, ut G K, ſit, ex. gr., ipſius A B tertia pars.

Etenim ſumendo in producta A B utcunque punctum C, & in eadem faciendo A D, D E ſingulas ipſius A C triplas, oportet extra eam ad libitum ſumere punctum F, & in recta E F ponere E G, G H ſingulas æquales A C. Deinde junctis H D, G A, ſeſe interſecantibus in I, & ex E per I ductâ rectâ EIK, agatur HB, ſecans EIK in K: fietque, ſi ex A per K recta linea ducatur, occurrens ipſi E F in L, rectæ H L tertia pars ipſius AB.

Idem etiam abſolvere licet, ducendo G B, ſecantem EIK in K, ac deinde ex D per K rectam DKL, loco ipſarum HB & AKL; reliquis exiſtentibus invariatis.

Porrò ſi à B ex AB reſecanda ſit linea BN, ita ut ipſa tripla ſit rectæ datæ: oportet tantùm, inventâ HL, in ea ab L ad M datam hanc collocare, ac deinde ducere MA, quæ EIK ſecet in O. Fiet enim, ſi agatur HON, occurrens ipſi AB in N, ut recta BN ſit datæ L M tripla. Ut requirebatur.

Quod ipſum quoque facere licet, ſi agatur MD, ſecans EIK in O, ac deinde ex G per O ducatur G O N, loco ipſarum M A & H O N, reliquis, ut ante, manentibus.

Eodem modo procedendum, cùm AN tripla requiritur ipſius HM.

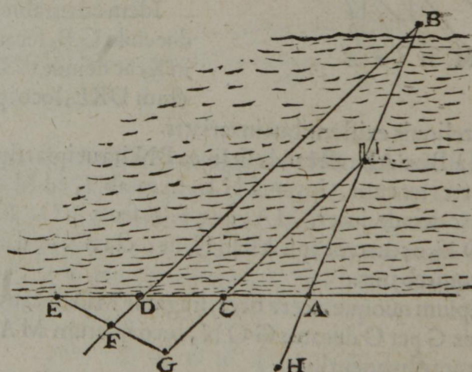
Ubi etiam facilè oſtendi poteſt: Quo pacto & aliâ ratione invenire liceat longitudinem lineæ B N, quum tantùm ad A in producta pervenire datur.

Si enim primò inveniatur H L æqualis trienti ipsius A B, ut ostensum est, & ducatur HN aut GN secans EIK in O, ac deinde ab L eatur versùs H in linea E F, donec perveniatur in productam A O aut D O: erit, supponendo id fieri in M, L M tertia pars ipsius B N. Quocirca si longitudo lineæ L M per certam aliquam mensuram exploretur, eaque in recta aliqua ter collocetur, inventa etiam erit longitudo lineæ BN quæsitæ.

4 *PROPOSITIO.*

Lineam AB dividere in I in eadem ratione, quâ alia data A D in C divisa est, quando ad alterutrum tantùm ejus extremum A pervenire licet.

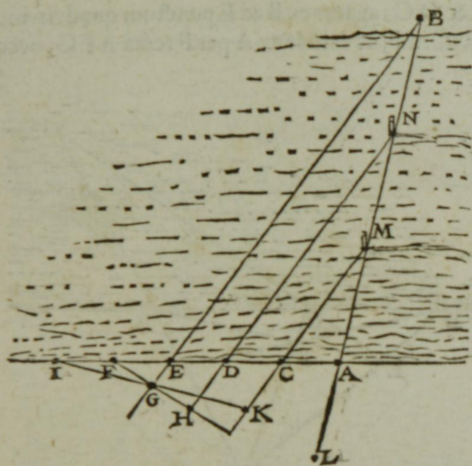
Productâ AD ad E, ita ut ED æquetur D C, collocetur in producta B D alicubi baculus F, & ex E per F recta linea agatur. In hac autem positâ FG æquali FE, & in producta BA utcunque erecto baculo H, ab A versùs B. Cum scapha navigetur in directum ipsius HA, usque dum perventum fuerit in productam G C, id quod fieri suppono in I: eritque AB in I similiter secta, quemadmodum AD in C, hoc est, erit A I ad IB, ut AC ad CD.



Eodem modo, si A C, CD, & DE omnes inter se accipiantur æquales, erit A B in I bifariam secta. Unde etiam liquet, quo pacto linea A B in 3 aut plures æquales partes sit dividenda; vel etiam quâ ra-

ratione ex ea ad A vel B quæſita pars ſit auferenda. Quæ quidem omnia tam in imponendis fluvio pontibus quàm in delineandis variis operibus in locis paludoſis inprimis uſui venire poſſunt.

Cæterùm, lineâ AE in plures quàm duas partes utlibet diviſâ, ut, exempli gratiâ, in C & D, ad dividendam AB in M & N in eadem ratione: oportet, ut ante, producendo AE ad F, ita ut EF ſit æqualis ED, in productâ BE utcunque ponere baculum G; & ex F per G

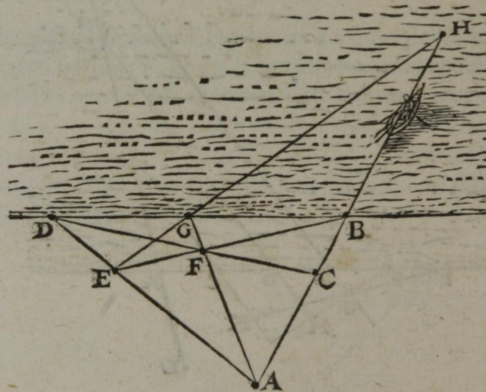


ductâ FGH in ea aſſumere GH æqualem GF. Deinde productâ AE ad I, ita ut EI ſit æqualis EC, ducatur ex I per G recta IGK; & in eadem aſſumptâ GK æquali GI, collocetur in producta AB alicubi baculus L. Porrò exeundo, ut ſupra, ab A versùs B in directum ipſius LA, donec perveniatur in productas KC & HD, id quod fieri ſuppono in M & N: erit AB in M & N diviſa, ſicut AE in C & D. Eodem modo procede, cùm AE in plures quàm tres partes eſt diviſa.

5 PROPOSITIO.

Lineam A B, divisam in C, ita ut A C major sit quàm CB, producere versùs B, ut tota A H sit ad productam BH, sicut AC ad CB. Supponendo quòd ultra B progredi non liceat.

Ad quod faciendum, defixo alicubi extra AB baculo D, ductisque A D, D B, & D C, agatur ex B ad E punctum quodvis in A D recta BE, secans DC in F; ac deinde ex A per F recta A F G, occurrens ipsi

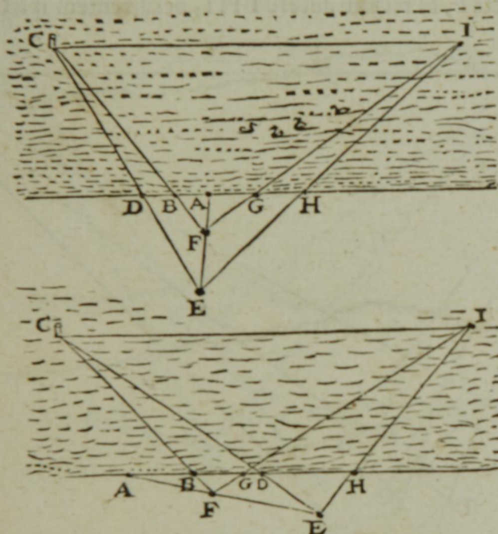


DB in G. Quo peracto, si à B cum scapha in directum ipsius A B navigetur, donec perventum sit in productam E G, ut ad H; erit AH ad HB, ut AC ad CB. Ut requirebatur.

6 PROPOSITIO.

Per punctum C rectam lineam ducere CI, parallelam alteri AB, cùm intra utramque venire non licet.

Sumpto in AB utcunque puncto utroque A & B, & in ea acceptâ BD æquali BA, agatur ex C per D recta CDE. Deinde in hac assumpto pro lubitu puncto E, ductâque EA, agatur ex C per B recta

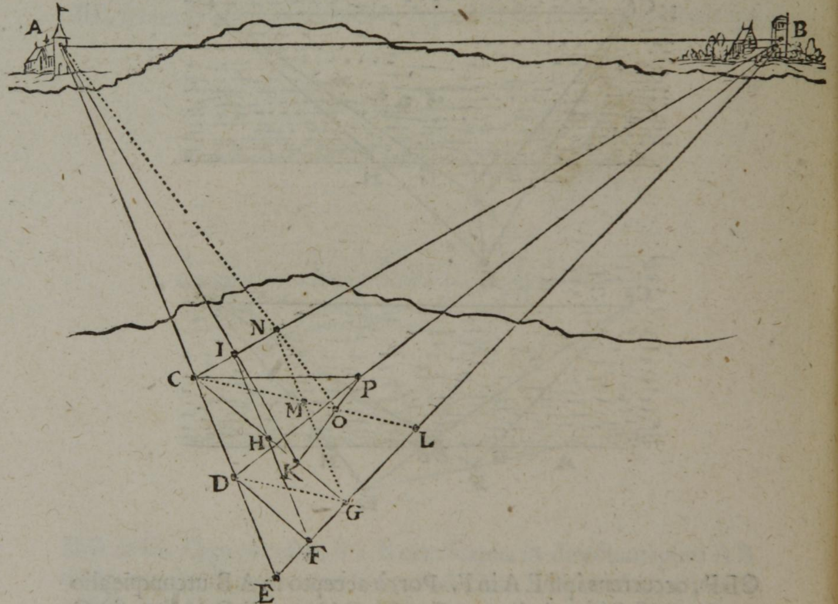


CBF, occurrens ipsi EA in F. Porrò accepto in AB utcunque alio puncto G, factâque in linea AB rectâ GH æquali GA: fiet, si à G cum scapha navigetur in directum ipsius FG, donec perveniatur in productam EH, quod fieri suppono in I, recta CI, quæ inter utrumque punctum C & I interjacet, ipsi AB parallela.

7 PROPOSITIO.

Per datum punctum C rectam ducere CP, parallelam alteri AB, ad quam accessus non patet.

Sumpto enim in producta A C puncto utcunque D, ponatur in ea DE æqualis D C, ducanturque EB, B C. Deinde accepto in E B pro lubitu puncto F, collocetur in ea F G æqualis FE, junganturque FD, G C. Quo peracto, oportet ex CG abscindere C H æqualem D F, & per puncta F, H rectam ducere F H I, occurrentem ipsi C B in I.

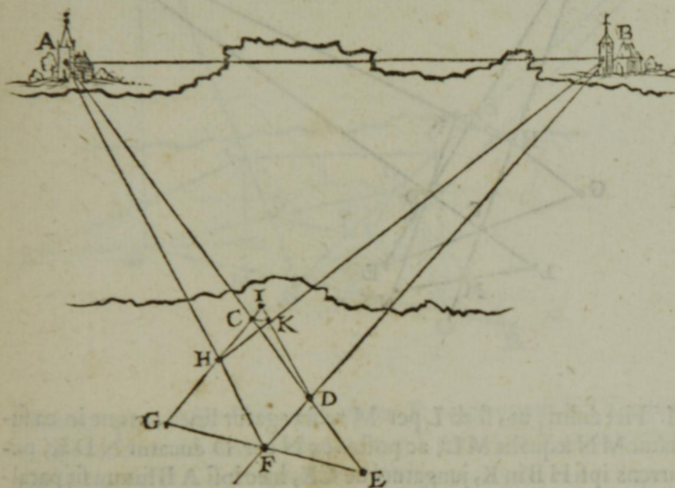


Eodem modo, assumpta GL æquali GE, junctisque GD, LC, oportet ex CL auferre CM æqualem DG, & per puncta G, M rectam ducere G M N, occurrentem ipsi C B in N. Postea ductis ex A per I & N rectis A IK, A N O, occurrentibus ipsis C G, C L, aut postquam sunt productæ in K & O, agatur ex K per O recta K O P, occurrens ipsi DB in P: eritque juncta CP ipsi AB parallela. Ut requirebatur.

Ali-

Aliter & breviùs.

Sumpto, ut ante, in producta A C puncto D, in eaque positâ D E æquali DC, accipiatur in producta BD pro libitu punctum F, & ex E per F agatur recta EFG. In qua assumptâ FG æquali FE, junctisque



GC, FH, sese intersecantibus in H, oportet HI æqualem facere FD, & jungere I D, quæ ab H B secetur in K: eritque juncta C K ipsi AB parallela.

Aliter, non appropinquando ipsi AB.

Porrò si accidat, ut ad evadendum aliquod periculum vel ob incommodum aliquod ultra C progredi non liceat: poterimus ad idem perficiendum, postquam, ut ante, inventa est linea G C, loco sumendi in

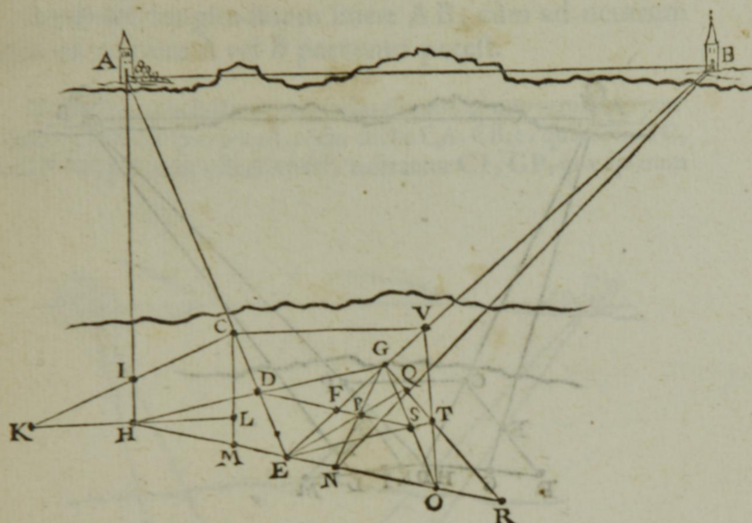
di in ea H I æqualem FD, &c. in producta B D F collocare FL æqualem F D, ac deinde in producta A H F accipere utcunque punctum

M. Fiet enim, ut, si ab L per M recta agatur linea, atque in ea sumatur M N æqualis M L, ac postea ex N per D ducatur N D K, occurrens ipsi H B in K, jungaturque CK, hæc ipsi A B futura sit parallela.

Idem aliter.

Sumpto, ut ante, in producta A C puncto D, in eaque posita D E æquali D C, agatur EB. In qua assumptis E F, F G æqualibus E D, DC, & ex G per D ducta recta G D H, collocetur in ea D H æqualis DG, junganturque H A, HE. Deinde accepto in H A pro libitu puncto I, oportet ex C per I rectam lineam ducere, & in ea assumere I K æqualem I C. Porrò ducta ex K per H recta linea, in eaque accepta H L æquali H K, agatur per utrumque punctum C & L recta C L M, occurrens ipsi HE in M. Quo peracto, si in producta H E sumantur EN, N O ipsis E M, M H æquales, ducanturque N G, G O, quæ à pro-

producta DF secentur in P & S, & ex E per P recta linea agatur EPQ, occurrens ipsi NB in Q, fiet, ut si à G per Q recta ducatur linea GQR,



occurrens productæ HE in R, & ex E per S agatur EST, quæ à GQR secetur in T, ac deinde ex O per T recta OTV, occurrens ipsi EB in V, juncta CV sit ipsi AB parallela.

Idem adhuc aliter & brevius.

Accepto, ut ante, in producta AC puncto D, atque extra eam utcunque puncto E, ducatur ex C per E recta CEF. In qua ponendo EF æqualem EC, ducendoque FD, quæ à producta AE secetur in G, fiat GH æqualis GF. Deinde sumendo extra DB, eamvé productam, pro lubitu punctum I, oportet in linea DI assumere DK, KL, & LM æquales DH, HG, & GF, & in juncta LB accipere utcunque punctum N. Postremò ducendo ex M per N rectam MNO, in eaque collocando NO æqualem NM, oportet ex K per O rectam lineam ducere KOP, quæ à DB secetur in P: eritque juncta CP ipsi AB parallela.

 Ubi

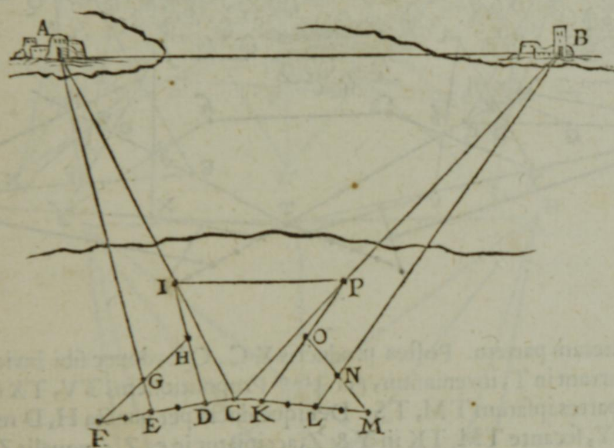
Ubi patet, postquam puncta D & E ita propè ipsum C assumuntur, quantum libet, quo pacto per C recta linea duci possit, quæ ipsi

A B parallela existat, non nisi ad certam distantiæ partem datumvè perticarum numerum retrogradiendo, neque etiam ullatenus ipsam AB appropinquando.

8 PROPOSITIO.

Invenire longitudinem lineæ A B, cùm ad neutrum ejus extremum A vel B perveniri poteſt.

Ut hoc fiat, concipiantur ex puncto aliquo C, è quo utrumque punctum A & B conſpici poteſt, rectæ ductæ C A, C B; ex quibus ſi ad C, ut 4ta Propoſitione oſtenſum eſt, auferantur C I, C P, quæ ipſarum



C A, C B partes ſint aliquotæ, ut, ex. gr., tertia pars: erit ſimiliter juncta I P tertia pars ipſius A B. Cujus itaque I P explorata longitudo ſi in recta aliqua ter ſumatur longitudinem quæſitæ A B exhibebit.

Ubi notandum, inventam I P parallelam quoque eſſe ipſi A B.

Porrò ſi contingat, ut puncta A & B alicubi commodè ſimul videri nequeant, ſed punctum A, exempli gratiâ, tantummodo in locis C & D; & punctum B ſolummodo in E & F, ſumatur in producta

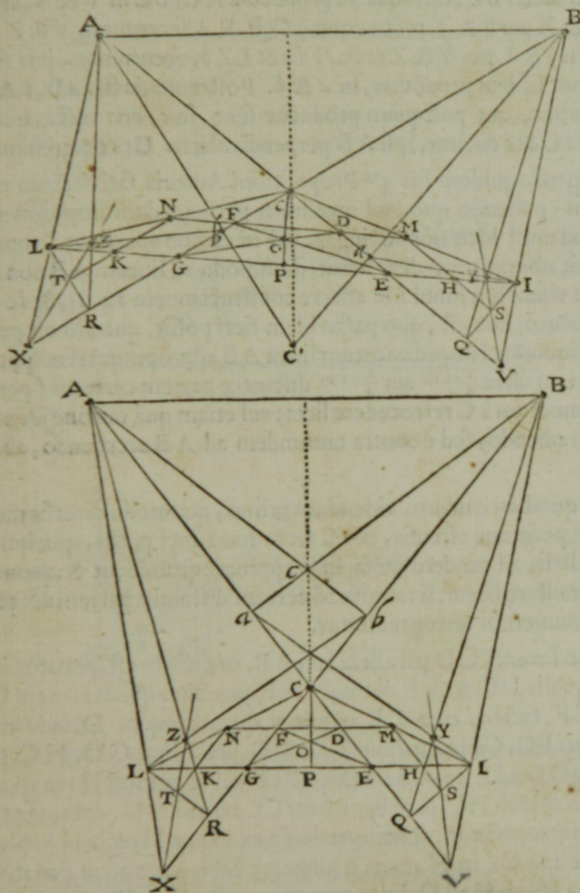
C D utcunque punctum G, & in C A aſſumptis C H, H I æqualibu C D, D G, junctiſque G H, D I, ſeſe interſecantibus in K, agatur ex C per K recta CKL, ſecans DA in L. Deinde ductâ ex H per L rectâ H L M, occurrente productæ C D in M, procedatur eodem modo

ad alteram partem. Poſtea productis K C, QE, donec ſibi invicem occurrant in T, inveniantur, per 4^{tam} Propoſitionem, TV, TX tertiæ partes ipſarum T M, T S. Denique ductâ per puncta H, D rectâ HDY, ſecante TM, TK in Y & Z, accipiatur in ea Z *a* æqualis ZY, junctâque *a* V, ſecante KT in *b*, agatur ex Y per *b* recta Y *bc*, aſſumendo in ea *bc* æqualem *b* V. Eodem pacto ſi ad alteram partem inveniatur punctum *h*, agaturque *ch*, erit ipſa rectæ AB pars tertia, ut & ipſi parallela. Patet itaque, per hanc Propoſitionem nec non præcedentem ac primam, factum eſſe, id quod ab Autore in tribus primis Propoſitionibus requirebatur.

9 PROPOSITIO.

Ex puncto C, utcunque è regione lineæ inaccessæ AB dato, in eandem lineam perpendicularem demittere.

Sumantur in productis AC, BC rectæ CD, DE, CF & FG omnes



inter se æquales, ductâque per G & E rectâ lineâ capiantur in ea hinc inde

inde EH, HI, GK, & KL præcedentibus æquales. Tum junctis CI, CL, quæ à recta per F & D ductâ secentur in M & N, agantur DG, FE, se mutuò secantes in O, & ex C per O recta linea agatur, occurrens ipsi GE in P. Deinde acceptis EQ, GR æqualibus EP, PG jungantur QI, RL, quæ à productis MH, NK secentur in S & T. Porrò productis BI, AL usque ad productas AC, BC in V & X, agantur ex V & X per S & T rectæ, quæ à QB, RA secentur in Y & Z, & ex punctis I & L per Y & Z rectæ IY*a* & LZ *b*, occurrentes ipsis AC & BC, aut iisdem productis, in *a* & *b*. Postremò ductis *a*B, *b*A, sese secantibus, aut postquam productæ sunt, in *c*, erit recta, quæ per puncta C & *c* ducitur, ipsi AB perpendicularis. Ut requirebatur.

Quandoquidem his 4[tæ] Propositioni Autoris satisfactum existimamus, ponendo quòd ad quæsitum perficiendum impedimentum aliquod nulli loco nos astringat, sed in campo apertò ut Propositio requirit ubique procedere liceat, dummodo ad lineam AB non accedatur: visum fuit simul hîc afferre constructionem 14, 15, & 16 Propositionum, hoc est, quo pacto idem fieri possit, quando ob periculum aliquod vel impedimentum linea AB appropinquari nequit, neque etiam ultra $\frac{1}{4}$ tam aut $\frac{1}{8}$ vam distantiæ partem certumvé perticarum numerum à C retrocedere licet; vel etiam quâ ratione idem non retrogradiendo, sed è contra tantundem ad AB accedendo, absolvi queat.

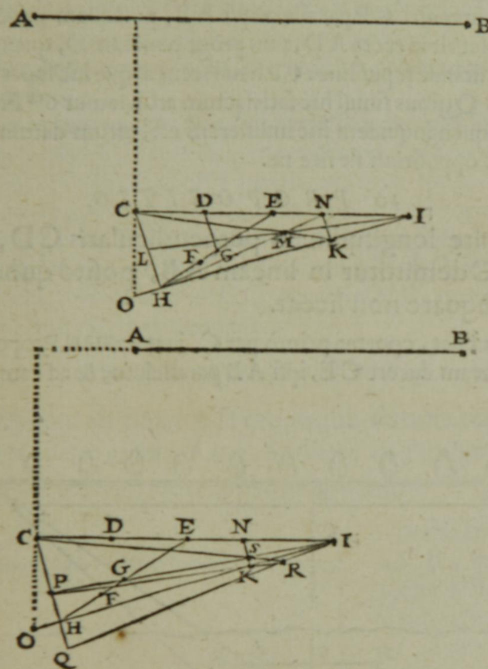
Ad quod faciendum, videndum primò, quomodo diversis modis, 7[mâ] Propositione ostensis, per C recta linea duci possit, quæ ipsi AB sit parallela, ad eandem nullatenus appropinquando; ut & quomodo idem præstare liceat, si tantùm ad certam distantiæ partem aut perticarum numerum retrogradiretur.

Hinc inventâ CD parallelâ ipsi AB, ut dictum est, ponatur in ea DE æqualis DC, & ex E ducatur per F, punctum quodvis extra CD, recta EF, faciens cum CE angulum quemcunque. Deinde in hac assumptis EG, GH æqualibus ED, DC, junctisque GD, HC, producatur CD ad I, ita ut EI sit æqualis EC, & agatur HI: in qua acceptâ KI æquali HC, & in hac rursus CL æquali DG, ducantur CK, LI sese secantes in M. Denique ductâ ex H per M recta HMN, occurrente ipsi CI in N, erit, si jungatur KN, eademque ponatur in productâ IH ab H ad O, linea quæ per puncta O & C vergit ipsi AB perpendicularis.

Vel

Vel etiam sic:

Ductâ ex I per C rectâ IGP, occurrente ipsi CH in P, & in producta CH assumptâ HQ æquali HP, agatur QI, ut & PKR, occurrens ipsi QI in R. Si enim junctâ CR, secante PI in S, ex K per S agatur recta KSN, occurrens ipsi CI in N: erit, ut ante, assumptâ HO æquali KN, linea quæ per puncta O & C transit perpendicularis ipsi AB.



Ubi porrò notandum, quandoquidem liberum est in inventa linea CD accipere punctum D, ut & extra eam punctum F, quòd exinde tam parum à C in linea CD progredi possimus, ut libet, sicut etiam ob angulum CEF pro libitu acutum puncta C & H tam propinqua,

 ita

ita ut ad inveniendum punctum O non nisi ad certam distantiæ partem aut perticarum numerum retrocedere opùs sit, nullatenus lineam AB appropinquando.

Denique si à C retrocedere non daretur, sed duntaxat, quantum dictum est, ad AB accedere liceret: poterit, juxta ultimum modum $7^{mæ}$ Propositionis punctum C, hîc datum, illîc haberi pro puncto D, atque sic inveniri CP parallela ipsi AB, postquam punctum C ibi sumptum fuerit in recta AD, tam prope punctum D, quantum libet, operando deinde super linea CP haud secus atque hîc super CDE factum fuit. Quibus simul hîc satisfactum arbitramur $6^{tæ}$ Propositioni Autoris, quandoquidem hîc indifferens est, utrum datum punctum C ipsi AB oppositum sit nec ne.

10 *PROPOSITIO.*

Invenire longitudinem perpendicularis CD, quæ ex puncto C demittitur in lineam AB, posito quòd ad AB appropinquare non liceat.

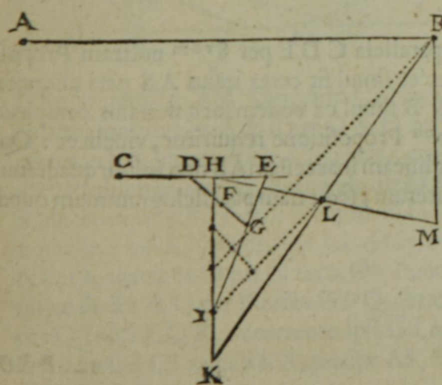
Quod ut fiat, oportet primò per C, juxta 7^{mam} Propositionem, rectam lineam ducere CE, ipsi AB parallelam, & ad eam, ut modò ostensum est, ex C erigere perpendicularem CF. Deinde ductâ FB, secante CE in G, factâque CH æquali CG, & FI æquali FG, positis nempe iisdem in productis EC, BF, agatur HI; In qua assumptâ HK æquali

æquali CF, ducatur ex G per K recta linea, & in ea acceptâ KL æquali KG, agatur ex L per I recta linea. Porrò in hac positâ IM æquali IH, junctâque MG, secante KFN in N, ducatur MB, quæ ab INO secetur in O: eritque, si ex G per O recta linea agatru usque ad productæ LI punctum P, abscissa MP æqualis perpendiculari CD. Hinc exploratâ longitudine lineæ MP, erit etiam longitudo perpendicularis CD data. Atque ita satisfactum est $5^{tæ}$ Propositioni, non appropinquando insuper ad AB, nec etiam, quia punctum F ad arbitrium sumitur in perpendiculari CF, ulteriùs retrocedendo quàm permittitur.

Ubi præterea notandum, si ex C super AB deducenda sit perpendicularis, quæ ipsius CD pars aliquota existat, ut QD, verbi gratiâ, $\frac{1}{4}^{ta}$ ejus pars; vel quæ datæ rectæ æqualis aut certa ejusdem pars sit, utputa $\frac{1}{4}^{ta}$ pars: opùs tantùm esse, abscisâ per 4^{tam} Propositionem ex MP $\frac{1}{4}^{tâ}$ ejus parte RP, vel assumptâ RP æquali datæ aut ipsius parti aliquotæ $\frac{1}{4}^{tæ}$, à C versùs D in directum ipsius FC, juxta 2^{dam} Propositionem, rectam definire CQ æqualem MR, quo simul $8^{væ}$ Propositioni Autoris satisfactum erit.

II PROPOSITIO.

Ad punctum in linea AB utcunque datum rectam lineam ducere æqualem datæ, & super eadem perpendicularem, lineam AB non appropinquando.



Posito enim, quòd ad B, extremum ipsius AB, hujusmodi recta ducenda sit, oportet per C, punctum quodvis, per 7^{mam} Propositionem, ducere CD parallelam AB, & in ea ponere DE æqualem DC. Deinde assumpto extra eam utcunque puncto F, agatur ex D per

per F recta linea, acceptâque in ea DG æquali DE, & ex E per G ductâ rectâ lineâ, ponatur in ea EI æqualis EC. Porrò factâ EH æquali EG, erit HI perpendicularis ad CDE: in qua assumptâ HK æquali datæ rectæ, ducatur KB, quâ, per 4^{tam} Propositionem, bifariam sectâ in L, agatur ex H per L recta linea. Denique acceptâ in hac LM æquali LH, ducatur MB, eritque ipsa æqualis datæ rectæ HK & perpendicularis ad AB, ut requirebatur.

Eodem modo operandum, si quæsita linea ad aliud quodvis punctum in recta AB sit ducenda. Quibus simul satisfactum existimamus $7^{mæ}$ & $10^{mæ}$ Propositionibus Autoris.

Porrò si requiratur, ut linea BM datum angulum cum AB efficiat, poterit, loco ducendi HI perpendicularem ad CDE, ea juxta 6^{tum} Problema Simplex ad aliquod punctum CDE ita duci, ut nimirum angulus CHI dato angulo sit æqualis, operando ulteriùs, ut supra.

Præterea animadvertendum, quòd, si, BM existente perpendiculari super AB, per M, ut ante, recta linea ducatur, quæ ipsi AB sit parallela, aut ad A eodem modo procedatur, quemadmodum hîc ad B, recta quæ bina hæc puncta connectit, ipsi AB futura sit parallela, & in data distantia ab ipsa remota, simulque cum reliquis parallelogrammum rectangulum comprehensura. Quo quidem sensu Autor secundam suam Propositionem procul dubio proposuit, si forte in 7ma aut 8va nostra Propositione verum ejus sensum non fuerimus assecuti.

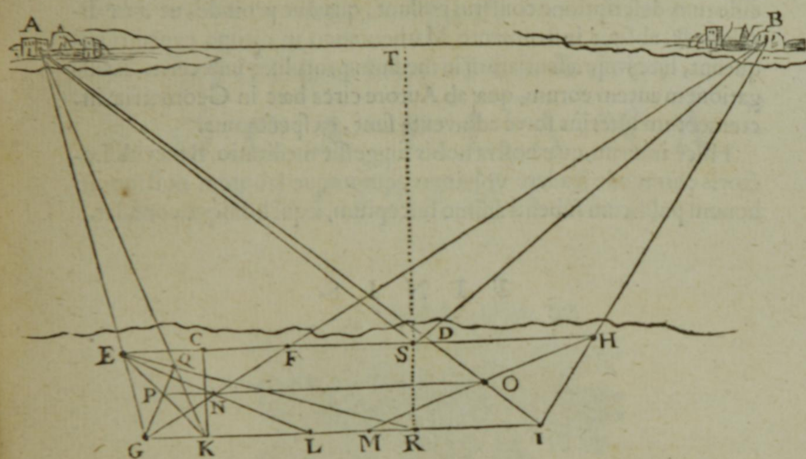
Denique, quoniam parallela CDE per 8^{vam} nostram Propositionem ita invenitur, ut ea simul sit certa ipsius AB pars aliquota, etiamsi duo puncta A & B simul ex eodem loco non sint conspicua, patet hinc id quod in 9na Propositione requiritur, videlicet: Quo pacto hoc in sensu super lineam inaccessam AB non solum quadratum seu rectangulum æquilaterum, sed etiam parallelogrammum quodvis constitui possit.

12 PRO-

12 *PROPOSITIO.*

In data distantiâ à linea A B, per punctum C determinatâ, invenire punctum S, æquidistans ab utroque extremo inaccessæ AB.

Ad quod expediendum, oportet, ductâ per C, juxta 7mam Propositionem, rectâ CD ipsi AB parallela, in eadem utrinque assumere CE, C F, inter se æquales, ita ut, si ex punctis A & B per E & F rectæ lineæ agantur, ipsæ concurrant in G. Id quod semper fit, existente



E F minori quàm AB. Deinde in C D sumendo D H æqualem E F, oportet similiter ex A & B per D & H rectas lineas ducere, concurrentes in I, & jungere G I. Quo facto, erigatur ex C super C D, per 4tum Problema Simplex, perpendicularis C K, occurrens ipsi G I in K, ducaturque EK. Porrò acceptis in G I rectis G L, M I, singulis æqualibus ipsi E F, junctisque E L, MH, secantibus G FB & ADI in N & O, agatur ex O per N recta ONP, occurrens ipsi E K in P. Denique ductâ & G per P rectâ G P Q, secante K A in Q, ac inde ex E per Q rectâ E Q R, occurrente ipsi G I aut eidem productæ in R: erunt, positâ CS æquali K R, junctæ AS, SB æquales, adeoque punctum S quæsitum.

Haud

Haud ſecus etiam quodvis punctum in recta R S T aſſumptum à punctis A & B æquè remotum erit.

Ubi liquet, quæſitum hâc ratione non ſolùm inveniri, nullatenus ad AB accedendo (quo ſenſu 11^mam^ Propoſitionem Autoris intelligendam eſſe confido); verùm etiam haudquaquam ad eam appropinquando; ac inſuper, quoniam E C, CF pro lubitu ſumuntur æquales, non niſi ad certam diſtantiæ partem aut datum perticarum numerum retrocedendo.

Denique quod attinet ad 12 & 13^tiam^ Propoſitionem Autoris, quandoquidem eas tales cenſeo, quæ non niſi unius aut plurium circulorum deſcriptione conſtrui poſſunt, quæque proinde, ut ante dictum eſt, abſque inſtrumento Mathematico in campo expediri nequeunt, hæc impræſentiarum in medium protuliſſe ſuffecerit. Evulgationem autem eorum, quæ ab Autore circa hæc in Geometriæ incrementum ulteriùs fortè adinventa ſunt, exſpectamus.

Hiſce interim, quæ noſtra nobis ſuggeſſit meditatio, Benevoli Lectoris commodo ſtudere voluimus, qui itaque laborem noſtrum, in bonum publicum lubenti animo ſuſceptum, æqui boniq́ue conſulat.

F I N I S.

FRAN-

191

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONVM MATHEMATICARUM,
LIBER III.
CONTINENS
APOLLONII PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.



LVGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIƆ IƆC LVI.



ILLVSTRISSIMO VIRO,

D^no PETRO CHANUTO,

Regis Christianissimi in Concilio Status Consiliario Ordinario & Quæstorum Galliæ Conventu, Ricomagi Arvernorum, Præsidi; antehac ad Coronam Sueciæ & Confœderati Belgii Ordines Legato.

Vir Illustrissime,

QUemadmodum in veritatis investigandæ studio, quæ omnis scientiæ finis animiqúe cibus & genuinum alimentum est, nullæ utique Disciplinæ animos discentium ad illam assequendam aptiores alacrioresqúe reddunt, quàm quæ in veri inquisitione continuè occupatæ certitudinis evidentiâ alias disciplinas antecellunt; ita etiam Mathematicæ, quæ ferè hactenus solæ demonstrationibus gavisæ sunt, præter summam suam ad vitæ commoda necessi-

tatem, huc etiam ſemper quàm maximè utiles judicatæ, magnoqúe idcirco apud perſpicaciſſimos quoſque in pretio habitæ ſunt. Etenim ſi perpendamus, quo pacto ipſæ à rebus notiſſimis initium capientes ad abditiſſimarum rerum cognitionem brevi tempore nos perducant, ſicqúe mentem è terra quaſi in cœlum ſubvehant: facilè conſtabit, quam ob cauſam Veteres, quò ingenium adhuc infirmum in rectè judicando docile redderetur, eas ante alias omnes ſcientias ac artes excolendas ſibi duxerint. Hanc igitur viam ubi prudentiorum quiſpiam, ad præclara natus, ſeriò ſemel eſt ingreſſus, mirum quanto cum ſucceſſu tam in reliquis ſtudiis ritè pertractandis, quàm in ſummis muneribus fœliciter adminiſtrandis operam ille ſuam collocaverit. In te unum, Vir Illuſtriſſime, ſi intuear, cui μελετήματα hæc ſacra eſſe volui, non eſt quod alios hîc in teſtes advocem, quippe tu, quanta ex Diſciplinis hiſce emolumenta dimanent, ſæpiùs accurato tuo judicio prudentiqúe conſilio comprobâſti. Teſtatur hoc eximius ille tuus in Mathematicas Scientias amor, quo in earum adyta non modò jam dudum penetrâſti ac in iiſdem recolendis, ubi graviora id tua permittunt negotia, etiamnum maximopere delectaris; ſed etiam ſolidiori eruditioni

tioni vel uſque adeò faves, ut ſtrenuos ejuſdem cultores inſigni benignitate foveas, atque multis honorum titulis proſequaris. Quâ adeò ex re contigit, ut reliqua tua ſublimiora ſtudia ea hactenus ingenii dexteritate tractaveris, ut cordatiorum omnium acclamationes & ἐυφημίαι ad te concordantibus eant ſuffragiis. Porrò quantâ in rebus agendis prudentiâ valeas, teſtis eſt ſplendidiſſima tui nominis fama, quæ virtutes tuas paſſim promulgans, ubi in aulam pervolavit, effecit, ut meritiſſimo tibi Chriſtianiſſimus Rex ſuprema munera deſtinaverit. Vnde factum ut non ſolùm ipſius nomine ad Eruditiſſimam ac Sereniſsimam quondam Suecorum Reginam, & deinde ad Præpotentes ac Illuſtriſsimos Fœderati Belgii Ordines Legatus Ordinarius miſſus fueris; verùm etiam, quò ubique ſapienti prudentiq́ue tuo conſilio prodeſſes, Lubecæ in componendis Poloniæ ac Sueciæ litibus Mediator extiteris. Et verò ne Gallia ipſa, ortis in ea diſsidiis, conſilii tui fœlicitate orbata foret, cùm præſentia tua illîc quàm maximè exigebatur, tu inquam, Vir Illuſtriſsime, domum revocatus tempore difficillimo, pacem inter diſſentientes cum applauſu conciliâſti. Quapropter, cum iſtam ſingularem ſapientiam ac prudentiam unuſquiſque

in te veneretur, eximiiqúe inſuper affectus tui erga verè eruditos teſtimonium hoc publicum extet, quòd monumentum Holmiæ admodum luculentum in perpetuam memoriam viri maximi ac Gallici nominis decoris ſempiterni, RENATI DES CARTES, erigi curaveris; haud committendum putavi, quum hoc ſtudii genere tibi conjunctiſsimus ſim, ut meum erga te affectum diutiùs occultarem. Hinc, quæ animo jam pridem volvere cœpi, atque in Mathematicarum Diſciplinarum incrementum ac reſtitutionem molitus ſum, ſub tuo auſpicio in publicum dare conſtitui. perſuaſus, quæ ſtrenuis Matheſeos cultoribus non ingrata fore intellexi, ea neque limato tuo judicio diſplicitura. Excipe ergo benigniter, Vir Illuſtriſsime, hanc devotæ mentis meæ teſſeram, &, qui me antehac inter tuos recepiſti, patere conatus etiam hoſce, tuo patrocinio munitos, ſub Illuſtris Tui Nominis ſplendore in lucem prodire. Quod ſupereſt, Deum Opt. Max. ſupplex rogo, ut te literatis omnibus, ſtudiorumqúe candidatis quàm diutiſsimè ſervet incolumem ac felicem.

Illuſtriſſimo Nomini Tuo

devotiſſimus

FR. à SCHOOTEN.

Dabam Lugd. Bat. Kalendis Januariis, Anni CIↃ IↃCLVII.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

Lector benevole,

GEometriam olim à Græcis ad summum fastigium fuisse evectam, cum ex ingenii monumentis, vix dum ex naufragio nobis servatis; tum ex successorum testimoniis luculenter colligimus. Omnium tamen illorum, quæ ab ipsis ingeniosè & summo acumine in Geometrico negotio inquisita videntur (nostrâ quidem sententiâ) primam classem meretur Locus, ipsis vocatus ἀναλυόμενος, hoc est, resolutus. De quo scripserunt Euclides, Apollonius Pergæus, & Aristæus senior. Est enim, teste Pappo Alexandrino in præfatione VII libri Collectionum Mathematicarum, hæc propria quædam materia, post communium Elementorum constitutionem, iis parata, qui in Geometricis sibi comparare volunt vim ac facultatem inveniendi Problemata, quæ ipsis proponuntur. Dictorum autem librorum, qui ad Resolutum Locum pertinent, ordo, juxta Pappum, talis est.

Euclidis Datorum liber unus. Apollonii λόγου ἀποτομῆς, h. e, de Rationis sectione libri duo. χωρίου ἀποτομῆς, h. e, de Spatii sectione duo. Ἐπαφῶν, h. e, Tactionum duo. Euclidis Porismatum tres. Apollonii νεύσεων, h. e, Inclinationum duo. Ejusdem τόπων ἐπιπέδων, h.e, Planorum Locorum duo. Apollonii Conicorum octo. Aristæi τόπων στερεῶν, h. e, Solidorum Locorum quinque. Euclidis τόπων πρὸς ἐπιφανείᾳ, h. e, Locorum ad Superficiem duo. Eratosthenis de Medietatibus duo. Quorum omnium librorum sola Euclidis Data, unà cum quatuor prioribus libris Conicorum Apollonii ad manus nostras pervenerunt, reliqui omnes temporum injuriâ perierunt, magno sanè Reipublicæ Literariæ detrimento: Imò, nisi Pappus eorum mentionem fecissent, planè fuissent obliterati.

Quapropter cum ipſe breviter nonnulla recenſeat Problemata & Propoſitiones iſtorum librorum, Recentiorum aliqui eorum jacturam dolentes ſummâ ope conati ſunt iſtos ex Pappi relatione reſtituere, atq; ſic quaſi mortuis vitam redonare. Ita paucorum annorum decurſu duo Apollonii libri de rationis ſectione, duo de ſpatii ſectione, duo determinatæ ſectionis nobis per Willebrordum Snellium reſtaurati ſunt, Tactionum per Franciſcum Vietam, Inclinationum per Marinum Getaldum, & Alexandrum Anderſonum, qui duos de determinatâ ſectione poſtea aliter quoque quàm Snellius demonſtravit. Quorum exemplo excitati, nos etiam in Apollonio noſtras vires periclitari, ejuſq; Loca Plana reſuſcitare aggreſſi ſumus, juxta illa quæ Pappus prædicto loco nobis reſervavit, quæq; ſecundùm Commandini verſionem ita ſonant.

De Locis Planis, ex Pappo.

Locorum omnium alii ſunt ἐφεκτικοὶ, hoc eſt, in ſe ipſis tantùm conſiſtentes, de quibus & Apollonius ante propria elementa dicit puncti quidem locum eſſe punctum, lineæ locum lineam, ſuperficiei ſuperficiem, & ſolidi ſolidum; alii autem διεξοδικοὶ, hoc eſt, ſeſe extra tendentes, ut puncti locum lineam, lineæ ſuperficiem, ſuperficiei ſolidum. Locorum autem, qui in reſoluto loco, alii quidem poſitione dati ἐφεκτικοὶ ſunt, alii autem plani dicti, & ſolidi, & lineares: διεξοδικοὶ verò ſunt punctorum, & alii ad ſuperficies. ἀναστροφικοὶ quidem punctorum, διεξοδικοὶ autem linearum. Lineares loci ex iis qui ſunt ad ſuperficies demonſtrantur.

Conferantur hæc cum iis, quæ extant pag. 39, lib. 2di Geometriæ Renati des Cartes, ubi hæc clariùs explicantur.

Dicuntur autem plani loci tum hi, de quibus agemus, tum universè quicunque ſunt rectæ lineæ, vel circuli. Solidi loci quicunque ſunt conorum ſectiones, parabolæ, vel ellipſes, vel hyperbolæ. Lineares loci, quicunque lineæ ſunt, neque rectæ, neque circuli, neque aliqua dictarum coni ſectionum.

Loci autem ab Eratoſthene inſcripti ad medietates ex præ-

prædictis genere ſunt à proprietate hypotheſeon in illis.

Antiqui igitur horum planorum ordinem reſpicientes elementa tradiderunt, quem cum negligerent poſteriores, alios appoſuerunt, tanquam non infinitos multitudine, ſi quis velit aſcribere quæ ordinem illum conſequantur. itaque ponam propoſiti quidem poſteriora, ordine autem priora, unâ propoſitione comprehendens, hoc modo:

Si duæ lineæ agantur, vel ab uno dato puncto, vel à Prop. 1.
duobus, & vel in rectam lineam, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter ſe datam proportionem habentes, vel datum comprehendentes ſpacium: contingat autem terminus unius locum planum poſitione datum, & alterius terminus locum planum poſitione datum continget, interdum quidem ejuſdem generis, interdum verò diverſum, & interdum ſimiliter poſitum ad rectam lineam, interdum contrario modo. Hæc autem fiunt juxta differentias ſubjectorum.

At propoſita in principio quidem tertii libri à Charmandro his congruunt.

Si rectæ lineæ poſitione datæ unus terminus datus ſit, 2.
& alter circumferentiam concavam poſitione datam contingét.

Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, da- 3.
tum angulum continentes: commune ipſorum punctum continget circumferentiam concavam, poſitione datam.

Si trianguli ſpacii magnitudine dati, baſis poſitione & 4.
magnitudine data ſit, vertex ipſius rectam lineam poſitione datam continget.

Alia autem hujuſmodi:

Si rectæ lineæ magnitudine datæ, & cuipiam poſitione 5.
datæ æquidiſtantis unus terminus contingat rectam lineam

am poſitione datam, & alius terminus rectam lineam poſitione datam continget.

6. Si à puncto quodam ad poſitione datas duas rectas lineas parallelas, vel inter ſe convenientes ducantur rectæ lineæ in dato angulo, vel datam habentes proportionem, vel quarum una ſimul cum eâ, ad quam altera proportionem habet datam, data fuerit, continget punctum rectam lineam poſitione datam.

7. Et ſi ſint quotcunque rectæ lineæ poſitione datæ, atque ad ipſas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, ſit autem quod data linea & ducta continetur, unà cum contento data linea & altera ducta, æquale ei, quod data, & alia ducta, & reliquis continetur: punctum ſimiliter rectam lineam poſitione datam continget.

8. Si ab aliquo puncto ad poſitione datas parallelas ducantur rectæ lineæ in datis angulis, quæ ad puncta in ipſis data abſcindant rectas lineas, vel proportionem habentes, vel ſpacium continentes datum, vel ita ut ſpecies ab ipſis ductis vel exceſſus ſpecierum æqualis ſit ſpacio dato: punctum continget poſitione datas rectas lineas.

Secundus autem liber hæc continet.

1. Si à datis punctis rectæ lineæ inflectantur, & ſint quæ ab ipſis fiunt dato ſpacio differentia: punctum poſitione datas rectas lineas continget. Si ſint in proportione data, vel rectæ lineæ, vel circumferentiæ.

2. Si ſit poſitione data recta linea, & in ipſa datum punctum, à quo ducatur quædam linea terminata, à termino autem ipſius ducatur & ad poſitionem, & ſit quod fit à ducta æquale ei, quod à data, & abſciſſa, vel & ad datum punctum, vel ad alterum punctum datum, vel ad alterum datum in linea data poſitione: terminus ipſius poſitione datam circumferentiam continget.

Si à duobus punctis datis rectæ lineæ inflectantur, & ſit quod

quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato major, quàm in proportione: punctum positione datam circumferentiam continget.

4. Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & sint species, quæ ab omnibus fiunt dato spacio æquales: punctum continget positione datam circumferentiam.

5. Si à duobus punctis datis inflectantur rectæ lineæ, à puncto autem ad positione ductam lineam abscissa à recta linea positione data ad datum punctum, & sint species ab inflexis æquales ei, quod à data, & abscissa continetur: punctum ad inflexionem positione datam circumferentiam continget.

6. Si in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur; sit autem quod fit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra sumpta, vel soli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus continetur: punctum extra sumptum positione datam rectam lineam continget. Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem datam circumferentiam.

In pertractatione harum Propositionum, ab Apollonio, uti apparet, instar Theorematum traditarum, operæ pretium nos facturos judicavimus, si maximam illarum partem ut Problemata expediremus, ut tantò insignitior earum usus extaret: adeò quidem, ut non modò nuda istarum veritas cuique in proclivi esset; verùm ipse quoque easdem solvendi ac construendi modus indicaretur. Quoniam autem in plerisque harum propositionum propter casuum multitudinem plures figuræ fuissent exhibendæ, quibus hujus operis sumptus, magis quàm

 par

par erat, excrevissent, & in quibus omnibus explicandis longiores fuissemus: idcirco casus tantùm præcipuos elegimus, ne illorum multitudine Lectorem confunderemus, nevé ipsius patientiâ abuteremur. Vbi porrò illud monendum duximus, nos consultò in id allaborasse, ut singula hîc Theoremata & Problemata, quantùm fieri posset, à se invicem essent distincta, ne concatenato ordine à capite usq; ad calcem forent evolvenda, sed ubique pro arbitrio Lectoris studium occuparetur.

Restat denique ut edocearis, Amice Lector, quo in primis consilio laborem hunc susceperimus: nimirum, ut novis exemplis ac nobilioribus Apollonii Problematîs Geometriæ Methodus, viri incomparabilis & nunquam satis laudati Renati des Cartes, in quam antehac commentaria edidimus, majorem lucem acciperet. Etenim ejus vestigiis, quibus in sua Geometria nobis præcessit, insistentes, ut calculi Geometrici studiosis ansam se exercendi subministraremus, nonnulla, ad ipsa universaliora reddenda, ab iisq; parum aliena, de nostro adjecimus. Ne autem frequentiori calculo dictæ Methodi imperitis aut minus exercitatis tædium excitaremus, nevé omnem ejus studiosis se exercendi materiam præriperemus; sed potiùs utrique parti, quantum in nobis est, satisfieret: ideo in his Locis restituendis, is noster scopus fuit, ut solùm in difficilioribus, quæ non neminem remorari possent, analysis nostra exerceretur; in reliquis verò vulgaris pertractandi modus observaretur. E quibus (uti confidimus) Candido Lectori satis superqúe constabit, quid causæ fuerit, cur sola difficiliora per calculum Geometricum expediverimus, scilicet ut nimiam Lemmatum multitudinem, quibus aliàs difficulter carere licuisset, evitaremus; quamvis hæc via æquè nobis in promptu fuisset, atque altera. Studio itaque nostro & inventis, quæ in artis propagationem elucubravimus, fave ac fruere. Vale.

APOL-



APOLLONII PERGÆI LOCA PLANA RESTITUTA.

IN PRIMI LIBRI PROPOSITIONES, THEOREMATA ET PROBLEMATA.

In 1mam Propositionem

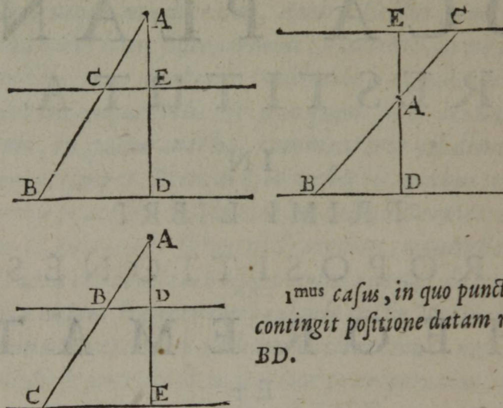
I *THEOREMA*.



SI à dato puncto A in rectam lineam vel directum duæ agantur rectæ A B, A C, datam inter ſe habentes rationem; & B terminus unius A B contingat locum planum B D poſitione datum: ſimiliter quoque C, terminus alterius A C, locum planum poſitione datum continget.

Constructio 1^{mi} *casus.*

Primò enim cadente B in recta linea BD, si ex alio quocunque in ea puncto D ad A recta linea perducatur, fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE: dico C punctum rectam lineam contingere, quæ per E ipsi BD ducitur parallela.



1^{mus} *casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.*

Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Cum enim per constructionem BA ad AC sit, sicut DA ad AE: erit[a] juncta CE ipsi BD parallela. Hinc, quum una duntaxat recta per E duci possit, quæ ipsi BD parallela existat, necessum est, ut C punctum eandem contingat. Quod erat propositum.

a p 2. libr. 6. Elem.

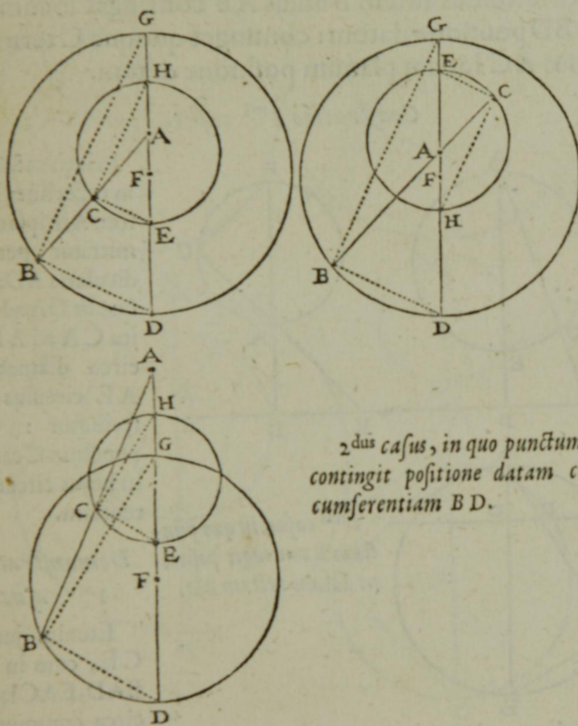
Constructio 2^{di} *casus.*

Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, agatur per puncta A, F recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in D & G, fiatque ut BA ad AC, sic DA ad AE; ac rursus ut BA ad AC, sic GA ad AH. Tum descripto circa diametrum EH circulo, dico punctum C cadere in ipsius circumferentiam.

De-

Demonstratio 2^{di} casus.

Junctis enim DB, B G, ut & E C, C H, quoniam per constructionem B A est ad A C, sicut D A ad A E: erit [b] recta B D rectæ CE parallela. Eodem modo, cum BA ad AC sit, sicut GA ad AH, erit recta BG rectæ C H parallela. Hinc, cum propter parallelas B D, C E an- *b p 2. libr. 6. Elem.*



2^{dus} *casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam B D.*

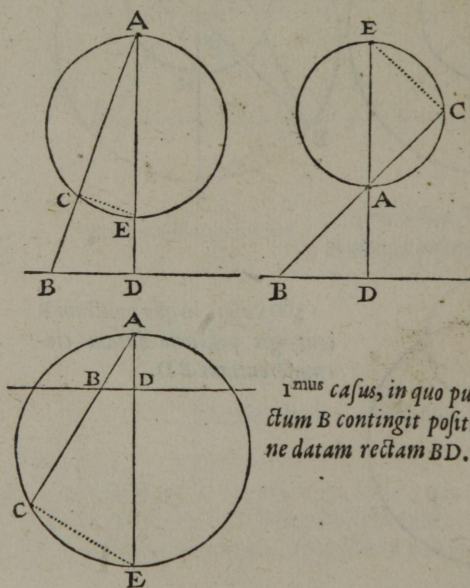
guli D B A & E C A [c] sint æquales, similiterque propter parallelas B G, CH anguli ABG & ACH æquales sint, erit quoque D B G ipsi E C H æqualis. Est autem [d] D B G, in semicirculo, rectus. Quare etiam ECH rectus erit. Ac proinde punctum C in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum. *c p 29. libr. 1. Elem. d p 31. libr. 3. Elem.*

Si ergo à dato puncto A in rectam lineam vel directum, &c. Quod erat ostendendum.

II THEOREMA.

Si à dato puncto A in rectam lineam vel directum duæ agantur rectæ AB, AC, datum continentes spacium BAC; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD positione datum: continget quoque C terminus alterius AC locum planum positione datum.

Constructio 1^{mi} *casus.*



1^{mus} *casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam BD.*

Primò cadente B in recta linea BD, si ex A in ipsam demittatur perpendicularis AD; fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE, & circa diametrum AE circulus describatur: dico punctum C cadere in hujus circumferentiam.

Demonstratio 1^{mi} *casus.*

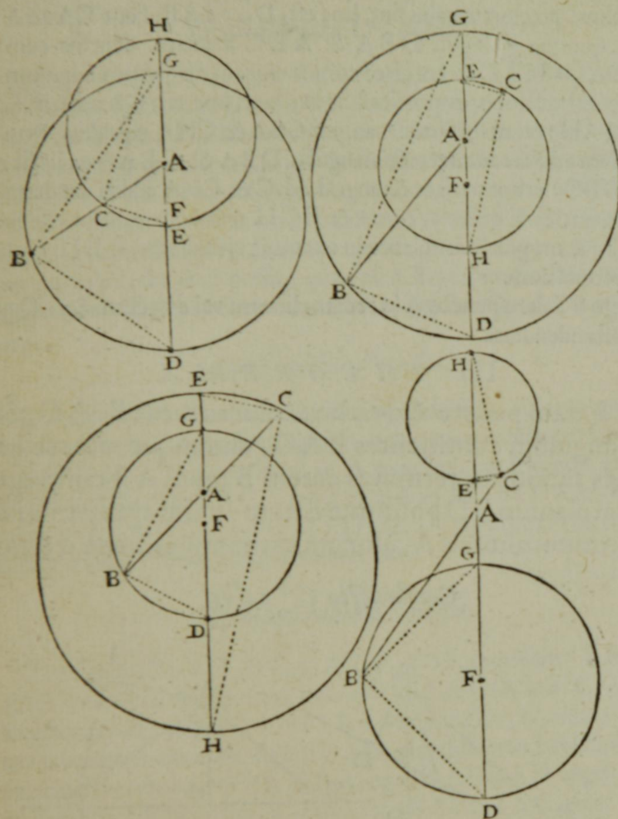
Etenim junctâ CE, cum in $\triangle^{lis}$ BAD, EAC latera circa communem aut æqualem angulum ad A ex constructione proportionalia existant, hoc est, DA ad AB, sicut CA ad AE: erunt quoque [a] anguli ad D & C æquales. Est autem D angulus in $\triangle^{lo}$ BAD per constructionem rectus. Quocirca & angulus ad C in $\triangle^{lo}$ EAC rectus erit, ac proinde punctum C in circulo, cujus diameter AE. Quod erat propositum.

a p 6. libr. 6. Elem.

Con-

Constructio 2^di casus.

Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, si per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ termi-



2^dus *casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam B D.*

nata in D & G, fiatque ut DA ad AB, ita CA ad AE; ac rursus, ut GA ad AB, ita CA ad AH, & diametro EH circulus describatur: Dico in hujus circumferentiam cadere punctum C.

De-

Demonstratio 2^di casus.

Junctis namque BD, BG, ut & CE, CH, quoniam in $\triangle^{lis}$ BAD, EAC circa communem aut æqualem angulum ad A latera ex constructione proportionalia sint, hoc est, DA ad AB, sicut CA ad AE: erunt quoque [b] anguli DBA & AEC æquales. Rursus cum in $\triangle^{lis}$ BAG, HAC latera circa communem aut æqualem angulum ad A ex constructione proportionalia existant, hoc est, GA ad AB, sicut CA ad AH: erunt similiter [c] anguli GBA & CHA æquales. Porrò, quoniam additis aut detractis angulis DBA & GBA [d] ex iis fit rectus DBG: erunt pariter & anguli AEC & CHA additi aut detracti recto æquales. E quibus, cum [e] & ECH rectum angulum esse constet, sequitur, punctum C fore in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum.

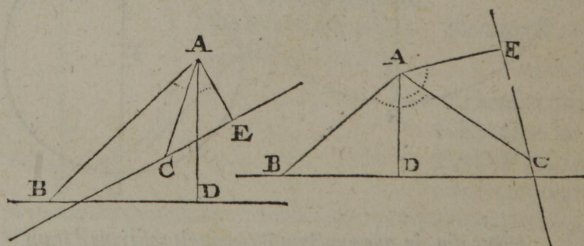
b p 6. libr. 6. Elem.
c p 6. libr. 6. Elem.
d p 31. libr. 3. Elem.
e p 32. libr. 1. Elem.

Ergo si à dato puncto A in rectam lineam vel directum &c. Quod erat ostendendum.

III THEOREMA.

Si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, datum angulum continentes BAC, datamque inter se habentes rationem; terminus autem B unius AB contingat locum planum BD positione datum: continget pariter & C, terminus alterius AC, locum planum, positione datum.

Constructio 1^mi casus.



1^mus *casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam* BD.

Primò cadente B in recta linea BD, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis AD, ac juxta hanc ad punctum A construatur angu-

lus

lus DAE æqualis dato BAC; fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE: Dico punctum C cadere in rectam lineam per E ductam, huic AE perpendicularem.

Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Quoniam enim [a] BA ad AC est, sicut DA ad AE; permutando erit [b] BA ad AD, sicut CA ad AE. Porrò cum æquales sint anguli BAC & DAE, & iisdem addito aut subtracto communi angulo DAC, angulus quoque BAD ipsi CAE est æqualis: erit, junctâ CE, $\triangle$ BAD ipsi CAE [c] æquiangulum. Est autem angulus ad D in $\triangle^{lo}$ BAD [d] rectus. Quare etiam angulus ad E in $\triangle^{lo}$ CAE rectus erit, hoc est, juncta CE ipsi AE erit perpendicularis. Quum verò ad E non nisi una recta duci possit, quæ ipsi AE perpendicularis existat, manifestum est, C punctum eandem contingere. Quod erat propositum.

a *Ex constructione.*
b ℘ *16. libr. 5. Elem.*
c ℘ *6. libr. 6. Elem.*
d *Ex constructione.*

Constructio 2^{di} *casus.*

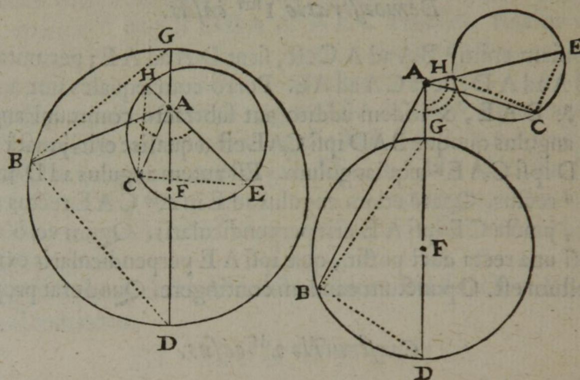
Deinde cadente B in circuli circumferentia BD, cujus centrum F, si per puncta A, F recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in D & G, ac juxta hanc ad A punctum constituatur angulus DAE æqualis dato BAC; fiatque ut BA ad AC, ita DA ad AE; ac rursus ut BA ad AC, ita AG ad AH: dico C punctum in circuli circumferentiam cadere, cujus diameter EH.

Demonstratio 2^{di} *casus.*

Etenim junctis BD, BG, ut & CE, CH, quoniam [e] BA est ad AC, sicut DA ad AE: permutando erit [f] BA ad AD, sicut CA ad AE. Porrò cum anguli BAC & DAE [g] sint æquales, &, iisdem addito aut subtracto communi angulo DAC, angulus item BAD ipsi CAE sit æqualis: erit pariter [h] & DBA angulus $\triangle^{li}$ BAD angulo ECA trianguli CAE æqualis. Rursus quia [i] BA est ad AC, sicut AG ad AH: permutando erit [k] BA ad AG, sicut CA ad AH. Unde cum hæc latera existant $\triangle^{lorum}$ BGA & CHA, quæ sunt circa æquales angulos BAG, CAH: erunt itidem anguli ABG & ACH in iisdem $\triangle^{lis}$, [l] æquales. Quia autem anguli DBA, ABG additi aut detracti faciunt rectum angulum DBG; at verò anguli ECA, ACH similiter additi aut detracti faciunt angulum ECH: erit pariter ECH rectus angu-

e *Ex constructione.*
f ℘ *16. libr. 5. Elem.*
g *Ex constructione.*
h ℘ *6. libr. 6. Elem.*
i *Ex constructione.*
k ℘ *16. libr. 5. Elem.*
l ℘ *6. libr. 6. Elem.*

angulus, ac proinde C punctum in circulo, cujus diameter EH. Quod erat propositum.



2dus casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam B D.

Ergo si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat ostendendum.

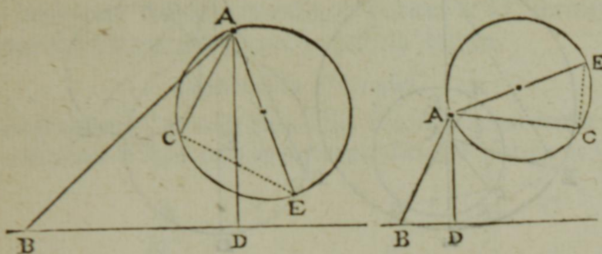
IV *THEOREMA.*

Si à dato puncto A duæ lineæ agantur AB, AC, datum angulum continentes B A C, datumque comprehendentes spacium B A C; & B terminus unius A B contingat locum planum BD, positione datum: continget quoque C terminus alterius AC locum planum, positione datum.

Con-

Constructio 1^{mi} *casus.*

Primò cadente B in recta linea B D, si ex A super eam demittatur perpendicularis A D, ac juxta hanc ad punctum A constituatur angu-



1^{mus} *casus, in quo punctum B contingit positione datam rectam B D.*

lus DAE æqualis dato B A C; fiatque ut D A ad A B, ita C A ad A E: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter AE.

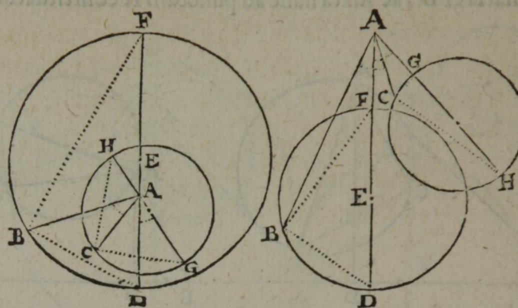
Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Angulo enim D A E per fabricam æquali existente angulo BAC, si iis addatur auferaturvé communis angulus C A D: erit quoque angulus CAE ipsi BAD æqualis. Deinde junctâ C E cum latera △^{lorum} BAD & EAC circa hosce æquales angulos ex constructione proportionalia sint: nimirum, DA ad AB, sicut C A ad A E: erunt similiter qui ad D & C anguli in iisdem △^{lis}, per 6 prop.6^{ti} libr. Elem., æquales. Est autem qui ad D in △^{lo} BAD rectus. Quare etiam is, qui ad C, in △^{lo} E A C rectus erit: adeoque punctum C in circulo, cujus diameter A E. Quod erat propositum.

Constructio 2^{di} *casus.*

Deinde cadente B in circuli circumferentia B D, cujus centrum E, si per puncta A, E recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata in D & F, ac juxta hanc ad A punctum constituatur angulus

D A G æqualis dato B A C; fiatque ut DA ad A B, ita C A ad AG; ac



2dus casus, in quo punctum B contingit positione datam circumferentiam BD.

rursus ut F A ad A B, ita C A ad A H: Dico C punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GH.

Demonstratio 2di casus.

Junctis B D, C G, quoniam, ut supra, anguli B A D & CAG sunt æquales, atque circa eos latera in △lis BAD, CAG, per constructionem, proportionalia: videlicet, DA ad AB, sicut C A ad AG: erunt quoque anguli D B A & A G C in iisdem △lis, per 6 Prop. libr. 6. Elem., æquales. Rursus, quoniam junctis B F, C H, in △lis BFA & CHA latera, quæ circa æquales angulos BAF, CAH, ex fabrica sunt proportionalia: nimirum, FA ad AB, sicut CA ad AH: erunt similiter anguli ABF & CHA in iisdem △lis, per 6.6., æquales. Hinc cum anguli D B A & A B F additi aut detracti rectum efficiant angulum D B F: erunt pariter anguli A G C & CHA additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & G C H angulum rectum esse, per 32 prop. 1. libr. Elem., constet, sequitur C punctum in circulo fore, cujus diameter est GH. Quod erat propositum.

Ergo si à dato puncto A duæ lineæ ducantur AB, AC, &c. Quod erat ostendendum.

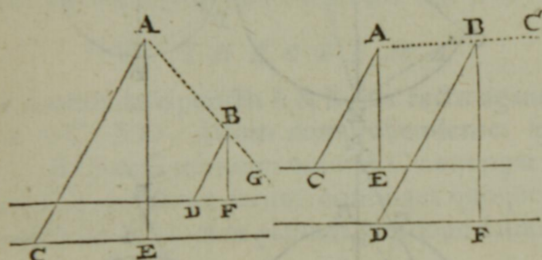
V THEO-

V THEOREMA.

Si à duobus datis punctis A & B duæ agantur rectæ parallelæ A C, B D, datam inter se habentes rationem A C ad B D; & C terminus unius A C contingat locum planum C E, positione datum: continget pariter & D, terminus alterius B D, locum planum positione datum.

Constructio I^{mi} *casus.*

Primò cadente C in recta linea C E, si ex A in ipsam demittatur perpendicularis A E, & ex B agatur ei parallela B F, fiatque ut C A



I^{mus} *casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam* C E.

ad D B, ita A E ad B F: Dico D punctum cadere in rectam lineam, ductam per F ipsi B F perpendicularem.

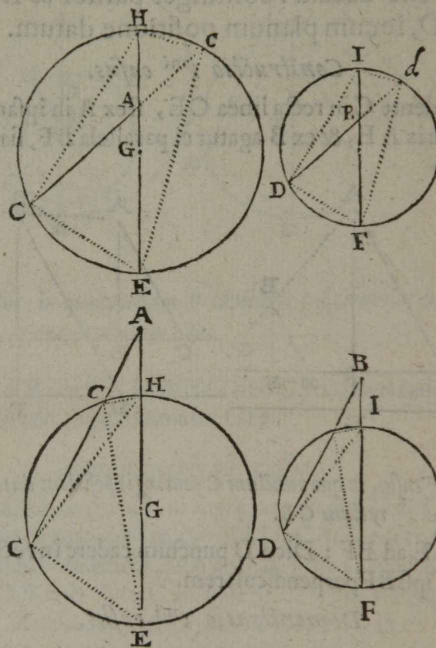
Demonstratio I^{mi} *casus.*

Quoniam enim, ductâ per puncta A, B rectâ lineâ A B G, anguli C A G, D B G, ut & E A G, F B G [a] sunt æquales, erunt quoque C A E & D B F æquales. Deinde cum [b] C A ad D B sit, sicut A E ad B F, permutando erit [c] C A ad A E, sicut D B ad B F. Hinc, junctâ D F, quoniam $\triangle^{lorum}$ C A E, D B F anguli ad A & B sunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter [d] ad E & F anguli æquales. Est autem qui ad E in $\triangle^{lo}$ C A E rectus. Quare & is, qui ad F in $\triangle^{lo}$ D B F rectus erit; adeoque D F ipsi B F perpendicularis. Unde cum una tantùm recta per F duci possit, quæ ipsi B F perpendicularis existat, sequitur D punctum eandem contingere. Quod erat propositum.

a p 29. libr. 1 Elem.
b p Constructionem.
c p 16. libr. 5. Elem.
d p 6. libr. 6. Elem.

Constructio 2^di casus.

Dein cadente C in circuli circumferentia C E, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H; ductâque per B rectâ BF ipsi AE parallelâ, fiat ut CA



2^dus casus, in quo punctum C contingit positione datam circumferentiam C E.

ad DB, ita AE ad BF; ac rursus ut CA ad D B, ita AH ad BI. Postea descripto circa diametrum FI circulo: Dico punctum D cadere in ipsius circumferentiam.

Demonstratio 2^di casus.

Etenim junctis C E, *c* H, ut & D F, *d* I, quoniam, ut supra, anguli

CAE

CAE & DBF æquales sunt, & [e] CA ad DB, ut AE ad BF, hoc est, permutando [f] CA ad AE, ut DB ad BF: erunt quoque [g] qui ad C & D angulis in $\triangle^{lis}$ CAE & DBF æquales. Porrò cùm [h] CA ad DB sit, sicut AH ad BI: permutando erit [i] CA ad AH, sicut DB ad BI. Unde cum hæc latera existant $\triangle^{lorum}$ CHA & DIB, quæ circa æquales angulos CAH & DBI: erunt quoque [k] illi qui ad C & D anguli in iisdem $\triangle^{lis}$ æquales. Quoniam autem anguli ECA & ACH additi aut detracti efficiunt rectum ECH; & anguli FDB & BDI similiter additi aut detracti faciunt angulum FDI: patet angulum FDI quoque rectum fore. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter FI. Quod erat propositum.

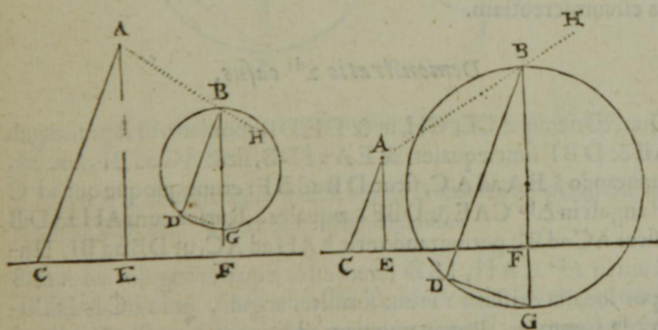
e p Constructionem.
f p 16. libr. 5. Elem.
g p 6. libr. 6. Elem.
h p Constructionem.
i p 16. libr. 5. Elem.
k p 6. libr. 6. Elem.

Ergo si à duobus datis punctis A & B, &c. Quod erat ostendendum.

VI *THEOREMA.*

Si à duobus datis punctis A & B duæ rectæ agantur parallelæ AC, BD, datum comprehendentes spacium ▭ AC, BD; & C terminus unius AC contingat locum planum CE, positione datum: continget quoque D terminus alterius BD locum planum, positione datum.

Constructio 1[mi] *casus.*



1[mus] *casus, in quo punctum* C *contingit positione datam rectam* CE.

Primò cadente C in linea recta CE, si ex A in ipsam demittatur per-

perpendicularis A E, & ex B agatur ei parallela B F; fiatque ut EA ad D B, ita A C ad B G : Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter est BG.

Demonstratio 1mi casus.

a p 29. libr. 1. Elem.
b p Constructionem.
c p 16. libr. 5. Elem.
d p 6. libr. 6. Elem.
e p Constructionem.

Ductâ enim per puncta A, B rectâ A B H, quoniam anguli CAH, DBH, ut & E A H, FBH [a] æquales sunt: erunt quoque anguli CAE, DBG æquales. Deinde cum [b] EA ad D B sit, sicut A C ad BG, permutando erit [c] EA ad AC, sicut DB ad BG. Hinc junctâ DG, quoniam △lorum C A E, D B G anguli ad A & B sunt æquales, & latera circa eos proportionalia: erunt pariter anguli ad E & D [d] æquales. Est autem qui ad E in △lo C A E [e] rectus. Quare & is, qui ad D in △lo D B G rectus erit; adeoque D punctum in circulo, cujus diameter BG. Quod erat propositum.

Constructio 2di casus.

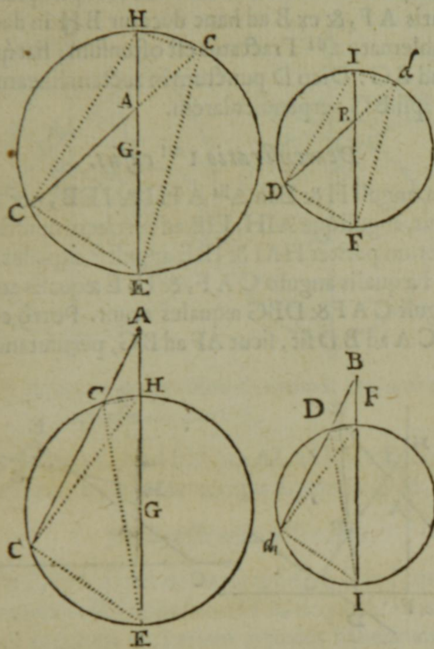
Deinde cadente C in circuli circumferentia CE, cujus centrum G, agatur per puncta A, G recta linea, utrinque circumferentiæ terminata in E & H: ductâque per B rectâ B F ipsi AE parallelâ, fiat ut EA ad DB, ita AC ad BF; ac rursus ut AH ad DB, ita AC ad BI. Postea descripto circa diametrum FI circulo, dico punctum D cadere in ejus circumferentiam.

Demonstratio 2di casus.

f p 16. libr. 5. Elem.
g p 6. libr. 6. Elem.
h p 16. libr. 5. Elem.
i p 6. libr. 5. Elem.
k p 31. libr. 3. Elem.
l p 32. libr. 1. Elem.

Junctis namque CE, CH, ut & DF, DI, quoniam, ut supra, anguli CAE & D B F sunt æquales, & E A ad DB, sicut AC ad BF, hoc est, permutando [f] E A ad A C, sicut D B ad B F: erunt quoque qui ad C & F anguli in △lis CAE & DBF [g] æquales. Rursus cum AH ad D B sit, sicut AC ad BI, permutando erit [h] AH ad AC, ut DB ad BI. Unde cum in △lis C A H, I B D latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia existant : erunt similiter anguli, qui ad C & I in iisdem △lis [i] æquales. Porrò, quoniam additis aut detractis angulis ad C, hoc est, E C A & A C H, ex iis [k] fit rectus ECH : erunt pariter & anguli ad F & I, hoc est, B F D & D I B, additi aut detracti recto æquales. E quibus cum & F D I [l] rectum angulum esse constet : sequi-

quitur D punctum fore in circulo, cujus diameter FI. Quod erat propositum.



2dus casus, in quo punctum C *contingit positione datam circumferentiam* C E.

Ergo si à duobus datis punctis A & B duæ rectæ parallelæ agantur AC, BD, &c. Quod erat ostendendum.

VII *THEOREMA.*

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datamque inter se habentes rationem, & C terminus unius AC contingat locum planum CF, positione datum: continget pariter & D terminus alterius BD locum planum, positione datum.

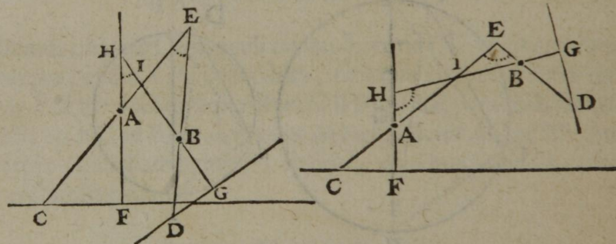
Constructio 1mi *casus.*

Primò cadente C in recta linea CF, si ex A super ipsam demittatur perpendicularis A F, & ex B ad hanc ducatur B H in dato angulo E, sicut 7mo Problemate 2di Tractatus est ostensum; fiatque ut C A ad BD, ita A F ad B G: Dico D punctum in rectam lineam cadere, ductam per G ipsi B G perpendicularem.

Demonstratio 1mi *casus.*

Cum enim anguli H & E in △lis A H I & I E B, per constructionem, æquentur, angulique AIH, EIB ad verticem constituti [a] æquales existant: erunt pariter HAI & IBE anguli [b] æquales. Est autem angulus H A I æqualis angulo C A F, & I B E æqualis angulo DBG. Quare & anguli C A F & DBG æquales erunt. Porrò cum per constructionem C A ad B D sit, sicut AF ad B G, permutando erit [c] CA

a p 15. libr. 1. Elem.
b p 32. libr. 1. Elem.
c p 16. libr. 5. Elem.



1mus *casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam* CF.

ad A F, sicut D B ad B G. Hinc, junctâ D G, quoniam △lorum CAF, D B G latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia sunt, erunt pariter & qui ad F & G anguli [d] in iisdem △lis æquales. Est autem angulus ad F in △lo C A F, per constructionem, rectus. Quocirca & is, qui ad G in △lo D B G, rectus erit. Adeoque, cum ad G ipsi B G unam solummodo perpendicularem ducere obtingat, patet eandem à D puncto contingi. Quod erat propositum,

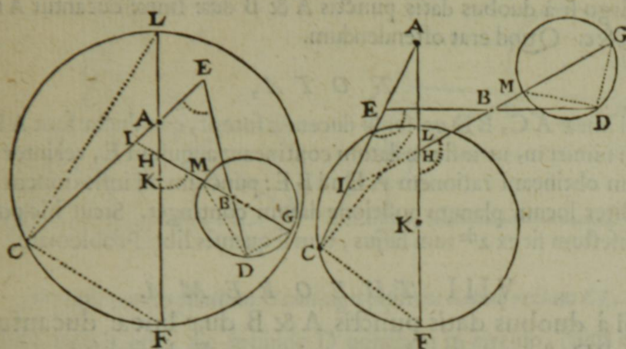
d p 6. libr. 6. Elem.

Constructio 2di *casus.*

Dein cadente C in circuli circumferentia, cujus centrum K; si per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiæ terminata

in

in F & L, & ex B ad hanc ducatur BH in dato angulo E, ſicut 7[mo] Problemate 2[di] Tractatus eſt oſtenſum; fiatque ut C A ad B D, ita A F



2[dus] *caſus, in quo punctum C contingit poſitione datam circumferentiam C F.*

ad B G; ac rurſus ut C A ad BD, ita AL ad BM: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter G M.

Demonſtratio 2[di] caſus.

Productâ GBH, donec occurrat ipſi C A E in I, quoniam angulus FHB [c] eſt æqualis ſibi oppoſito I H A, ſicque △[la] IAH, IEB præter communem angulum ad I etiam æquales habent angulos I H A & IEB: erit pariter & 3[tius] IAH æqualis 3[tio] IBE, hoc eſt, DBG [f]. Porrò, junctis C F, D G, quoniam per conſtructionem C A eſt ad B D, ſicut A F ad B G: permutando erit [g] C A ad A F, ſicut D B ad B G. Unde cum △[lorum] CAF & DBG anguli ad A & B æquales ſint oſtenſi, lateraque circa eos proportionalia: erunt ſimiliter [h] qui ad C & D anguli in iiſdem △[lis] æquales. Eodem modo, junctis CL, DM, quoniam per conſtructionem C A eſt ad B D, ſicut A L ad B M, permutando erit CA ad AL, ſicut D B ad B M. Unde cum △[lorum] C L A & DMB anguli ad A & B æquales ſint, lateraque circa eos proportionalia: erunt itidem qui ad C & D anguli in iiſdem △[lis] æquales. Quia autem ad C anguli, hoc eſt, F C A & A C L additi aut detracti faciunt rectum angulum F C L; angulique ad D, hoc eſt, G D B & B D M ſimi-

e p 15. libr. 1. Elem.

f p 32. & 15. lib. 1. Elem.

g p 16. libr. 5. Elem.

h p 6. libr. 6. Elem.

ſimiliter additi aut detracti faciunt angulum G D M: erit pariter GDM angulus rectus. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter GM. Quod erat propoſitum.

Ergo ſi à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur A C, BD, &c. Quod erat oſtendendum.

NOTA,

Si lineæ A C, B D eo ſenſu ducendæ forent, quo ductæ ſunt A E, B E: nimirum, ut inflexæ datum contineant angulum E, vel inter ſe datam obtineant rationem A E ad B E: punctum ad inflexionem E ſimiliter locum planum poſitione datum continget. Sicut hîc poſt manifeſtum fit ex 2do tum hujus, tum ſequentis libri Problemate.

VIII *THEOREMA*.

Si à duobus datis punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, datum angulum continentes E, datumque comprehendentes ſpacium ▭ A C, B D; & C terminus unius AC contingat locum planum CF poſitione datum: & alterius quoque B D terminus D locum planum poſitione datum continget.

Conſtructio 1^{mi} *caſus*.

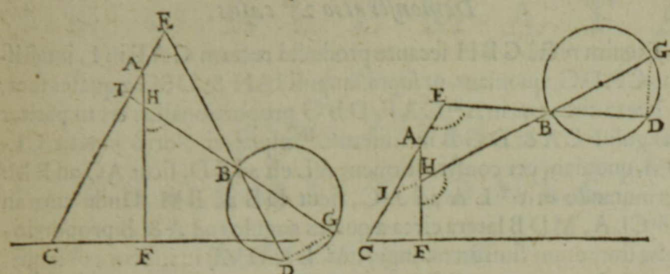
Primò cadente C in recta linea CF, ſi ex A ſuper ipſam demittatur perpendicularis A F, & ex B ad hanc agatur B H in dato angulo E, ſicut 7mo Problemate 2^{di} Tractatus eſt oſtenſum; fiatque ut A F ad B D, ita A C ad B G: Dico D punctum in circumferentiam circuli cadere, cujus diameter B G.

Demonſtratio 1^{mi} *caſus*.

Producta GBH, donec occurrat ipſi C A E in I, quoniam angulus FHB [a] æqualis eſt ſibi oppoſito I H A, ſicque $\triangle^{la}$ IAH, IEB præter communem angulum ad I etiam æquales habent angulos I H A & I E B: erit pariter & 3^{tius} angulus I A H æqualis 3^{tio} I B E, hoc eſt, D B G [b]. Porrò, junctâ D G, quoniam per conſtructionem A F eſt ad BD, ſicut A C ad BG: permutando erit [c] FA ad A C, ſicut DB ad B D. Unde cum $\triangle^{lorum}$ C A F, D B G anguli ad A & B æquales ſint oſtenſi, & latera circa eos proportionalia: erunt ſimiliter [d] qui ad F & D

a p 15. libr. 1. Elem.
b p 32. & 15. libr. 1. Elem.
c p 16. libr. 5. Elem.
d p 6. libr. 6. Elem.

& D anguli in iisdem $\triangle^{lis}$ æquales. Est autem angulus ad F in $\triangle^{lo}$ CAF per constructionem rectus. Quare & is, qui ad D in $\triangle^{lo}$

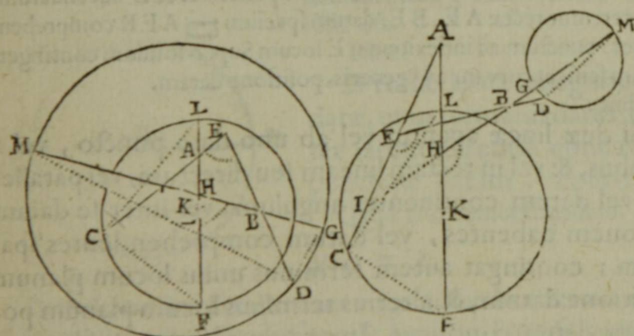


1^{mus} casus, in quo punctum C contingit positione datam rectam CF.

DBG, rectus erit. Ac proinde D punctum in circulo, cujus diameter BG. Quod erat propositum.

Constructio 2^{di} casus.

Dein cadente C in circuli circumferentia CF, cujus centrum K, si per puncta A, K recta linea agatur, utrinque circumferentiæ termi-



2^{dus} casus, in quo punctum C contingit positione datam circumferentiam CF.

nata in F & L, & ex B ad hanc in dato angulo E ducatur BH, sicut 7mo Problemate 2^{di} Tractatus est ostensum; fiatque ut AF ad BD,

ita AC ad BG; ac rursus ut AL ad B D, ita AC ad BM: Dico D punctum cadere in circumferentiam circuli, cujus diameter GM.

Demonstratio 2^di casus.

Etenim rectâ G B H secante productâ rectam C A E in I, junctisque CF, DG, quoniam, ut supra, anguli IAH & DBG æquales sunt, & latera circa eos in △^lis C A F, D B G proportionalia: erunt pariter
e p 6. libr. 6. Elem. [e] anguli F C A & D G B in iisdem △^lis æquales. Porrò junctis CL, DM, quoniam per constructionem A L est ad B D, sicut AC ad B M:
f p 16. lib. 5. Elem. permutando erit [f] L A ad A C, sicut D B ad B M. Unde cum in △^lis CLA, MDB latera circa æquales angulos ad A & B proportionalia sint: erunt similiter [g] anguli ACL & DMB in iisdem △^lis æquales.
g p 6 libr. 6. Elem. Quia autem anguli FCA & ACL additi aut detracti efficiunt
h p 31. libr. 3. Elem. rectum angulum FCL [h]: erunt pariter anguli DGB & DMB additi aut detracti recto æquales. E quibus, cum [i] & G D M rectum angu-
i p 32. libr. 1. Elem. lum esse constet, sequitur, D punctum fore in circulo, cujus diameter GM. Quod erat propositum.

Ergo si à duobus punctis A & B duæ lineæ ducantur AC, BD, &c. Quod erat ostendendum.

NOTA,

Si loco rectarum A C, B D, à datis punctis A & B ducendarum, expeterentur rectæ A E, B E, datum spacium ▭ AEB comprehendentes: punctum ad inflexionem E locum Super-solidum continget, lineam scilicet curvam 2^di generis, positione datam.

Hinc:

Conclusio 1^mæ Propositionis.

Si duæ lineæ agantur vel ab uno dato puncto, vel à duobus, & vel in rectam lineam seu directum, vel parallelæ, vel datum continentes angulum, vel inter se datam rationem habentes, vel datum comprehendentes spacium; contingat autem terminus unius locum planum positione datum, & alterius terminus locum planum positione datum continget. Interdum quidem ejusdem generis, interdum verò diversum, & interdum similiter positum ad rectam lineam, interdum contrario modo.

Pro diversa scilicet datorum sive subiectorum consideratione. Quod erat demonstrandum.

SEQVVNTVR PROBLEMATA IN PRIMI LIBRI PROPOSITIONES.

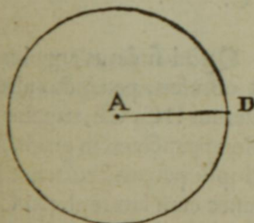
In 2^{dam} Propositionem

I *PROBLEMA.*

E dato puncto A rectam lineam ducere AD, datæ rectæ BC æqualem.

Constructio.

EX A, tanquam centro, intervallo BC describatur circulus; & ex A ad quodlibet in circumferentia punctum D agatur recta AD.



Dico AD æqualem esse BC. Cujus demonstratio è constructione manifesta est.

Hinc:

Si rectæ lineæ, magnitudine datæ, unus terminus datus sit, alter circumferentiã concavam, positione datam, continget. *Conclusio 2dæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

NOTA,

In conclusione dici: Si rectæ lineæ magnitudine datæ, &c. *non autem*, positione datæ, &c. Quod ipsum vult Apollonii Propositio, quæ intelligi nequit, nisi linea simul magnitudine data sit. Dato autem rectæ alicujus, positione & magnitudine datæ, termino uno, alter quoque datus esse intelligitur, per 27 Datorum Euclidis. Eo ipso tamen non dicimus, alterum hujus lineæ terminum indifferenter ad quodcunque in circumferentia punctum cadere, eo sensu, quem omnes

omnes Apollonii Propositiones hujus Tractatus præ se ferunt, sed in unum duntaxat locum determinatum, ad quem inveniendum nullâ circuli descriptione opùs est. Immutavimus igitur has voculas, scribarum ignorantiâ & negligentiâ procul dubio illapsas; prout hanc licentiam, eandem ob causam in conclusione plurium aliarum Propositionum hîc sequentium nobis sumpsimus.

In 3tiam Propositionem,

II PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A G, B G, continentes angulum AGB, dato angulo C æqualem.

Constructio.

Primò. Si datus angulus C est rectus, ducta AB secetur bifariam in F, descriptoque ex F intervallo AF vel FB super AB semicirculo AGB: Dico, si ex punctis A, B ad quodlibet in circumferentia punctum G agantur rectæ AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato C.

1mus casus, in quo datus angulus C est rectus.

Quòd si datus angulus C sit obtusus, producto altero laterum DC, CE, erigatur ex aliquo puncto e, in producto, ad ipsũ perpendicularis e D, donec cum latere altero CD concurrat in D, & ad A & B anguli B A F & ABF æquales constituantur angulo C D e. Tunc descripto ex F, ubi lineæ æquales angulos comprehendentes concurrunt, circuli segmento AGB, intervallo F A vel F B, ad alteram

2dus casus, in quo datus angulus C est obtusus.

ram partem lineæ AB : Dico, si ex punctis A, B ad quodcunque in circumferentia punctum G agantur AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato DCE.

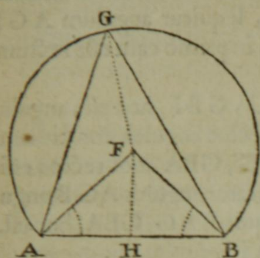


Figura A, ubi angulus AGB cadit supra angulum AFB.

C
E
D

Denique, si datus angulus C sit acutus, agatur è quolibet puncto E, in altero laterum DC, CE, ad ipsum perpendicularis ED; occurrens lateri DC in D. Tum ad AB constitutis angulis BAF & ABF, angulo EDC, (ut supra) æqualibus, descriptoque ex F super AB, intervallo AF vel FB, ad eandemque partem, circuli segmento AGB: Dico rursus, ductis ex A & B ad quodvis in circumferētia punctū G rectis AG, BG, angulum AGB æqualem esse dato C.

Figuræ 3^{tii} casus, in quo datus angulus C est acutus.

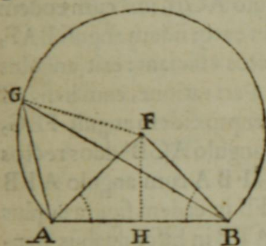


Figura B, ubi angulus AGB cadit juxta angulum AFB.

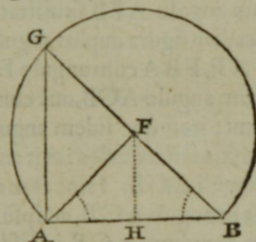


Figura C, ubi punctum G cadit in altera linearum productarum AF, FB.

Demonstratio.

Jungatur enim FG, & ex F in AB demittatur perpendicularis FH. Deinde in 1mo & 2do casu producatur AG ad I.

Quoniam itaque latera AF, FG △^{li} AFG inter se æqualia sunt, erunt quoque [a] anguli AGF, FAG æquales. Eodem modo, cum latera BF, FG △^{li} BFG sint æqualia, erunt etiam anguli BGF, FBG æquales. Ideoque in 1mo & 2do casu, ut & in figura A tertii casus, angulus AGB æqualis erit angulis FAG, FBG simul sumptis. At in

a 5. libr. I. Elem.

figura B angulus AGB erit æqualis angulo FAG, ſubtracto eidem angulo FBG.

b ℘ 32. libr. 1. Elem.

Siquidem igitur in 1mo caſu [b] angulus externus BGI itidem eſt æqualis duobus angulis FAG & GBF, ſequitur angulum AGB æqualem eſſe angulo BGI, adeoque illum in primo caſu eſſe rectum, datoque angulo C æqualem.

c ℘ 32. lib. 1. Elem.

Porrò cum in 2do caſu bini anguli FAG, GBF, hoc eſt, angulus AGB cum binis AGB, BFA [c] quatuor rectos angulos conſtituant; atque etiam angulus AGB cum binis BAG, GBA duos rectos efficiant: ſequitur, ſi illîc bis & hîc ſemel auferatur angulus AGB, angulum reliquum BFA æqualem eſſe bis reliquis BAG, GBA, hoc eſt, [d] duplo anguli BGI. Eſt autem angulus AFB duplus quoque anguli AFH vel DCe [e]. Quocirca in 2do caſu angulus BGI erit æqualis angulo DCe, & conſequenter angulus AGB [f] æqualis angulo DCE.

d ℘ 32. libr. 1. Elem.

e ℘ Conſtr. & 32. libr. 1. Elem.

f ℘ 13. libr. 1. Elem.

g ℘ 32. libr. 1. Elem.

Eodem modo, quoniam in fig. A tertii caſus anguli BAF, FBA cum angulis FAG, GBF, hoc eſt, cum angulo AGB, unà cum eodem angulo AGB [g] duos rectos angulos efficiunt; atq; iidem anguli BAF, FBA cum angulo AFB ſimiliter duos rectos efficiant: erit angulus AFB in eadem figura duplus anguli AGB. Pari ratione, cum in fig. B anguli BAF, FBA cum angulo FAG, dempto eidem angulo FBG, hoc eſt, cum angulo AGB, unà cum eodem angulo AGB [h] duos rectos conſtituant; itemque iidem anguli BAF, FBA cum angulo AFB duobus rectis ſint æquales: erit angulus AFB in eadem figura duplus quoque anguli AGB. Hinc cum angulus AFB in hiſce duabus figuris duplus ſit anguli AGB, ac ipſe quoque duplus ſit anguli AFH vel C: patet angulum AGB in iiſdem figuris eſſe æqualem dato angulo C.

h ℘ 32. libr. 1. Elem.

i ℘ 32. libr. 1. Elem.

Denique cum in fig. C [i] angulus externus AFB æqualis ſit duobus internis oppoſitis & æqualibus angulis AGF, FAG, iſque ideo duplus ſit anguli AGF ſeu AGB; ſimulque AFB duplus ſit anguli AFH vel C: manifeſtum eſt, angulum AGB in eadem figura æqualem eſſe dato angulo C.

A datis ergo duobus punctis A & B duas rectas lineas infleximus AG, BG, angulum efficientes AGB, dato angulo C æqualem. Quod erat faciendum.

E quibus liquet, cum in genere ſit oſtenſum, lineas AG, BG, ex A & B ad quodcunque punctum G in circumferentia AGB eductas, angulum conſtituere AGB dato angulo C æqualem:

Quòd,

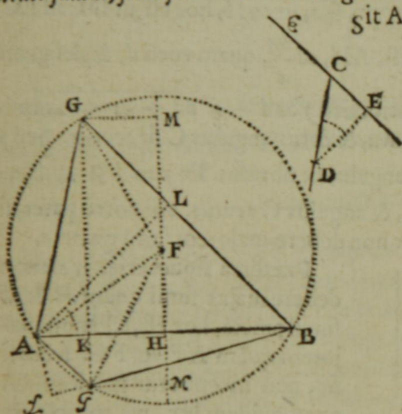
Quòd,

Si à duobus punctis datis duæ rectæ lineæ inflectantur, datum angulum continentes, commune ipsorum punctũ contingat circumferentiam concavam, positione datam. *Conclusio 3tiæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

SCHOLIVM.

Hoc Problema unà cum præcedente aliter ab Euclide demonstratum est in Geometriæ Elementis, uti videre est Prop. 32 tertii, & 2da primi. Quoniam autem ex allata demonstratione aliarum insignium Propositionum Euclidearum veritas constat, ut 20, 21, & 31 tertii: operæ pretium nos facturos arbitrati sumus, si majoris exercitationis gratiâ operationem hîc adjiceremus.



Sit AH $\propto$ HB $\propto a$
CE $\propto b$
ED $\propto c$
KH $\propto x$, ergo KB $\propto a+x$
KG $\propto y$.

$$\begin{array}{r} a+x \\ \underline{a+x} \\ +ax+xx \\ \underline{aa+ax} \end{array}$$

add. $\begin{cases} \square \text{KB.} & aa+{}^2ax+xx \\ \square \text{KG.} & yy \end{cases}$

summa, seu $\square$ GB. $aa+{}^2ax+xx+yy$

GB. $\sqrt{aa+{}^2ax+xx+yy}$.

Pro qua radice scribatur brevitatis causâ z, & pro $aa+{}^2ax+xx+yy$ scribatur zz.

Tum fiat propter similitudinem $\triangle^{rum}$ KGB, ABL

GB BA $\left\{\begin{array}{l} \text{KG. } y \\ \text{KB. } a+x \end{array}\right\}$ ad $\left\{\begin{array}{l} \text{AL.} \frac{2ay}{z} \\ \text{BL.} \frac{2aa+{}^2ax}{z} \end{array}\right.$, quâ subtractâ ex GB, z,

z —— $2a$

relinquitur LG $\frac{zz-{}^2aa-{}^2ax}{z}$.

Rursus cum propter similitudinem $\triangle^{rum}$ DCE, AGL proportionales sint,

DE EC AL LG
c —— b —— $\frac{2ay}{z}$ | $\frac{zz-{}^2aa-{}^2ax}{z}$: erit productum sub extremis DE, LG, [a] æquale producto sub mediis EC, AL, *a p 16. libr. 6. Elem.*

hoc eſt, $\dfrac{czz - 2caa - 2cax}{z} \propto \dfrac{2bay}{z}$

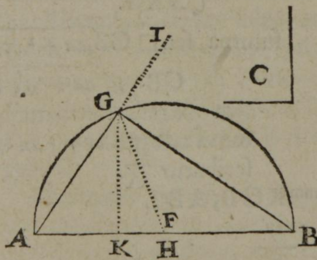
vel $czz - 2caa - 2cax \propto 2bay$

Dividatur utrinque per c, fit $zz - 2aa - 2ax \propto \dfrac{2bay}{c}$

Unde reſtituendo valorem ipſius zz, erit $aa + 2ax + xx + yy, - 2aa - 2ax$, hoc eſt, $-- aa + xx + yy \propto \dfrac{2ba}{c} y$, vel in debita forma: $yy \propto \dfrac{2ba}{c} y \begin{array}{l} + aa \\ - xx. \end{array}$

Ad tollendam fractionem $\dfrac{2ba}{c}$, fiat, ut c ad b, hoc eſt, ut DE ad EC, ita $2a$ ad $\dfrac{2ba}{c}$, vel ita a, hoc eſt, AH, ad $\dfrac{ba}{c}$. quam voco d, & deſignare ſuppono lineam HF. Quâ ratione fit $y \propto d + \sqrt{dd + aa -- xx}$, nimirum, ſi x minor ſumatur quàm a, & datus angulus C ſit acutus. Sed $y \propto -- d + \sqrt{dd + aa - xx}$, ſi angulus ſit obtuſus. Et $y \propto d \pm \sqrt{dd + aa -- xx}$, ſi x ſit major quàm a, & angulus C acutus. ubi porrò patet, ſi datus angulus C ſit obtuſus, x non debere majorem ſumi quàm a.

$\pm$ deſignat + vel --



Præterea liquet etiam, xx non debere majus ſumi quàm dd & aa ſimul juncta, hoc eſt, KH non majorem quàm AF vel FG. ſecus ſi fit, non inveniretur punctum G. quod quidem hîc, uti apparet, in circuli peripheriam cadit, cujus centrum eſt F, & radius AF.

Denique ſi datus angulus C eſt rectus, quoniam eo caſu CE æqualis b eſt æqualis o: erit æquatio $yy \propto aa - xx$, hoc eſt, $y \propto \sqrt{aa - xx}$. Oſtendens punctum G repertum iri in circumferentiam ſemicirculi, cujus diameter ſit AB, & centrum H. Quo caſu x ſemper minor erit quàm a.

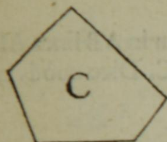
In-

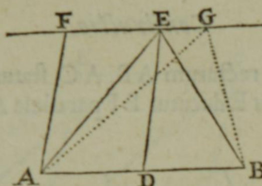
In 4^{tam} Propositionem.

III PROBLEMA.

Super data recta AB triangulum describere AEB, dato rectilineo C æquale.

Constructio.





Secetur AB bifariam in D, & super AD in quovis angulo constituatur juxta 45 Prop.1^{mi} libri Elem. parallelogrammum ADEF, æquale dato rectilineo C: junctisque AE, EB, erit △^{lum} AEB dato rectilineo C æquale.

Demonstratio.

Per 34.1^{mi} Elem. △ AFE est æquale △^{lo} AED, & per 38 ejusdem △ AED est æquale △ DEB. Unde sequitur bina △^{la} AFE AED, hoc est, parallelogrammum ADEF, esse æquale binis △^{lis} AED, DEB, id est, △^{lo} AEB. Est autem parallelogrammum ADEF per constructionem æquale rectilineo C. Æquale igitur etiam est △ AEB ipsi rectilineo C: adeoque super AB descriptum △ AEB, dato rectilineo C æquale. Quod erat faciendum.

Porrò, quoniam per 37. 1^{mi} Elem. omnia △^{la}, ut AEB, AGB, super eadem basi AB, & inter eandem parallelam FEG constituta, æqualia sunt: patet, si ex duobus terminis lineæ AB ad quodcunque in linea FEG punctum G ducantur rectæ AG, BG, ipsas constituere △ AGB, dato rectilineo C æquale.

Si ergo trianguli spacii magnitudine dati, basis positione & magnitudine data sit: vertex ipsius continget rectam lineam, positione datam. *Conclusio 4^{tæ} Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

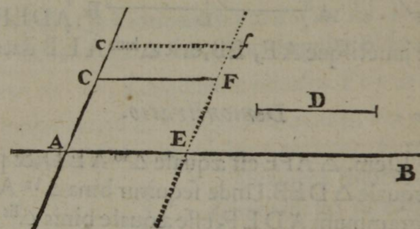
In 5^{tam} Propoſitionem.

IV *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis lineis A B, A C, ad unam A C rectam lineam ducere CF, datæ rectæ D æqualem, & alteri AB parallelam.

Conſtructio.

Ex A, interſectione rectarum A B, A C, ſtatuatur in A B linea AE æqualis datæ D, & per E ducatur E F parallela A C. Dico quòd, ex



puncto quolibet C in linea A C ducta CF parallela A B, donec attingat lineam E F, ipſa CF ſit quæſita. Cujus Demonſtratio ex 34. 1^{mi} Elem. eſt manifeſta.

Concluſio $5^{tæ}$ Propoſitionis. Si ergo rectæ lineæ, magnitudine datæ, & cuipiam poſitione datæ æquidiſtantis, unus terminus contingat rectam lineam, poſitione datam: & alter terminus rectam lineam, poſitione datam, continget.

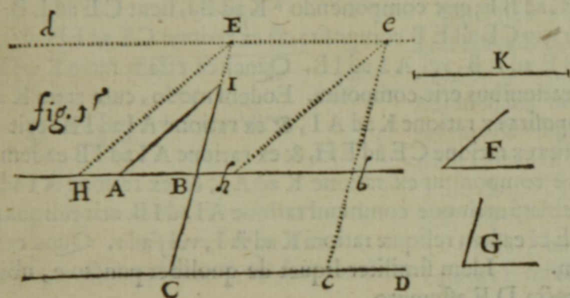
Quod erat demonſtrandum.

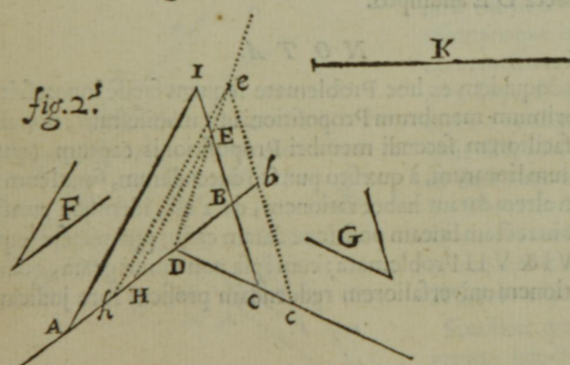
In

In 6^{tam} Propositionem.

V PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD; invenire extra ipsas punctum E, à quo ad positione datas AB, CD eductæ duæ rectæ EH, EC in datis angulis F, G sint ad se invicem in ratione data r ad s.





Ponamus angulos BAI, DCB esse æquales datis angulis F, G; itemque lineas AI, CB (ubicunque ad AB, CD ductas) concurrere in I. Deinde sit AI ad K, sicut r ad s.

Con-

Constructio.

Fiat, ut excessus, quo K superat B I, ad B I, ita B C ad B E. Tum ductâ E *d* parallelâ A B vel C D (ut in 1ma figura), vel ductâ ex D per E rectâ (ut in 2da fig.): si ab aliquo in ea puncto *e* ad A B, C D ducantur rectæ *e h*, *e c* parallelæ A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G: erit *h e* ad *e c*, sicut A I ad K, vel *r* ad *ſ*.

Demonstratio.

a p 18. libr. 5. Elem.

Cum, per constructionem, excessus, quo K superat B I, sit ad B I, sicut B C ad B E; erit componendo a K ad B I, sicut C E ad E B. Jam autem ratio C E ad E B composita est ex ratione C E ad E H, & ex ratione H E ad E B, vel A I ad I B. Quocirca etiam ratio K ad B I ex iisdem rationibus erit composita. Eodem modo, cum ratio K ad B I sit composita ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B: erit ratio composita ex ratione C E ad E H, & ex ratione A I ad I B eadem cum illa, quæ componitur ex ratione K ad A I, & ex ratione A I ad I B. Unde sublatâ utrinque communi ratione A I ad I B, erit reliqua ratio C E ad E H eadem reliquæ rationi K ad A I, vel *ſ* ad *r*. Quod erat faciendum. Idem similiter liquet de quolibet puncto e, ubicunque in recta D E assumpto.

N O T A.

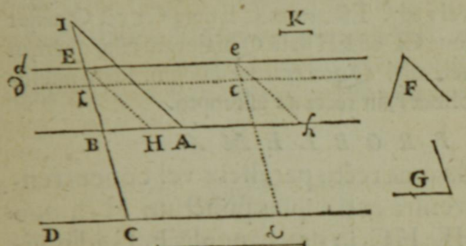
Quandoquidem ex hoc Problemate sequens facilè innotescit, ex eoque primum membrum Propositionis fit manifestum: non abs re erit ad faciliorem secundi membri Propositionis captum (quando una duarum linearum, à quæsito puncto ducendarum, simul cum illa, ad quam altera datam habet rationem, data est, idemque punctum similiter in rectam lineam positione datam cadit) præmittere sequentia duo V I & V I I Problemata: cum ipsa non minus grata, quàm ad Propositionem universaliorem reddendam proficua fore judicaverimus.

VI PRO-

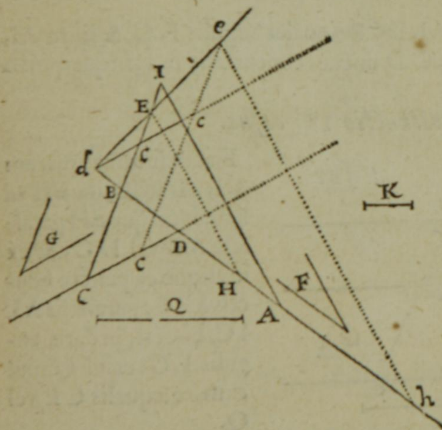
VI PROBLEMA.

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipſas punctum E, à quo in datis angulis F, G eductis duabus rectis E C, E H ad poſitione datas AB, C D, altera E C ad alteram E H datâ lineâ Q ſit major quàm in ratione data *r* ad *ſ*.

Sint (ut ante) anguli B A I, DCB æquales angulis F, G, & lineæ AI, CB, ubicunque ad A B, C B ductæ, concurrant in I. Deinde ſit C c æqualis Q, & K ad A I, ut *r* ad *ſ*.



1^mus^ *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD ſunt parallelæ.*



2^dus^ *caſus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

Conſtructio.

Ductâ ex c rectâ c *d* parallelâ DC, occurrente in 2do caſu cum AB in *d*, fiat, ut exceſſus, quo B I ſuperat K, ad B I, ita B c ad B E. Tum ductâ E *d* parallelâ AB vel C D (ut in 1mo caſu), aut ductâ ex *d* per E rectâ indefinitâ (ut in 2do caſu), aſſumptoque in ea aliquo puncto e, à quo, ſi ad C D, A B ducantur rectæ e c, e *h* parallelæ ipſis C I, I A, hoc eſt, in datis angulis G & F: Dico c e ad e *h* datâ Q majorem eſſe, quàm in ratione data K ad A I, vel *r* ad *ſ*.

Similiter quoque invenitur punctum e, ſi c e ad e *h* datâ lineâ Q minor ſit, quàm in ratione data K ad AI, vel *r* ad *ſ*.

Demonstratio.

Cum, per constructionem, excessus, quo B I superat K, sit ad B I, sicut B c ad BE: erit invertendo dividendoque [a] K ad B I, sicut c E ad E B. Est autem ratio c E ad E B composita ex ratione c E ad E H, & ex ratione H E ad E B, vel A I ad I B. Quocirca etiam ratio K ad BI ex iisdem rationibus erit composita. Eodem modo, cum ratio K ad BI componatur ex ratione K ad AI, & ex ratione A I ad IB: erit ratio composita ex ratione c E ad E H, & ex A I ad IB eadem cum illa, quæ componitur ex ratione K ad A I, & ex A I ad I B. Hinc si utrinque auferatur communis ratio A I ad I B, erit ratio reliqua c E ad E H eadem rationi K ad A I, vel *r* ad *s*. Est autem C E datâ C c vel Q major quàm c E. Constat itaque CE ad EH datâ Q majorem esse, quàm in ratione data K ad A I, vel *r* ad *s*. Quod erat faciendum. Idem intelligendum de puncto quolibet *e*, in recta *d e* assumpto.

a p Cor. 4. Prop. libr. 5. & Prop. 17. lib. 5. Elem.

VII *PROBLEMA.*

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductæ duæ rectæ HK, HC, in datis angulis F, G ad positione datas A B, C D, simul sumptæ æquales sint alteri datæ Q.

Sint, ut ante, anguli BAI, DCB æquales angulis F, G, & lineæ AI, CB, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in I; sitque porrò C E æqualis Q.

Constructio 1^mi casus.

1^mus *casus, in quo datæ lineæ AB, CD sunt parallelæ.*

Fiat ut summa ipsarum A I, I B ad IB, ita BE ad BH; ductaque *d* H parallelâ A B vel D C, & ex in aliquo ea puncto *h* ductis *h k*, *h* c parallelis A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G: erit *h k* simul cum *h* c æqualis C E vel Q.

De-

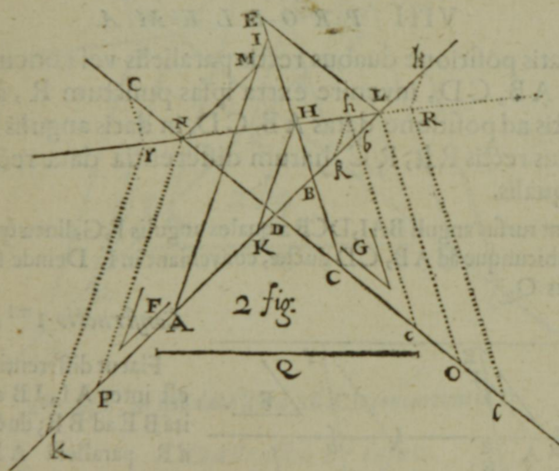
Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Cum $\triangle^{la}$ KHB, AIB similia sint, [a] erit KH ad HB, ut AI ad IB, & componendo [b] KH, HB ad HB, ut AI, IB ad IB. Sed sicut AI, IB ad IB, ita per constructionem est quoque BE ad BH. [c] Æquales itaque sunt KH, HB simul sumptæ ipsi BE. Unde communi additâ BC, erunt quoque KH, HC simul sumptæ æquales EC, hoc est, Q. Eadem est ratio de quolibet puncto *h*, ubicunque in recta *d* H assumpto.

[a] p 4. libr. 6. Elem.
[b] p 18. libr. 5. Elem.
[c] p 9. libr. 5. Elem.

Constructio 2^{di} *casus.*

Ducatur ex E recta EL parallela DC, occurrens ipsi AB in L. Deinde sumatur AM æqualis CE, ducaturque ex M recta MN parallela AB, occurrens ipsi DC in N, jungaturque NL. Dico, si ex ali-



2^{dus} *casus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

quo in ea puncto *h* ad positione datas AB, CD ducantur *hk*, *hc* parallelæ AI, IC, hoc est, in datis angulis F, G, quòd aggregatum ipsarum *kh*, *hc* sit æquale datæ rectæ CE vel Q.

Demonstratio 2^di casus.

Ductis L O, N P parallelis C I, IA, occurrentibus datis DC, AB in O & P: erit LO [d] æqualis CE, & NP æqualis AM vel CE. Porrò cum propter similitudinem $\triangle$rum N H C, N L O, N H sit ad N L, ut H C ad L O vel E C; itemque propter similitudinem $\triangle$rum L HK, L N P, L H sit ad L N, ut H K ad N P, hoc est, C E: erit quoque [e], (quia NH, ceu prima, est ad NL, ceu secundam, sicut H C, ceu 3tia, ad EC, ceu 4tam; nec non HL, ceu 5ta, ad NL 2dam, sicut HK, ceu 6ta, ad EC 4tam), ut aggregatum ipsarum N H, H L, 1mæ & 5tæ, ad 2dam NL, ita aggregatum ipsarum HC, HK, 3tiæ & 6tæ, ad 4tam EC. Quocirca sicut aggregatum ipsarum NH, HL est æquale ipsi NL, ita quoque aggregatum ipsarum H C, H K erit ipsi E C vel Q æquale. Eadem est ratio de quovis puncto *h*, ad libitum assumpto in recta N L, inter puncta N, L. Datis ergo positione &c. Quod faciendum erat.

d ꝑ 34. *libr.* 1. *Elem.*

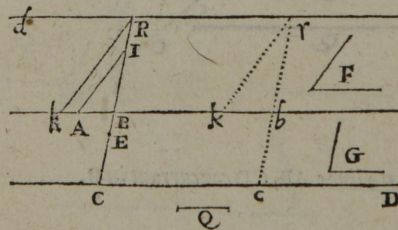
e ꝑ 24. *libr.* 5. *Elem.*

VIII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipsas punctum R, à quo eductis ad positione datas A B, C D, in datis angulis F, G, duabus rectis R k, R C, harum differentia datæ rectæ Q sit æqualis.

Fiant rursus anguli BAI, DCB æquales angulis F, G, lineæque AI, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, conveniant in I. Deinde sit C E æqualis Q.

Constructio 1^mi casus.



1mus *casus, in quo datæ lineæ A B, CD sunt parallelæ.*

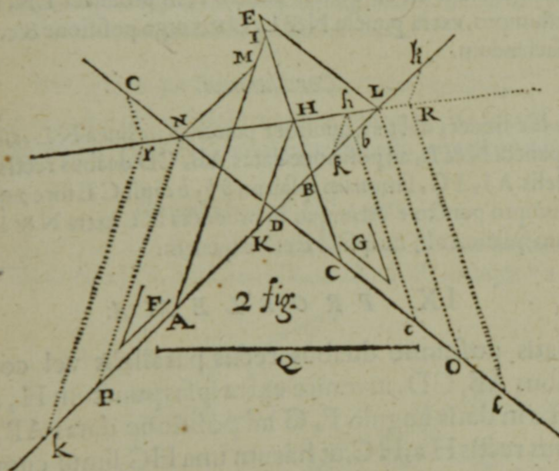
Fiat ut differentia, quæ est inter A I, I B ad I B, ita B E ad B R; ductâque *d* R parallelâ A B vel C D, agatur ex aliquo in ea puncto r ad ipsas A B, C D rectæ r k, r c parallelæ A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G: eritque differentia ipsarum c r, r k æqualis datæ CE vel Q.

De-

Demonstratio 1^{mi} *casus.*

Quoniam, propter similitudinem △^{rum} 𝔨 R B, A I B [a], 𝔨 R est ad R B, ut A I ad I B, erit dividendo [b] sicut differentia ipsarum 𝔨 R, R B ad R B, ita differentia ipsarum A I, I B ad I B. Sed ut differentia ipsarum A I, I B ad I B, ita quoque per constructionem est B E ad B R. Quocirca [c] differentia ipsarum 𝔨 R, R B æqualis est ipsi B E, ideoque & R 𝔨 æqualis R E; ac proinde C E, hoc est, Q, differentia, quæ est inter R C, R 𝔨. Idem similiter accipe de quolibet puncto r, ubicunque in recta *d* R assumpto.

a p 4. *libr.* 6. *Elem.*
b p 17. *libr.* 5. *Elem.*
c p 9. *lib.* 5. *Elem.*



2^{dus} *casus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

Constructio 2^{di} *casus.*

Inventâ, ut priùs in 2do casu præcedentis Problematis, lineâ N L, eductisque à puncto aliquo R, in ea utrinque producta assumpto, rectis R 𝔨, R 𝔠 parallelis A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G ad positione datas A B, C D: erit differentia ipsarum R 𝔠, R 𝔨 æqualis datæ C E vel Q.

Demonſtratio 2^{di} caſus.

Cum $\triangle^{la}$ NR$\mathfrak{r}$, NLO [d] ſimilia ſint, erit NR ad NL, ut R$\mathfrak{r}$ ad LO vel CE. Rurſus, quoniam $\triangle^{la}$ LR$\mathfrak{k}$, LNP ſimilia ſunt, erit LR ad LN, ſicut R$\mathfrak{k}$ ad NP vel CE. Quocirca cum NR ceu 1ma ſit ad NL 2^{dam}, ſicut R$\mathfrak{r}$ ceu 3^{tia} ad EC 4^{tam}; itemque LR ceu 5ta ad NL 2^{dam}, ſicut R$\mathfrak{k}$ ceu 6ta ad EC 4^{tam}: erit quoque [e] differentia inter primam NR & 5^{tam} LR ad 2^{dam} NL, ſicut differentia, quæ eſt inter 3^{tiam} R$\mathfrak{r}$ & 6^{tam} R$\mathfrak{k}$, ad 4^{tam} EC. Eſt autem differentia ipſarum NR, LR æqualis $2^{dæ}$ NL. Quare etiam differentia ipſarum R$\mathfrak{r}$, R$\mathfrak{k}$ eſt æqualis $4^{tæ}$ EC, hoc eſt, datæ Q. Idem ſimiliter accipiendum eſt de quovis puncto r, in producta LN, ad libitum aſſumpto, extra puncta N & L. Datis ergo poſitione &c. Quod erat faciendum.

d *p 4. libr. 6. Elem.*

e *Vide Clavium ad 24. libr. 5. Elem.*

Corollarium.

Ex his liquet, ductis à quolibet puncto *h* in linea NL, aſſumpto inter puncta N & L, ad poſitione datas AB, CD duabus rectis *hk*, *hc* parallelis AI, IC, ſummam ipſarum *hk*, *hc* ipſi CE fore æqualem; At aſſumpto puncto r utcunque in producta NL extra N & L, differentiam ipſarum rk, rc ipſi CE eſſe æqualem.

IX. *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis vel concurrentibus AB, CD, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductis in datis angulis F, G ad poſitione datas AB, CD duabus rectis Ha, HC, ut harum una HC ſimul cum HK, eâ, ad quam altera Ha datam habet rationem *r* ad *ſ*, ſit æqualis datæ rectæ Q.

Fiant, ut ante, anguli BAI, DCB æquales datis F, G; & lineæ AI, CB, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in I. Deinde ſit AI ad IF, ut *r* ad *ſ*; & CE, ſicut ante, æqualis Q.

Constructio 1[mi] *casus.*

Fiat ut aggregatum ipsarum FI, IB ad IB, ita BE ad BH; ductâque a H parallelâ AB vel D C: dico, si ex B per F agatur recta B F K, do-

1[mus] *casus, in quo datæ lineæ AB, D C sunt parallelæ.*

nec occurrat rectæ a H ipsi A I parallelæ in K, a H esse ad H K, sicut A I ad I F, vel *r* ad *s*; & H C simul cum HK esse æqualem ipsi C E vel Q.

Demonstratio 1[mi] *casus.*

Quoniam [a] △[la] a H B, AIB, ut & KHB, F I B similia sunt: erit a H ad HB, ut AI ad IB; & HB ad HK, ut IB ad IF: ideoque [b] a H ad *[a] p 4. libr. 6 Elem.* *[b] p 22. libr. 5. Elem.*

2[dus] *casus, in quo datæ lineæ AB, C D concurrunt in D.*

HK, ut A I ad IF. Porrò cum KH sit ad HB, sicut FI ad IB; compo-
nendo

c p 18. libr. 5. Elem.

d p 9. libr. 5. Elem.

nendo erit [c] sicut aggregatum ipsarum KH, HB ad HB, ita aggregatum ipsarum FI, IB ad IB. Est autem per constructionem BE ad BH, sicut aggregatum ipsarum FI, IB ad IB. Æquale igitur est [d] aggregatum ipsarum KH, HB ipsi BE. Quarum unicuique additâ communi BC, erunt & KH, HC simul sumptæ ipsi EC vel Q æquales. Id quod similiter est accipiendum de quolibet puncto *h*, ubicunque in lineâ *d*H assumpto.

Constructio 2^di casus.

Ductâ ex E rectâ EB parallelâ DC, occurrente ipsi AB in B, fiat ut FI ad IA, ita CE ad AG. Deinde ductâ G*d* parallelâ AB, donec ipsi CD occurrat in *d*; itemque *d*L parallelâ AI, donec occurrat ipsi AB in L: dico, si jungatur *d*B, & à quolibet in ea puncto *h* ad AB, CD ducantur rectæ *ha*, *hc* parallelæ AI, IC, hoc est, in datis angulis F, G, sumaturque *d*M æqualis CE, & jungatur MB, quòd *ah* sit ad *hk*, ut AI ad IF, hoc est, *r* ad *s*; & quòd *hc* simul cum *hk* sit æqualis ipsi CE vel Q.

Demonstratio 2^di casus.

e p Cor. 4. lib. 5. Elem.

f p 4. lib. 6. Elem.

g p 22. libr. 5. Elem.

Per 34. 1^mi Elem. L*d* est æqualis AG, & per constr. *d*M æqualis CE, & FI ad IA, ut CE ad AG, hoc est, *d*M ad *d*L: & invertendo [e] L*d* ad *d*M, ut AI ad IF. Quoniam autem [f] △^la L*d*B, aHB, ut & M*d*B, KHB, similia sunt, & idcirco L*d* ad *d*B, ut aH ad HB; & *d*B ad *d*M, ut HB ad HK: erit etiam [g] L*d* ad *d*M, ut aH ad HK. Sed ut L*d* est ad *d*M, ita AI erat ad IF. Quocirca erit ut aH ad HK, sic AI ad IF, hoc est, ut *r* ad *s*.

Porrò, quòd HC simul cum HK, ad quam aH, ut ostensum est, eam habet rationem, quam AI ad IF, vel *r* ad *s*, sit æqualis CE vel Q, patet ex demonstratione 2^di casus VII Problematis: cum omnes lineæ HC, HK, ductæ à puncto H, utcunque assumpto in linea *d*B inter duo puncta *d* & B, ad rectas DC, KB ipsis CI, IA parallelæ, sint simul sumptæ ipsi CE vel Q æquales. Datis ergo positione &c. Quod erat faciendum.

NOTA,

Cum sequens Problema ejusdem ferè sit argumenti cum superiori, facilique viâ per illud solvi possit, placuit nobis id hîc subjungere, ut sequitur.

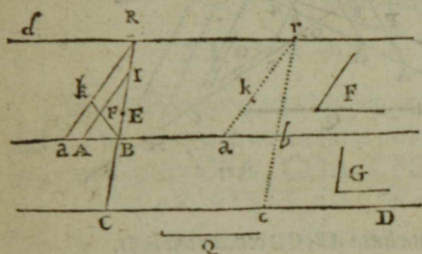
X PRO-

X PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis vel concurrentibus A B, C D, invenire extra ipsas punctum R, à quo eductis in datis angulis F, G ad positione datas A B, C D duabus rectis R 𝔞, R 𝔠, differentia inter harum unam R C & aliam R 𝔨, ad quam altera R 𝔞 datam habet rationem *r* ad *ſ*, sit æqualis datæ rectæ lineæ Q.

Fiant anguli B A I, D C B, ut ante, æquales angulis F, G, & rectæ A I, C B, ubicunque ad A B, C D ductæ, concurrant in I. Deinde sit AI ad I F, ut *r* ad *ſ*; sitque C E æqualis Q, ut ante.

Constructio 1^mi *casus.*



1^mus *casus, in quo datæ lineæ AB, CD sunt parallelæ.*

Fiat ut differentia ipsarum F I, I B ad I B, ita BE ad BR; agaturque *d* R parallela AB vel CD. Tum ductâ ex R rectâ R 𝔞 parallelâ A I, & ex B per F rectâ B F 𝔨, occurrente ipsi 𝔞 R in 𝔨, erit 𝔞 R ad R 𝔨, sicut A I ad I F, hoc est, ut *r* ad *ſ*; itemque differentia inter R C & R 𝔨 æqualis C E vel Q.

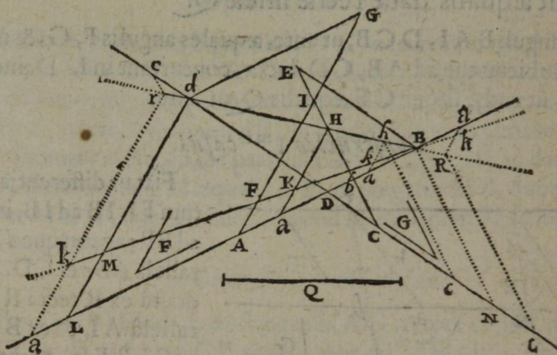
Demonstratio 1^mi *casus.*

Quoniam [a] △^la 𝔞 RB, AIB, ut & 𝔨 RB, FIB similia sunt, erit 𝔞 R ad R B, sicut A I ad I B; & R B ad R 𝔨, sicut I B ad I F: & per consequens [b] 𝔞 R ad K 𝔨, sicut AI ad IF. *a p 4. libr. 6. Elem.* b *p 22. libr. 5 Elem.*

Porrò cum 𝔨 R sit ad R B, ut F I ad I B; erit dividendo [c] ut differentia ipsarum 𝔨 R, R B ad R B, ita differentia ipsarum F I, IB ad IB. Est autem per constructionem BE ad B R, sicut differentia ipsarum F I, IB ad IB. [d] Æqualis itaque est differentia ipsarum 𝔨 R, R B ipsi BE: ideoque 𝔨 R æqualis R E, & per consequens CE vel Q æqualis differentiæ, quæ est inter R C, R 𝔨. Quod eodem modo intelligendum est de quolibet puncto r, in linea *d* R assumpto. *c p 17. libr. 5 Elem.* *d p 9. libr. 5. Elem.*

Constructio 2^{di} casus.

Inventâ, ut in 2do casu præcedentis Problematis, lineâ *d* B, ductisque à puncto aliquo R, in ea utrinque producta, ad A B, C D rectis R a, R c, parallelis A I, I C, hoc est, in datis angulis F, G: erit



2^{dus} *casus, in quo datæ lineæ AB, CD concurrunt in D.*

a R ad R k, ut AI ad IF, vel *r* ad *ſ*; & R k ſubducta ex R c æqualis CE vel Q.

Demonſtratio 2^{di} casus.

Quòd a R ſit ad R k, ut A I ad IF, vel *r* ad *ſ*, patet ex eadem ratione, quâ in 2do caſu ſuperioris Problematis demonſtravimus, a H eſſe ad HK, ut A I ad I F, vel *r* ad *ſ*. Eodem modo liquet ex demonſtratione 2^{di} caſus VIII Problematis, differentiam ipſarum R c, R k æqualem eſſe CE vel Q. Quod ſimiliter intelligendum eſt de quolibet puncto r, ubicunque aſſumpto in producta *d* B ad alteram partem. Datis ergo poſitione &c. Quod erat faciendum.

Hinc:

Hinc:

Si à puncto quodam ad positione datas duas rectas lineas parallelas vel inter se convenientes ducantur duæ rectæ lineæ in datis angulis, datam inter se habentes rationem; vel quarum una, simul cum aut minus datâ lineâ, ad alteram sit in ratione data; vel quarum aggregatum aut differentia sit datæ rectæ æqualis; vel denique quarum una simul cum ea aut minus eâ, ad quam altera datam habet rationem, datæ rectæ sit æqualis: continget punctum rectas lineas, positione datas. *Conclusio 6tæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

In 7mam Propositionem.

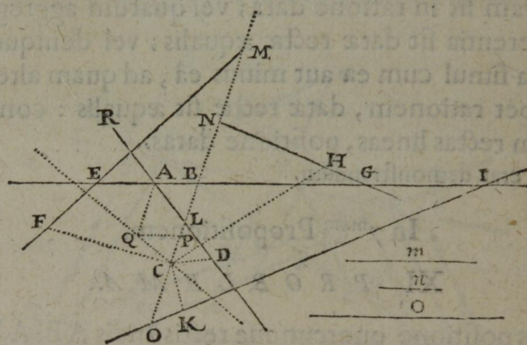
XI *PROBLEMA.*

Datis positione quotcunque rectis lineis AB, AD, EF, GH, IK: invenire extra ipsas punctum C, à quo eductis in datis angulis CBA, CDA, CFE, CHG, CKO ad positione datas AB, AD, EF, GH, IK rectis CB, CD, CF, CH, CK, id, quod sub data linea *m* & una ducta CB comprehenditur rectangulum, unà cum eo, quod sub alia ducta CD & data *n* comprehenditur, æquale sit ei, quod sub alia data *o* & reliquis ductis CF, CH, & CK continetur.

Cum propter datarum linearum atque angulorum multitudinem explicatio constructionis prolixior futura esset, quàm ut votis hujus & alterius responderet, brevitati consulentes satis fore duximus, si calculo Geometrico operationem expediremus, ut sequitur.

Primò itaque rem ut jam factam suppono, atque, ut ex omnium harum linearum confusione me expediam, considero unam ex datis atque unam ex quæsitis, ut ex. gr. AB & CB, velut præcipuas, & ad quas reliquas omnes referre conor. Pono itaque lineam AB vocari *x*, BC autem vocari *y*, & alias lineas datas omnes productas esse, donec secent hasce duas, etiam productas, si opùs fuerit, & ipsis non sint parallelæ, utputa AB, in punctis A, E, G, I; at BC in punctis L, M, N,

M, N, & O. Deinde obſervans angulos △li ABL eſſe datos, datamque ideo rationem laterum ipſius A B ad BL, quam pono ut z ad a: erit, exiſtente A B ꝏ x, B L ꝏ $\frac{ax}{z}$, & C L ꝏ $y - \frac{ax}{z}$. nimirum, ſi punctum L cadit inter B & C; cadente verò B inter C & L, erit C L ꝏ



$y + \frac{ax}{z}$; & $-y + \frac{ax}{z}$, ſi C ceciderit inter B & L. Eodem modo, datis angulis △li L C D datur & ratio laterum, quæ eſt inter CL & CD, quæ ſi ponatur eſſe, ut z ad b: erit, exiſtente C L ꝏ $y - \frac{ax}{z}$, C D ꝏ $\frac{by}{z} - \frac{abx}{zz}$. Porrò, quoniam lineæ AB, AD, EF poſitione datæ ſunt, dabitur etiam intervallum inter puncta A & E, quod ſi vocetur i, erit EB ꝏ $i + x$; at $i - x$, ſi punctum B ceciderit inter A & E; & $-i + x$, cadente E inter A & B. Similiter, datis angulis △li E B M, datur ratio laterum, quæ eſt inter E B & B M, quæ ſit ut z ad c. Cumque EB ſit $i + x$, erit BM ꝏ $\frac{ci + cx}{z}$, & CM ꝏ $\frac{zy + ci + cx}{z}$. Haud ſecus datis angulis △li FCM, datur ratio laterum, quæ eſt inter CM & CF. Quæ ſi ponatur ut z ad d, erit CF ꝏ $\frac{dzy + cdi + cdx}{zz}$. Pari ratione, datis poſitione rectis lineis AB, AD, & GH, datur quoque intervallum inter puncta A & G, quod ſi vocetur k, erit BG ꝏ $k - x$; at $k + x$, cadente A inter B & G; & $-k + x$, cadente G inter A & B. Eodem modo, cùm dantur anguli △li BNG, datur & ratio laterum, quæ eſt inter

inter BG & BN. Quæ ſi ponatur ut z ad e, BG exiſtente $k--x$, erit BN $\infty \frac{ek--ex}{z}$, & CN $\infty \frac{zy+ek--ex}{z}$. Rurſus datis angulis $\triangle^{li}$ CNH, dabitur ratio laterum, quæ eſt inter CN & CH. Quæ ſi ponatur ut z ad f: erit CH $\infty \frac{fzy+efk--efx}{zz}$. Denique, cum, datis poſitione rectis AB, AD, KI, detur & AI, intervallum inter puncta A & I: id quod ſi vocetur l, erit BI ∞ $l--x$; ſed $l+x$, cadente A inter B & I; & $--l+x$, cadente I inter A & B. Porrò, cum, datis angulis $\triangle^{li}$ OBI, detur ratio laterum BI ad BO: ſi ponatur illa ut z ad g, erit, exiſtente BI ∞ $l--x$, BO $\infty \frac{gl--gx}{z}$; & CO $\infty \frac{--zy+gl-gx}{z}$. Eodem modo datis angulis $\triangle^{li}$ OCK, atque ideo ratione laterum, quæ eſt inter CO & CK: ſi illa ponatur ut z ad h, erit CK ∞ - $\frac{--hzy+ghl--ghx}{zz}$. Et ſic ulteriùs, ſi plures lineæ poſitione datæ fuerint.

Ubi conſtat, datis poſitione quotcunque lineis rectis, in ſimilibus terminis inveniri ſemper quantitatem cujuſque lineæ, ex puncto C ad quamlibet datarum linearum in dato angulo eductæ.

Notandum autem, quòd ſi datæ lineæ ſunt ipſi AB parallelæ, in nulla iſtarum quantitatum x reperiri. Aſt ubi datæ lineæ ipſi CB ſunt parallelæ, nullos invenitum iri terminos, quantitatem y involventes. Denique quod attinet ſigna + & —, poſſunt ipſa tot modis variari, quot excogitari queunt datarum linearum poſitiones. Tandem cum conſtet longitudinem cujuſque ductarum linearum iis terminis exprimi, in quibus ſolummodò x vel y continetur, non autem xx vel yy: ſequitur, non obſtante multiplicatione uniuſcujuſque earundem linearum per quantitatem alterius datæ, nunquam tamen ad xx vel yy adſcendi. Id quod arguit punctum C in rectam lineam cadere, poſitione datam, ut hîc deinceps oſtenditur.

Idcirco ad determinandum punctum C, cum CB, hoc eſt, y, multiplicata per m producat my; & CD, hoc eſt, $\frac{by}{z} -- \frac{abx}{zz}$ multiplicata per n, producat $\frac{bny}{z} -- \frac{abnx}{zz}$; ac porrò CF, CH, & CK multiplicatæ per o producant $\frac{dozy+cdio+cdox+fozy+efko--efox--hozy+ghlo--ghox}{zz}$:

erit æquatio $my + \frac{bny}{z} - \frac{abnx}{zz} \propto \frac{dozy + cdio + cdox + fozy + efko - efox - hozy + ghlo - ghox}{zz}$. Hoc eſt, multiplicatis utrinque per zz, & æqualitate ad legitimam formam reductâ:

$$y \propto \frac{+ cdio + abnx + efko + cdox + ghlo - efox - ghox}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}.$$

Nempe ſi ponatur $mz + bn + ho$ majus quàm $do + fo$. Cum aliàs, ſi $mz + bn + ho$ minus eſſet quàm $do + fo$, ſigna $+$ & $-$ forent immutanda. Quòd ſi contigerit y eſſe æqualem nihilo aut minorem quàm o, poſtquam ſuppoſitum fuerit punctum C cadere intra angulum DAE, oporteret idipſum quoque ſumere intra angulum DAG, GAR, vel RAE, mutando ad hoc ſigna $+$ & $-$, prout requiritur. Quòd ſi verò in hiſce quatuor poſitionibus, y deprehenderetur eſſe æqualis o, indicio eſſet Problema hujuſmodi conditionibus circumvallatum eſſe impoſſibile. Poſito autem quòd ſit poſſibile, pro $\frac{cdio + efko + ghlo}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}$ ſcribatur, brevitatis causâ, p; & loco $\frac{abn + cdo - efo - gho}{mzz + bnz - doz - foz + hoz}$ ſcribatur $\frac{q}{r}$ habebiturque $y \propto p +$ vel $- \frac{q}{r}x$. Nimirum erit $y \propto p + \frac{q}{r}x$, ſi $abn + cda$ majus ſit quàm $efo + gho$; ſed $y \propto p - \frac{q}{r}x$, ſi $abn + cdo$ eſt minus quàm $efo + gho$.

Quapropter cum omne illud, quod in Problemate requirebatur, ſit peractum, nihilque amplius relictum ſit cujus ope æquatio inveniri poſſit ad obtinendam quantitatem indeterminatam x, liberum erit x pro lubitu ſumere; ita ut hoc pacto innumera puncta C, quæſito ſatisfacientia, inveniri queant.

Hinc ſumptâ AB ad lubitum, fiat BP æqualis p, ponaturque à B versùs C, ſi habeatur $+p$; quæ aliàs versùs N eſſet ſumenda, ſi haberetur $-p$; aut, ſi p fuiſſet æqualis nihilo, nullo modo ducenda fuiſſet. Deinde eductâ ex P lineâ PQ parallelâ & æquali AB, duco QC, ita ut QP ſit ad PC, ut r ad q. hoc eſt, ſi QP eſt x, tum PC ſit $\frac{qx}{r}$; ita ut

pun-

punctum C cadat inter B & P, si habeatur $-\frac{qx}{r}$. Contra si habeatur $+\frac{qx}{r}$, faciendum est, ut C cadat ad alteram partem extra P. quemadmodum hîc factum apparet. Ubi observandum, nullo modo ducendam fuisse lineam QC, si $\frac{qx}{r}$ fuisset æqualis o. Id quod argumento fuisset, punctum quæsitum C casurum fuisse in inventa PQ, ab utraque parte in infinitum producta.

Eodem modo sumendo aliam semper atque aliam magnitudinem pro A B, hoc est, ducendo C B in dato angulo C B A, ex alio atque alio puncto B, invenientur innumera puncta C, quæsito satisfacientia. Quæ quidem omnia cadent in rectam lineam QC, utrinque in infinitum productam.

Ubi porrò notandum ducimus, quo pacto quæsitum punctum C non solùm in rectam lineam sit casurum, quæ positione est data, quotiescunque illud, quod sub data *m* & ducta C B, unà cum eo, quod sub data *n* & ducta C D continetur, æquale est ei, quod sub data *o* & reliquis C F, C H, & C K comprehenditur; verùm etiam quoties unum productum ad alterum datam habet rationem; sicut etiam quoties unaquævis ductarum C F, C H, & C K per peculiarem quandam datam fuerit multiplicata, & producta ipsarum ad se invicem utcunque fuerint comparata.

Patet igitur:

Si sint quotcunque rectæ lineæ positione datæ, atque ad ipsas à quodam puncto ducantur rectæ lineæ in datis angulis, sit autem quod sub data linea & ducta continetur, unà cum contento sub data linea & altera ducta, æquale ei, vel datam habens rationem ad illud, quod sub data & alia ducta & reliquis continetur: punctum rectam lineam positione datam contingere. *Conclusio 7mæ Propositionis.*

Quod erat demonstrandum.

In

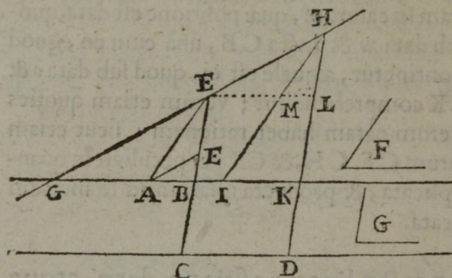
In 8vam Propositionem.

XII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductæ in datis angulis F, G ad positione datas AB, CD duæ rectæ HI, HD, ipsæ ad data puncta A & C in positione datis AB, CD intercipiant rectas AI, CD, datam inter se habentes rationem *c* ad *b*.

Fiant anguli BAE, DCB æquales datis angulis F, G; rectæque AE, CB productæ concurrant in E. Deinde sit FE ad EB, sicut *c* ad *b*.

Constructio.



Ductâ AF, agatur per E ipsi parallela EH; ductisque ex aliquo in ea puncto H ad positione datas AB, CD duabus rectis HI, HD, ipsis AE, EC parallelis, hoc est, in datis angulis F, G: erit AI ad CD, ut FE ad EB, vel *c* ad *b*.

Demonstratio.

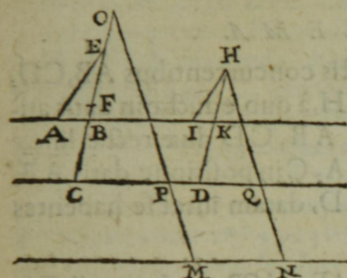
Ductâ HE occurrente ipsi AB in G; & ex E ductâ EL parallelâ AB, secante IH in M, & ipsi DKE occurrente in L: erit propter similitudinem △rum ELH, GBE, ut & EMH, GAE [a], LE ad EH, ut BG ad GE; & EH ad EM, ut GE ad GA: ac proinde ex æquo [b] LE ad EM, hoc est, CD ad AI, ut BG ad GA. Porrò cum [c] BA sit ad AG, ut BF ad FE, hoc est, componendo [d] BG ad GA, ut BE ad EF; atque etiam BG sit ad GA, sicut CD ad AI: [e] erit CD ad AI, ut BE ad EF, hoc est, ut *b* ad *c*. Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum est de quovis puncto in linea EH assumpto.

a *p 4. libr. 6. Elem.*
b *p 22. libr. 5. Elem.*
c *p 2. libr. 6. Elem.*
d *p 18. libr. 5. Elem.*
e *p 11. libr. 5. Elem.*

NOTA

NOTA 1ma.

Quamvis hæc Propositio universalis sit, & in quotcunque rectis lineis parallelis locum obtineat, operæ pretium tamen nos facturos existimavimus, si ad majorem ejus perfectionem sequentem operationem hîc adjiceremus.



In 3^{bus} lineis.

Sit AB $\propto a$
BE $\propto b$
EF $\propto c$
OC $\propto d$
CP $\propto e$
BC vel DK $\propto f$
CD ad MN, ut d ad g
AK $\propto x$
KH $\propto y$.

AK. x } subtr.

BE AB KH
$b - a - y$ | IK. $\frac{ay}{b}$

FE EB
$c - b$ — AI. $\frac{bx - ay}{b}$ | CD. $\frac{bx - ay}{c}$ } add.

OC CP DH
$d - e$ — $y + f$ | DQ. $\frac{ey + ef}{d}$

C Q. $\frac{bdx - ady + cey + cef.}{cd}$

subtr. CP. e

CD
$d - g$ — $\frac{bx - ay}{c}$ | PQ vel MN. $\frac{bdx - ady + cey + cef - cde.}{cd}$

$$bdx - ady + cey + cef - ced \propto bgx - agy$$

$$agy - ady + cey \propto bgx - bdx + ced - cef$$

fit $y \propto \frac{bgx - bdx + ced - cef}{ag - ad + ce.}$

Quod arguit punctum H in rectam lineam cadere, positione datam.

Idem similiter liquet de quotcunque datis parallelis.

NOTA 2da.

Quoniam quæsitum non tantùm in lineis parallelis, prout ab Apollonio propositum est, sed in concurrentibus quoque locum habet, ideo sequens addere nobis placuit

PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis concurrentibus AB,CD, invenire extra ipsas punctum H,à quo eductæ in datis angulis F,G ad positione datas AB,CD duæ rectæ lineæ HI,HD, ipsæ ad data puncta A, C in positione datis AB, CD intercipiant rectas AI, CD, datam inter se habentes rationem.

Fiant, ut ante, ad A & C anguli BAE & *d* CB æquales angulis F & G; rectæque AE, CB æquales hosce angulos constituentes concurrant in E. Deinde sit data ratio ut *c* ad EB.

Constructio.

Fiat ut B *d* ad *d* C, ita *c* ad EF; junctæque AF agatur per E parallela EH. Tum ductis ex aliquo in ipsa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, EC, hoc est, in datis angulis F, G: erit AI ad CD, ut *c* ad EB.

De-

Demonstratio.

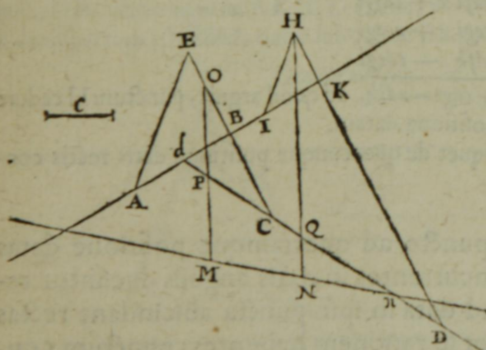
Cum propter △^la ſimilia ELH, GBE, ut & EMH, GAE [a], LE ſit ad EH, ſicut BG ad GE; & EH ad EM, ſicut GE ad GA: ex æquo erit [b] LE ad EM, hoc eſt, KB ad AI, ſicut BG ad GA. Porrò cum [c] BA ſit ad AG, ut BF ad FE, hoc eſt, componendo [d] BG ad GA, ut BE ad EF; atque etiam BG ſit ad GA, ut KB ad AI: [e] erit KB ad AI, ut BE ad EF; & invertendo [f] AI ad BK, ut FE ad EB. Sed ut BK ad CD, ita eſt B*d* ad *d*C; itemque ut B*d* ad *d*C, ita per conſtructionem *c* eſt ad EF. [g] Erit igitur BK ad CD, ut *c* ad EF. Hinc cum AI, BK & CD ſint 3 magnitudines ab una parte, & *c*, FE, & EB 3 aliæ ab altera parte, quæ binæ ſint in eadem ratione, ſitque earum proportio perturbata, [h] erit quoque ex æquo 1ma AI ad 3^am CD (in 3^bus primis), ſicut 1ma *c* ad 3^tiam EB (in 3^bus poſtremis). Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intelligi debet de quolibet puncto in linea EH aſſumpto.

a p 4. libr. 6 Elem.
b p 22. libr. 5. Elem.
c p 2. libr. 6. Elem.
d p 18. libr. 5. Elem.
e p 11. lib. 5. Elem.
f p Cor. 4. libr. 5. Elem.
g p 11. libr. 5. Elem.
h p 23. libr. 5. Elem.

NOTA.

Cum hæc Propoſitio verificetur in tot lineis concurrentibus, quot quis voluerit, itaque ad majorem ejus perfectionem ſequentem operationem adjecimus

In 3^bus lineis.



Eſto AB ꝏ *a*
BE ꝏ *b*
AI ad CD, ut *c* ad *b*
B*d* ꝏ *d*
BC ꝏ *e*
OC ꝏ *f*
CP ꝏ *g*
P*n* ꝏ *h*
*n*M ꝏ *i*
CD ad MN, ut *h* ad *k*
AK ꝏ *x*
KH ꝏ *y*

$$\begin{array}{l} \text{BE AB HK} \qquad \text{AK. } x \\ b - a - y \mid \text{IK. } \frac{ay}{b} \end{array} \Big\} \text{ſubtr.}$$

$$\text{BE} \qquad c - b - \text{AI. } \frac{bx - ay}{b} \mid \text{CD. } \frac{bx - ay}{c}$$

$$\text{BK. } x - a$$

$$d\text{B BC add. } d\text{B. } d \qquad \text{add. CP. } g$$

$$d - e - d\text{K. } x - a + d \mid \text{KD. } \frac{ex - ae + de}{d} \qquad \text{PD. } \frac{bx - ay + cg}{c}$$

$$\text{add. HK. } y \qquad \text{ſubtr.}$$

$$f - g - \text{HD. } \frac{ex - ae + de + dy}{d} \mid \text{DQ. } \frac{egx - aeg + deg + dgy}{df}$$

$$\text{P}n \quad n\text{M}$$

$$h - i - \text{PQ. } \frac{bdfx - adfy + cdfg - cegx + aceg - cdeg - cdgy}{cdf},$$

$$\text{ad MN. } \frac{bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy}{cdfh}.$$

$$\text{CD} \qquad\qquad \text{MN.}$$

$$h - k - \frac{bx - ay}{c}, \text{ ad } \frac{bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy}{cdfh}.$$

$$bdfix - adfiy + cdfgi - cegix + acegi - cdegi - cdgiy \propto bdfkx - adfky.$$

$$adfiy + cdgiy - adfky \propto bdfix - cegix - bdfkx + cdfgi + acegi - cdegi$$

$$\text{fit } y \propto \frac{\begin{array}{l} + bdfi\,x + cdfgi \\ - cegi \quad + acegi \\ - bdfk \quad - cdegi \end{array}}{adfi + cdgi - adfk}.$$

Id quod arguit, punctum H cadere in rectam lineam, poſitione datam.

Idem ſimiliter liquet de quotcunque poſitione datis rectis concurrentibus.

Hinc:

Concluſio prioris partis 8væ Propoſitionis. Si ab aliquo puncto ad quotcunque poſitione datas parallelas vel concurrentes in datis angulis ducantur rectæ lineæ, quæ ad data in ipſis puncta abſcindant rectas lineas datam inter ſe rationem habentes; punctum continget poſitione datam rectam lineam.

Quod erat demonſtrandum.

NOTA.

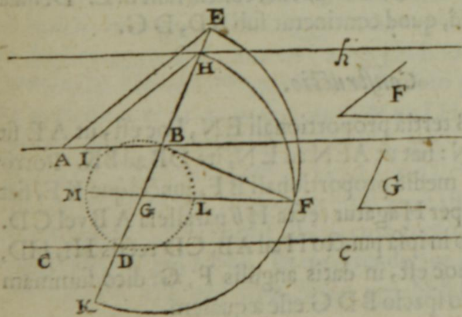
Cum in 7ma Propositione ulteriùs quoque habeatur, quòd, si abscissæ rectæ lineæ datum spatium comprehendant, quæsitum punctum contingat rectam lineam positione datam, nec tamen id ipsum sive in parallelis sive in concurrentibus locum inveniat, quoniam punctum eâ ratione non in rectam lineam sed Hyperbolam cadit: idcirco casum istum, ceu ab imperito quodam insertum, neglEximus & repudiavimus, ejusque loco sequens Problema 13, genuinam illius mentem exponere nobis visum, subrogavimus. Deinde cum ibidem adhuc dicatur, quòd, si rectæ positione datæ sunt parallelæ, & species ab ipsis ductis vel excessus specierum dato spacio est æqualis, punctum similiter contingat positione datas rectas lineas: idcirco illud ostensuri, antequam posteriorem 7mæ Propositionis partem concluderemus, duo reliqua sequentia 14 & 15 Problemata huic adplicavimus.

XIII PROBLEMA.

Datis positione duabus rectis parallelis A B, C D, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductis ad positione datas A B, C D in datis angulis F, G duabus rectis H I, H D, rectangulum I H D, sub ipsis comprehensum, dato spacio sit æquale.

Fiant, ut ante, anguli BAE, cDE æquales angulis F, G; lineæque AE, DB, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde datum spacium esto illud, quod sub AE & BK continetur.

Constructio.



Inventâ inter EB & BK mediâ proportionali BF, secetur BD bifariam in G, jungaturque GF. Porrò factâ GH æquali GF, agatur per H recta H h parallela AB vel CD; ductisque ab aliquo in ea puncto H ad

AB, CD rectis HI, HD parallelis AE, ED, hoc eſt, in datis angulis F, G: dico quod ſub IH, HD continetur rectangulum eſſe æquale dato ſpacio ſive rectangulo contento ſub AE, BK.

Demonſtratio.

Deſcripto ex G intervallo DG vel GB circulo DMBL, ſecetur ejus circumferentia ab FG in L, atque ab eadem producta in M: [a] eritque ▭ MFL, hoc eſt, DHB æquale □to ex BF. Eſt autem [b] □tum ex BF etiam æquale ▭lo KBE. Æquale igitur eſt ▭ DHB ipſi ▭lo KBE. Unde erit [c] ut DH ad KB, ita BE ad BH. Sed ut BE ad BH, ita eſt quoque [d] AE ad IH. Quare erit ut DH ad KB, ſic AE ad IH: ideoque [e] id, quod ſub extremis continetur ▭ DHI æquale ▭lo ſub mediis KB, AE, hoc eſt, dato ſpacio. Quod erat faciendum.

a p Cor. 36. libr. 3. Elem.
b p 14. libr. 2, vel 17. libr. 6. Elem.
c p 16. libr. 6. Elem.
d p 4. libr. 6. Elem.
e p 16. libr. 6. Elem.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto *h* in linea H*h* aſſumpto.

XIV *PROBLEMA.*

Datis poſitione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipſas punctum H, à quo eductis ad poſitione datas AB, CD in datis angulis F, G duabus rectis HI, HD, quæ ab ipſis fiunt quadrata ſimul ſumpta ſint æqualia dato ſpacio.

Fiant, ut ante, anguli BAE, *c* DE æquales angulis F, G; lineæque AE, DE, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde ſit datum ſpacium, illud, quod continetur ſub BD, DG.

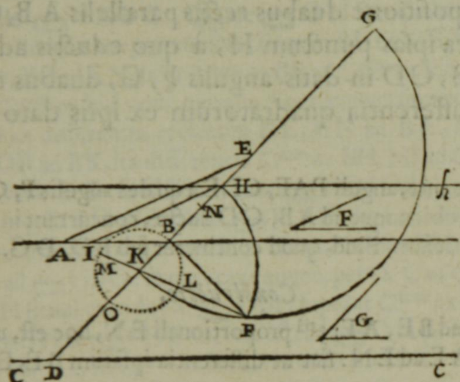
Conſtructio.

Inventâ ad AE, EB tertiâ proportionali EN, hoc eſt, ut AE ſit ad EB, ſicut EB ad EN: fiat ut AEN ad EN, ita DB ad BK. Porrò inventâ inter KB, BG mediâ proportionali BF, junctâque KF, fiat eidem æqualis KH, & per H agatur recta H*h* parallela AB vel CD. Tum eductis ex aliquo in ipſa puncto H ad AB, CD rectis HI, HD, parallelis AE, ED, hoc eſt, in datis angulis F, G: dico ſummam □torum ex IH, HD dato ſpacio BDG eſſe æqualem.

De-

Demonstratio.

Descripto ex K intervallo K B circulo O M B L, secetur ejus peripheria ab FK in L, atque ab eadem producta in M: eritque [a] ▭ MFL, hoc est, O H B æquale □to ex B F. Est autem [b] □tum ex B F æquale ▭lo KBG. Quare etiam ▭ OHB æquale erit ▭lo KBG. Porrò,



quoniam per constructionem AE est ad EB, sicut E B ad E N. id est, [c] A E ad E N, sicut □tum ex A E ad □tum ex EB, vel ut □tum ex IH ad □tum ex HB: erit componendo [d] ut AEN ad EN, hoc est, DB ad BK, ita summa □rum ex IH, H B ad □tum ex H B. Quoniam verò [e] D B est ad B K, sicut ▭ D B K ad ▭ HBK, vel [f] sicut duplum ▭ DBH ad duplum ▭ H B K, hoc est, ad ▭ H B O: erit quoque summa □rum ex IH, HB ad □tum ex HB, sicut duplum ▭ DBH ad ▭ HBO. Ac proinde, per 12. 5, ut summa □rum ex I H, H B unà cum duplo ▭ D B H ad summam □ti ex H B & ▭li H B O, hoc est [g], ad ▭ O H B, ita summa □rum ex I H, H B ad □tum ex H B, seu D B ad BK. Sed ut DB ad BK, ita quoque [h] est ▭ DBG ad ▭ KBG. Quocirca ut summa □rum ex IH, HB unà cum duplo ▭ DBH ad ▭ OHB, ita ▭ DBG ad ▭ KBG. Et invertendo [i] ut ▭ OHB ad summam □rum ex IH, HB unà cum duplo ▭ D B H, ita ▭ K B G ad ▭ D B G.

a p Cor. 36. libr. 3. Elem.
b 14. libr. 2, vel 17. lib. 6. Elem.
c p Cor. 20. libr. 5. Elem.
d p 18. libr. 5. Elem.
e p 1. libr. 6. Elem.
f p 15. libr. 5. Elem.
g p 3. libr. 2. Elem.
h p 1. libr. 6. Elem.
i p Cor. 4. lib. 5. Elem.

▭ DBG. Unde, cum ▭ OHB æquale sit ostensum ▭^{lo} KBG, erit quoque [k] summa □^{rum} ex IH, HB unà cum duplo ▭ DHB æquale ▭^{lo} DBG. Et proinde si addatur utrinque □^{tum} ex DB, erit [l] summa □^{rum} ex IH, HD æqualis dato spacio seu ▭^{lo} BDG. Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum de quolibet puncto *h*, in linea H*h* assumpto.

k p 14. libr. 5. Elem.
l p 4. & 3. libr. 2. Elem.

XV *PROBLEMA.*

Datis positione duabus rectis parallelis AB, CD, invenire extra ipsas punctum H, à quo eductis ad positione datas AB, CD in datis angulis F, G, duabus rectis HI, HD, differentia quadratorum ex ipsis dato spacio sit æqualis.

Fiant, ut ante, anguli BAE, CDE æquales angulis F, G; lineæque AE, DE, ubicunque ad AB, CD ductæ, concurrant in E. Deinde sit datum spacium, illud, quod continetur sub BD, DG.

Constructio.

Inventâ ad BE, AE, 3^{tiâ} proportionali EN, hoc est, ut BE sit ad EA, sicut AE ad EN: fiat ut differentia ipsarum BE, EN ad EN, ita DB ad BK. Tum inventâ inter KB, BG mediâ BF, jungatur KF, fiatque KH æqualis KF. Deinde per H ductâ rectâ H*h* parallelâ AB vel

vel C D, ductiſque ex aliquo in ea puncto H ad A B, C D rectis H I, HD parallelis AE, E D, hoc eſt, in datis angulis F, G: erit differentia □^{tum} ex DH, HI æqualis dato ſpacio B D G.

Demonſtratio.

Deſcripto ex K intervallo K B circulo O M B L, ſecetur ejus peripheria ab F K in L, atque ab eadem producta in M: [a] eritque ▭ MFL, hoc eſt, OHB æquale □^{to} ex BF. Eſt autem □^{tum} ex BF [b] æquale ▭^{lo} K B G. Quare ▭ O H B æquale quoque erit ▭^{lo} KBG. Porrò cum per conſtructionem BE ſit ad E A, ut A E ad EN. ideſt [c], BE ad EN, ſicut □^{tum} ex BE ad □^{tum} ex EA, vel ut □^{tum} ex BH ad □^{tum} ex H I: erit quoque [d] per converſionem rationis & invertendo ut differentia rectarum B E, E N ad B E, hoc eſt, per conſtr. ut DB ad BK, ita differentia □^{tum} ex BH, HI ad □^{tum} ex BH. Quoniam verò D B eſt ad B K [e], ſicut ▭ D B H ad ▭ HBK, vel [f], ut duplum ▭ D B H ad duplum ▭ H B K, hoc eſt, ad ▭ H B O; erit quoque differentia □^{tum} ex BH, HI ad □^{tum} ex BH, ſicut duplum ▭ DBH ad ▭ HBO: & per conſequens, per 12. 5, ut exceſſus, quo □^{tum} ex BH ſimul cum duplo ▭ DBH ſuperat □^{tum} ex H I, ad ſummam □^{ti} ex B H & ▭^{li} H B O, hoc eſt, ad ▭ O H B, ita differentia □^{tum} ex B H, H I, ad □^{tum} ex B H, vel ut D B ad BK. Sed ut D B ad BK, ita [g] eſt quoque ▭ DBG ad ▭ K B G. Quocirca ut exceſſus, quo □^{tum} ex B H unâ cum duplo ▭ D B H ſuperat □^{tum} ex H I ad ▭ OHB, ita ▭ DBG ad ▭ KBG. Et invertendo [h] ut ▭ OHB ad exceſſum, quo □^{tum} ex BH unà cum duplo ▭ DBH ſuperat □^{tum} ex HI, ita ▭ K B G ad ▭ D B G. Unde, cum ▭ O H B ſit æquale oſtenſum ▭^{lo} KBG, erit etiam [i] exceſſus, quo □^{tum} ex BH unà cum duplo ▭ D B H ſuperat □^{tum} ex H I, æqualis ▭^{lo} D B G. Ac proinde ſi utrinque addatur □^{tum} ex D B, erit quoque [k] differentia □^{tum} ex DH, HI æqualis dato ſpacio ſeu ▭^{lo} BDG Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto *h* in recta H *h* aſſumpto.

NOTA,

Cum 7ma Propoſitio in genere doceat, quòd, ſi ſpecies vel exceſſus ſpecierum, quæ à ductis fiunt, ſint dato ſpacio æquales, quæſitum punctum rectam lineam contingat poſitione datam (id quod in binis proximè præcedentibus Problematis de quadratis tantùm

a p Cor 36. libr. 3. Elem.
b 14. libr. 2, vel 17. lib. 6. Elem.
c p Cor. 20. libr. 6. Elem.
d p Cor. 19. & Cor. 4. libr. 5. Elem.
e p 1. libr. 6. Elem.
f p 15. libr. 5. Elem.
g p 1. libr. 6. Elem.
h p Cor. 4. libr. 5. Elem.
i p 14. libr. 5. Elem.
k p 4 & 3. libr. 2. Elem.

ostendimus) : sciendum erit, postquam ex demonstratione 77^{mæ} Prop^{nis} Datorum Euclidis constet, datis specie duabus figuris ad invicem datam rationem habentibus, quadratum quoque cujuslibet lateris unius ad quadratum cujuslibet lateris alterius datam rationem habere, quòd, datâ ratione istarum figurarum, detur quoque ratio horum quadratorum. Id quod similiter in sequentibus Problematibus, in quibus de figuris, specie datis, sermo fit, intelligendum est. quo ipso septimæ Propositioni colophonem imponimus.

Hinc:

Conclusio posterioris partis 8^{væ} Propositionis.

Si ab aliquo puncto ad positione datas duas parallelas ducantur duæ rectæ lineæ in datis angulis datum spatium continentes; vel quarum species vel excessus specierum sit dato spacio æqualis: punctum continget positione datas rectas lineas.

Quod erat demonstrandum.

S E-

SEQVVNTVR PROBLEMATA IN SECUNDI LIBRI PROPOSITIONES.

In primam Propositionem

I PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere AF, BF, ut illorum, quæ ab ipsis fiunt, differentia sit æqualis dato spatio C.

Constructio.

Ductâ A B, fiat $\sqsubset\!\sqsupset$ A B D æquale dato spacio C, seceturque A D bifariam in E. Tum ex E ductâ EF ad angulos rectos super A B, & ex A & B ad aliquod in ea punctum F ductis duabus rectis A F, B F; erit differentia $\square^{rum}$ ex B F, A F æqualis dato spacio C.

Demonstratio.

Per 6. 2^{di} Elem. $\square^{tum}$ ex E B superat $\square^{tum}$ ex A E vel E D, $\sqsubset\!\sqsupset^{lo}$ ABD, hoc est, dato spatio C. Sed quoniam inæqualibus adjunctis æqualibus totorum excessus æqualis est excessui eorum, quæ erant à principio, constat, addito utrinque communi $\square^{to}$ ex E F, $\square^{ta}$ ex E B, E F, simul sumpta, tantùm excedere $\square^{ta}$ ex AE, EF, simul sumpta, quantum $\square^{tum}$ ex E B excedit

dit □^{tum} ex A E. Sunt autem [a] bina □^{ta} ex E B, E F æqualia □^{to} ex B F, & bina □^{ta} ex A E, E F æqualia □^{to} ex A F. Quocirca si □^{tum} ex E B excedit □^{tum} ex A E dato spatio C, excedet quoque □^{tum} ex B F ipsum □^{tum} ex A F eodem spatio C. Quod erat faciendum.

a. p 47. libr. 1. Elem.

Idem similiter intelligendum de quolibet puncto in linea E F assumpto, estque manifestum de omnibus figuris, datâ specie super A F, B F descriptis.

In 1^{mam} Propositionem.

II PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A F, B F, datam inter se rationem habentes, A C ad C B.

Constructio 1^{mi} *casus.*

Primò sit A C æqualis C B, ductâque C F ipsi A B perpendiculari, agantur ex A & B ad quodlibet in ea punctum F rectæ A F, B F:

eritque A F æqualis B F. Cujus demonstratio manifesta est ex 4ta 1^{mi} Elementorum.

Con-

Constructio 2^di^ casus.

Esto jam A C major quàm C B, lineâ AD; fiatque ut AD ad D C, ita CB ad B E. Tum ex E intervallo C E descripto circulo, eductisque ex A & B ad aliquod in circumferentia punctum F duabus rectis: erit AF ad FB, ut A C ad CB.

Demonstratio 2^di^ casus.

Junctâ FE, quoniam per constructionem A D est ad D C, ut C B ad B E, hoc est, componendo [a] A C ad C D vel C B, ut C E ad E B: erit quoque per 12.5. AE ad CE, hoc est, EF, sicut CE vel EF ad EB. Hinc cum △^rum^ A E F, FEB, communem habentium angulum E, latera circa ipsum proportionalia sint: erunt quoque [b] reliqua latera A F, FB ad se invicem, ut A E ad E F, vel E F, hoc est, C E, ad E B. Sed ut CE ad EB, ita est AC ad CB. Quapropter erit ut A F ad F B, ita A C ad C B. Quod erat faciendum. Idem similiter intelligendum de quolibet puncto F in circumferentia assumpto.

a p 18. libr. 5. Elem.

b p 6. libr. 6. Elem.

Quod ipsum aliter quoque demonstratum reperitur ab Eutocio in principio Commentariorum suorum in Apollonii Conica.

NOTA.

Hinc quoque dimanat constructio sequentis Problematis, ejusdem fermè cum præcedente argumenti.

Adhuc in 1^mam^ Propositionem.

III *PROBLEMA.*

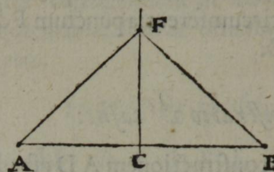
A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A F, B F, ut, quæ ab ipsis fiunt, datam inter se habeant rationem G ad I.

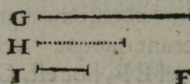
Primò, si G sit æqualis I, agatur, ut ante, ex C, medio ipsius AB ad ipsam perpendicularis C F: ductisque ex A & B ad aliquod in ea punctum F rectis AF, BF, erunt, propter harum æqualitatem, etiam

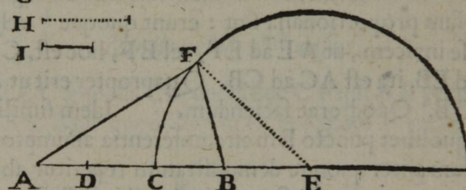
quæ ab ipſis fiunt quadrata ſibi invicem æqualia, cadetque punctum F, ut in 1mo caſu præcedentis Problematis, in rectam CF.

a p 13. libr. 6 Elem.
b p 10 libr. 6. Elem.

Sin autem G major ſit quàm I, inventâ [a] inter G & I mediâ proportionali H, ſecetur AB in C [b], ita ut AC ſit ad CB, ſicut G ad H:







c p 22. libr. 6 Elem.
d p Cor. 20. libr. 6. Elem.

eritque, ſi fiat, ut ante, AF ad FB, ſicut AC ad CB, [c] ut □tum ex AF ad □tum ex FB, ſic □tum ex AC ad □tum ex CB, vel □tum ex G ad □tum ex H, id eſt [d], ſicut G ad I. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto F, in circumferentia aſſumpto.

Eodem modo patet: ſi à duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, habeantque figuræ, datâ ſpecie ſuper ipſis deſcriptæ, datam inter ſe rationem, punctum quæſitum contingere rectam lineam aut circuli circumferentiam.

Hinc:

Concluſio 2mæ Propoſitionis.

Si à datis duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, ut illorum, quæ ab ipſis fiunt, differentia ſit æqualis dato ſpatio, punctum inflexionis continget rectam lineam poſitione datam. At verò rectam lineam aut circuli circumferentiam, ſi inflexæ, vel quæ ab ipſis fiunt, datam inter ſe habeant rationem.

Quod erat demonſtrandum.

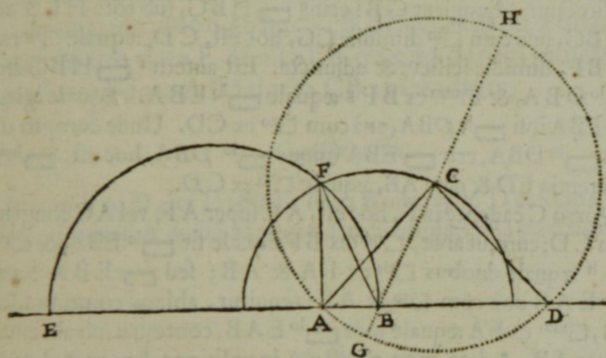
In 2^{dam} Propoſitionem.

IV PROBLEMA.

A dato puncto A in poſitione data recta linea AD rectam lineam terminatam ducere AC, ita ut, ſi ab ejus termino C ad poſitione datam AD ducatur alia CD ipſi æqualis, id quod ab ea fit æquale ſit rectangulo ſub data AB, & alia ED, quæ ad datum punctum E in poſitione data AD à ducta CD abſcinditur.

Conſtructio.

Inventâ mediâ proportionali BF inter EB & BA, deſcribatur ex B intervallo BF circulus CF, ductâque ex A ad aliquod in circumfe-



1ma *figura.*

rentia punctum C rectâ AC, & ex C rectâ CD æquali CA: erit □^{tum} ex CD æquale ▭^{lo} ſub AB, ED.

Demonſtratio.

Deſcripto enim ex C intervallo CD vel CA circulo AGDH, juncta CB occurrat producta circumferentiæ in G & H, eritque in 1ma fig., cum GH ſic bifariam ſit ſecta in C, & non bifariam in B, [a] ▭ GBH, ſub inæqualibus ſegmentis, unà cum □^{to} ex BC vel BF, [a] p 5. libr. 2 Elem.

in-

intermedia sectionis, æquale □to dimidiæ GC, hoc est, CD. Est autem [b] ▭ GBH æquale ▭lo ABD, & □tum ex BF æquale ▭lo ABE. Æquale igitur est □tum ex CD duobus ▭lis ABD & ABE, hoc est, [d] æquale ▭lo sub tota ED & data AB.

b p 35. libr. 3. Elem.
c p Cor. 8. Sexti, & 7. lib. 6. Elem.
d p 1. libr. 2. Elem.

2da figura.

Assumpto autem puncto C ad alteram partem perpendicularis AF, ut in 2da fig. quoniam sic GH bifariam secatur in C, eidemque in directum adjungitur GB: erit [e] ▭ HBG, sub tota HB & adjuncta BG, unà cum □to dimidiæ CG, hoc est, CD, æquale □to ex CB vel BF, dimidia scilicet & adjuncta. Est autem [f] ▭ HBG æquale ▭lo DBA, & □tum ex BF [g] æquale ▭lo EBA. Æquale igitur est ▭ EBA ipsi ▭lo DBA, unà cum □to ex CD. Unde dempto utrinque ▭lo DBA, erit ▭ EBA minus ▭lo DBA, hoc est, ▭lum sub differentia ED & data AB, æquale □to ex CD.

e p 6. lib. 2. Elem.
f p Cor. 36. libr. 3. Elem.
g p Cor. 8, & 17. libr. 6. Elem.

Porrò C cadente in F, hoc est, AC super AF, vel AC congruente cum CD; cum, ut ante, □tum ex BF æquale sit ▭lo EBA; & □tum ex BF [h] æquale duobus □tis ex FA & AB; sed ▭ EBA [i] æquale ▭lo EAB unà cum □to ex AB: sequitur, ablato communi □to ex AB, □tum ex FA æquale fore ▭lo EAB, contento sub abscissa EA & data AB. A dato ergo puncto A in positione data recta linea &c. Quod erat faciendum.

h p 47. libr. 1. Elem.
i p 3. libr. 2. Elem.

Eodem modo, si ex A sit ducenda recta AC, & ex ejus termino C alia CD ipsi æqualis; ita ut □tum ab ea descriptum sit æquale ▭lo sub data AB & linea AD, quæ à ducta CD ad punctum A abscin-

inditur: oportet tantùm ex B intervallo B A describere circulum ACF, & ex A ad aliquod in circumferentia punctum C ducere rectam A C, tum C D eidem æqualem, eritque □tum quod ab ipsa describitur æquale ▭lo sub data A B & abscissa A D. Quod manifestum est demittendo ex C super AB perpendicularem C I.

Est enim [k] □tum ex A C vel C D æquale ▭lo F A I vel B A D, ut requirebatur. Id quod similiter de quolibet in circumferentia puncto est intelligendum. k p Cor. 8. Sexti, ut & 17. Sexti Elem.

Aliud in 2dam Propositionem.

V *PROBLEMA.*

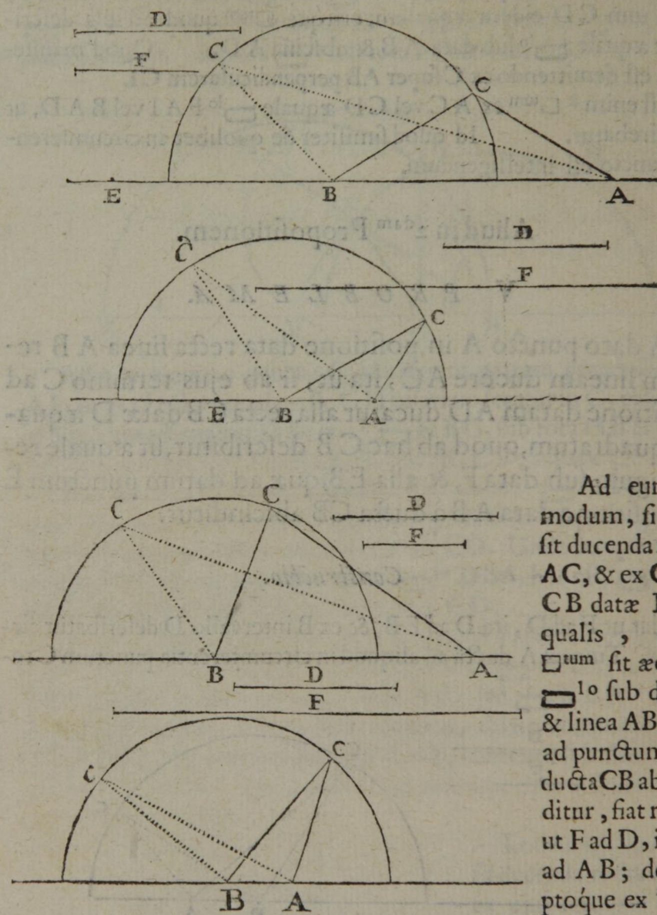
A dato puncto A in positione data recta linea A B rectam lineam ducere AC, ita ut, si ab ejus termino C ad positione datam AD ducatur alia recta CB datæ D æqualis, quadratum, quod ab hac C B describitur, sit æquale rectangulo sub data F, & alia EB, quæ ad datum punctum E in positione data A B à ducta CB abscinditur.

Constructio.

Fiat ut F ad D, ita D ad E B, & ex B intervallo D describatur circulus. Tum ex A ductâ ad aliquod in circumferentia punctum C rectâ A C, & à C ad B rectâ C B: erit □tum quod ab ipsa describitur æquale ▭lo contento sub data F & abscissa E B.

Quod erat faciendum.

Idem liquet de quolibet puncto C in circumferentia assumpto.



Ad eundem modum, si ex A sit ducenda recta AC, & ex C alia CB datæ D æqualis, cujus □tum sit æquale ▭lo sub data F & linea AB, quæ ad punctum A à ducta CB abscinditur, fiat rursus ut F ad D, ita D ad AB; descriptoque ex B, ut ante, circulo intervallo D, & ex A ductâ ad aliquod in circumferentia punctum rectâ AC, tum CB: erit ipsa datæ D æqualis, & □tum ab ea descriptum [a] æquale ▭lo contento sub lineis F & AB. ut requirebatur. Quod similiter de quolibet in circumferentia puncto est intelligendum.

a p 17. libr. 6. Elem.

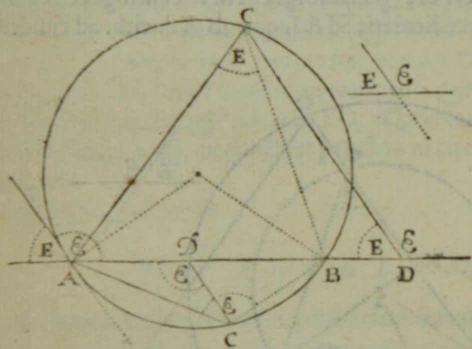
Ad-

Adhuc aliud in 2dam Propositionem.

VI PROBLEMA.

A dato puncto A in positione data recta linea A D rectam ducere lineam A C, ita, ut, si ab ejus termino C ad positione datam A D ducatur alia C D in dato angulo E, quadratum à primò ducta A C descriptum sit æquale rectangulo sub data AB & alia A D, quæ ad datum punctum A in positione data AD ab ultimò ducta CD abscinditur.

Constructio.



Descripto super A B per 33. 3tii Elem., vel per 2 Probl. 1mi hujus segmento circuli ACB, quod capiat angulum A C B æqualem dato E; ductâque ex A ad aliquod in circumferentia punctum C rectâ AC, & ex C rectâ C D in dato angulo E: erit □tum ex A C æquale ▭lo B A D, contento sub data A B & abscissa A D.

Demonstratio.

Junctâ C B, cum angulus C A D utrique △lo A C B, A D C sit communis, & anguli ad C & D sint æquales: erit 3tius quoque 3tio a æqualis, ac proinde b BA ad A C, sicut A C ad A D: adeoque ▭lum sub extremis B A, A D c æquale □to mediæ A C. Quod erat faciendum. Idem similiter constat de quolibet puncto C in circumferentia circuli A C B C assumpto.

a p Cor. 32. libr. 1. Elem.
b p 4. libr. 6. Elem.
c p 17. libr. 6. Elem.

Eodem fermè modo solvitur sequens.

VII PROBLEMA.

A dato puncto A in poſitione data recta linea A D rectam lineam terminatam ducere A C, ita, ut, ſi ab ejus termino C ad poſitione datam A D ducatur alia recta C D in dato angulo E, quadratum primò ductæ A C æquale ſit rectangulo ſub data A B & alia F D, quæ ad datum punctum F in poſitione data A D ab ultimò ducta C D abſcinditur.

Conſtructio.

a p 33. libr. 3. Elem, vel 2 Probl. 1mi hujus.

Deſcripto, ut ante, ſuper A B [a] ſegmento circuli A G B, quod capiat angulum dato angulo E æqualem, inventâque inter F A, A B mediâ proportionali A H; ponatur ipſa ut in A contingat circulum A G B, hoc eſt, perpendicularis ad A I, quæ ab A ducitur ad ejuſdem centrum I; deſcriptoque ex I per punctum H circulo H L K C, & ex A ad aliquod in ejus circumferentia punctum C ductâ rectâ A C, tum ex C rectâ C D in dato angulo E: erit □tum ex A C æquale ▭lo ſub data A B & abſciſſa F D.

De-

Demonstratio.

Productis H A, C A donec circumferentiæ occurrant in K & L, demissâque ex I super AG perpendiculari I M, jungatur GB. Quoniam itaque angulus C A D utrique △^{lo} AGB, ADC communis est, & angulus ad G æqualis angulo ad D, erit quoque 3^{tius} 3^{tio} æqualis [b], ac proinde [c] B A ad AG, sicut AC ad AD, & per consequens [d] ▭^{lum} sub extremis B A, A D æquale ▭^{lo} sub mediis C A, A G. Porrò cum I M sit perpendicularis ad AG, erit AM [e] æqualis MG, ut & L M æqualis M C, quibus à se invicem subductis, erit quoque L A æqualis G C. Eodem modo, cum I A per constructionem sit perpendicularis ad HK, erit quoque HA æqualis AK. Hinc cum ▭ CAL, hoc est, A C G [f], sit æquale ▭^{lo} K A H, hoc est, □^{to} ex A H; & hoc sit æquale ▭^{lo} F A B [g]: erit etiam ▭ ACG æquale ▭^{lo} F A B. Est autem ▭ C A G æquale ostensum ▭^{lo} B A D. Quare cum [h] duo ▭^{la} C A G, A C G simul sumpta sint æqualia □^{to} ex A C; itemque duo ▭^{la} BAD, FAB [i] simul sumpta æqualia ▭^{lo} sub A B, F D: erit □^{tum} ex AC æquale ▭^{lo} sub AB, FD. Quod erat faciendum. Idem similiter patet de quolibet puncto *c* in circumferentia HLKC assumpto.

His adjunge sequens

b *p Cor. 32. libr. 1. Elem.*
c *p 4. libr. 6. Elem.*
d *p 16. libr. 6. Elem.*
e *p 3. libr. 3. Elem.*
f *p 35. libr. 3. Elem.*
g *p Constr. & 17. libr. 6. Elem.*
h *p 2. libr. 2. Elem.*
i *p 1. libr. 2. Elem.*

VIII *PROBLEMA.*

A dato puncto A extra positione datam rectam lineam N P rectam lineam terminatam ducere A C, ita ut, si ab ejus termino C ad positione datam NP alia ducatur recta CP in dato angulo E, quadratum primò ductæ A C sit æquale rectangulo sub data AB & alia NP, quæ ad datum punctum N in positione data NP ab ultimò ducta CP abscinditur.

Conſtructio.

Etenim ductâ per A rectâ FD parallelâ NP, in eaque aſſumptâ AB æquali datæ, agatur ex N recta NF in dato angulo E, donec occurrat ipſi FD in F: eritque, operando ulteriùs ut in præcedenti Probl., □tum ex AC æquale ▭lo ſub AB & FD, hoc eſt, NP, ut requirebatur. Cujus demonſtratio liquet ex præcedenti, & ad quodlibet punctum C in circumferentia aſſumptum referri poteſt.

Hinc:

Concluſio 2dæ Propoſitionis. Si ſit poſitione data recta linea, & è dato in ipſa puncto ducatur recta linea terminata, & ab ejus termino alia ad poſitione datam, quæ vel eidem vel alii datæ ſit æqualis; ita ut, quod ab ipſa fit, ſit æquale rectangulo ſub data & alia, quæ vel ad datum punctum, vel ad aliud in poſitione data abſcinditur, continget ejus terminus circuli circumferentiam, poſitione datam.

Quod erat demonſtrandum.

Similiter liquet:

Additamentum. Si ſit poſitione data recta linea, & à puncto in vel extra ipſam dato agatur recta linea terminata, ita ut, quod ab ipſa fit ſit æquale rectangulo ſub data & alia, ad datum punctum in poſitione data, aliudvé in ipſa datum, abſciſsâ à recta linea, quæ à primæ termino in dato angulo ad poſitione datam ducitur: continget ejus terminus circumferentiam circuli poſitione datam.

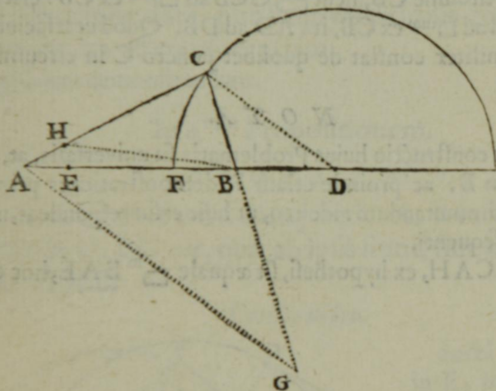
In 3^{tiam} Propositionem.

IX PROBLEMA.

A datis duobus punctis A, B duas rectas lineas inflectere A C, B C; ita ut, quod ab una A C efficitur, eo quod fit ab altera B C, sit dato spatio B A E majus, quàm in ratione data A D ad D B.

Constructio.

Inventâ inter E D, D B mediâ proportionali F D, describatur ex D intervallo F D circulus F C; ductisque ex A & B ad aliquod in cir-



cumferentia punctum C rectis AC, BC: dico excessum, quo □^{tum} ex AC superat ▭ BAE, esse ad □^{tum} ex B C, sicut AD ad DB.

Præparatio ad demonstrationem.

Junctâ C D, agatur ex A eidem parallela A G, donec ipsi C B productæ occurrat in G. Deinde facto ▭^{lo} CAH æquali ▭^{lo} BAE, ducatur B H; demptoque C A H, hoc est, B A E, à □^{to} ex A C: dico reliquum ▭ ACH ad □^{tum} ex CB esse, sicut A D ad D B.

Demonstratio.

Cum ex hypothesi ▭ CAH sit æqnale ▭^{lo} BAE: erunt [a] puncta H, E, B, C in circuli circumferentia. Similiter, cum □^{tum} ex F D vel DC [b] sit æquale ▭^{lo} EDB, continget D C circumferentiam circuli,

a p Cor. 36. libr. 3. Elem.
b p Constr. & 17. libr. 6. Elem.

culi, per 3^a puncta E, B, C descripti, in C [c]. Hinc, quoniam circulus per 3ª puncta E, B, C transiens transire quoque est ostensus per 4^{tum} punctum H: erit angulus B C D ad contactum [d] æqualis angulo BHC in alterno circuli segmento. Est autem angulus BCD [e] æqualis angulo G. Quocirca æquales etiam inter se sunt anguli BHC & G. Porrò cum angulus B H C simul cum angulo B H A, qui ei est deinceps [f], sit æqualis 2^{bus} rectis: erunt similiter anguli A H B & G duobus rectis æquales, ac proinde [g] quadrilaterum A H B G in circulo, atque ideo [h] ▭ ACH æquale ▭^{lo} G C B. Denique cum propter similia △^{la} A B G, B C D [i], A B sit ad B D, sicut G B ad B C; & componendo [k] A D ad D B, sicut G C ad C B, hoc est [l], assumptâ communi altitudine CB, sicut ▭ GCB ad □^{tum} ex CB: erit quoque ut ▭ ACH ad □^{tum} ex CB, ita AD ad DB. Quod erat faciendum.

Idem similiter constat de quolibet puncto C in circumferentia assumpto.

c p 37. libr. 3. Elem.
d p 32. libr. 3. Elem.
e p 29. libr. 1. Elem.
f p 13 libr. 1. Elem.
g p Cor. 22. libr. 3 Elem.
h p Cor. 36. libr. 3 Elem.
i p 4. libr. 6. Elem.
k p 18. libr. 5. Elem.
l p 1. libr. 6. Elem.

NOTA.

Quamvis constructio hujus Problematis sit universalis, at, puncto E cadente in B, ac proinde etiam F, demonstrationis principium nonnihil sit immutandum: idcirco, ut huic casui respondeat, mutetur illud modo sequenti.

Cum ▭ C A H, ex hypothesi, sit æquale ▭^{lo} B A E, hoc est, □^{to} ex A B: continget A B^{tum} [m] circuli circumferentiam, per 3^a puncta H, B,

m p 37. libr. 3. Elem.

H, B, C transeuntem, in B; eritque [n] angulus C B D ad contactum æqualis angulo B H C, in alterno circuli segmento. Hinc, cum [o] angulus C B D sit æqualis angulo D C B, erunt etiam anguli B H C & D C B inter se æquales. Est autem angulus B C D æqualis angulo G, &c.

n p 32. libr. 3. Elem.
o p 5 libr. 1. Elem.

Quod autem hîc demonstratum est de □^tis super A C & C B descriptis, intelligendum quoque erit de aliis figuris, datâ specie super ipsas descriptis.

Hinc:

Si à datis duobus punctis duæ rectæ lineæ inflectantur, & sit quod ab una efficitur eo, quod ab altera dato majus quàm in ratione data: punctum inflexionis continget positione datam circumferentiam. *Conclusio 3^tiæ Propositionis.*

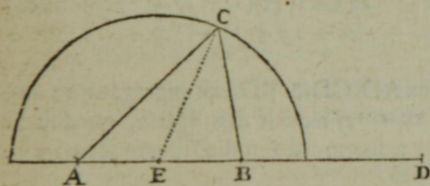
Quod erat demonstrandum.

In 4^tam Propositionem.

X PROBLEMA.

A duobus pluribusvé datis punctis A, B rectas lineas inflectere A C, B C; ut, quæ ab ipsis fiunt, sint æqualia dato spatio D A B.

Constructio.



Sectâ A B bifariam in E, inveniatur inter A E, E D media proportionalis E C; descriptoque ex E intervallo E C circulo, ductisque à punctis A, B ad aliquod in circumferentia punctum C rectis A C, B C: erunt, quæ ab ipsis fiunt □^ta, simul sumpta, æqualia dato spatio D A B.

Demonstratio.

Junctâ EC, erunt [a] bina □^ta ex AC, CB dupla □^rum ex A E, E C simul sumptorum. Est autem □^tum ex E C [b] æquale ▭^lo A E D, & □^rum ex A E unà cum ▭ AED [c] æquale ▭^lo DAE. Æqualia igitur sunt bina □^ta ex A C, C B duplo ▭^lo D A E. Hinc, cum ▭ DAB du-

a p 18. Prop. 2dæ partis, Primi tractatus.
b p Constr. & 17. libr. 6. Elem.
c p 3. libr. 2. Elem.

duplum quoque ſit ▭li DAE: erunt bina □ta ex AC, CB æaliqua ▭lo DAB. Quod erat faciendum.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto C, in circumferentia circuli aſſumpto.

Sequitur reſolutio atque operatio Problematis.

A datis 3bus punctis A, C, & B tres rectas lineas inflectere AD, CD, & BD, ut quæ ab ipſis fiunt quadrata, ſimul ſumpta, ſint dato ſpatio æqualia.

Demiſsâ ex C ſuper AB perpendiculari CE, ſecetur AB bifariam in G, ponaturque AG vel GB $\infty\, a$, EG $\infty\, b$, & EC $\infty\, c$. Deinde ad inveniendum punctum D, ſit GF $\infty\, x$, & perpendicularis DF $\infty\, y$: eritque

d p 47. libr. 1. Elem.

AF $\infty\, a + x$, cujus □to $aa + 2ax + xx$ ſi addatur □tum ex DF, fit d $aa + 2ax + xx + yy$, □tum ex AD.

Eodem modo, cum GB ſit $\infty\, a$, & GF $\infty\, x$: erit FB $\infty\, a - x$; cujus □to $aa - 2ax + xx$ ſi addatur □tum ex DF $\infty\, yy$, fit $aa - 2ax + xx + yy$, □tum ex DB.

Similiter addendo bina □ta ex CH, HD, ut $bb + 2bx + xx$ & $yy - 2cy + cc$, erit ſumma $bb + 2bx + xx + yy - 2cy + cc$, □tum ex CD.

Hinc, additis 3bus □tis ex AD, CD, & BD, erit aggregatum $2aa + bb + cc + 2bx - 2cy + 3xx + 3yy$ æquale dato ſpatio, quod ſit $2aa + 2bb + 2cc + \frac{4}{3}dd$. Quæ æquatio, ad ſimpliciſſimam formam reducta, erit

$$yy \;\infty\; + \tfrac{2}{3}cy + \tfrac{1}{3}bb + \tfrac{1}{3}cc + \tfrac{4}{9}dd - \tfrac{2}{3}bx - xx.$$

Ad quam ſolvendam cum nulla in Problemate ſuperſit materia perveniendi ad æquationem pro x: argumentum eſt, Problema propoſitum non eſſe penitus determinatum, ſed infinita eſſe puncta, ut D, quæſito ſatisfacientia. Quæ igitur omnia inveniuntur, ſubinde ſu-

ſumendo ad arbitrium aliam atque aliam lineam pro x. Quocirca y æquali exiſtente $\frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{3}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$, cum pro $\frac{1}{3}bb$ poni poſſit $\frac{4}{9}bb - \frac{1}{9}bb$, poterit pro $y \infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{3}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{2}{3}bx - xx}$ ſcribi $y \infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. Oſtendens longitudinem lineæ D F, prout x indeterminata exiſtit, ac proinde G F ad arbitrium ſumitur.

Atque ita videre eſt, datis quotcunque punctis, ſemper ejuſmodi terminos inveniri; præterquam quòd quidam ex illis interdum abeſſe poſſint, ſignaque + & — diverſimodè mutari.

Conſtructio.

Ad conſtructionem fiat I G $\infty \frac{1}{3}b$, & ex I erectâ ſuper A B perpendiculari I K $\infty \frac{1}{3}c$, deſcribatur centro K intervallo $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd}$ circulus M D N, & quodlibet in circumferentia punctum D quæſito ſatisfaciet.

Demonſtratio.

Quod manifeſtum eſt ſumendo K D $\infty \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd}$, & K L, hoc eſt, I F $\infty \frac{1}{3}b + x$: nimirum, æqualem radici ex $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$. quæ etiam eſſe poteſt $\frac{1}{3}b = x$, quando perpendicularis D F cadit inter G & I, vel extra I, quemadmodum illam hîc inter G & B ſumpſimus. Unde L D fit $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel etiam $\sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$, & D F $\infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{1}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$. qualem illam hîc invenimus, vel etiam $\infty \frac{1}{3}c + \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, ſi $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd + \frac{1}{3}cc$ eſt majus quàm $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

= ſignificat differentiã inter $\frac{1}{3}b$ & x, cum non exprimitur aut cognoſcitur penes quas ſit exceſſus.

Quæ etiam eſſe poteſt $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx - xx}$, vel $\frac{1}{3}c - \sqrt{\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}cc + \frac{4}{9}dd - \frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx - xx}$. nimirum, quando $\frac{4}{9}bb + \frac{4}{9}dd + \frac{1}{3}cc$ eſt minus quàm $\frac{1}{9}bb + \frac{2}{3}bx + xx$, vel $\frac{1}{9}bb - \frac{2}{3}bx + xx$.

Porrò notandum, pro dato ſpatio ſumi potuiſſe $2aa + 2bb + 2cc - \frac{4}{3}dd$, nimirum, minus duobus $\square^{tis}$ ex A C, C B: ſicut hoc loco illud majus aſſumpſimus, ſine reliqui immutatione.

Id quod oſtendit, quo pacto à datis tribus vel pluribus punctis ad unum punctum rectæ lineæ duci poſſint, quarum $\square^{ta}$, ſimul ſumpta, ſint dato ſpatio æqualia. Quod erat faciendum.

Denique cum in 4ta Propoſitione in genere fiat ſermo de figuris datâ ſpecie ſuper ductas deſcriptis: id, quod hîc ſpeciatim de $\square^{tis}$ oſtendimus, aliis quoque figuris datæ ſpeciei applicare licebit.

Quo-

Quoniam enim per 49 Prop^{nem} Datorum Euclidis, ſi ab eadem recta duo rectilinea quælibet datâ ſpecie deſcribantur, ipſa ad invicem rationem habent datam: ſequitur, ſi rationem □^{ti} ex A D ad figuram datâ ſpecie ſuper A D deſcriptam ponamus ut e ad f; eamque □^{ti} ex C D ad datâ ſpecie figuram ſuper C D ut e ad g; & denique rationem □^{ti} ex B D ad figuram ſpecie datam ſuper B D ut e ad h, ſummam harum trium figurarum fore

$$\frac{aaf + 2afx + fxx + fyy, + bbg + 2bgx + gxx + gyy - 2cgy + ccg, + aah - 2ahx + hxx + hyy.}{e}$$

Hinc ſi datum planum ſupponamus eſſe dd, æquatio ad legitimam formam reducta, erit

$$yy \propto + \frac{2cgy}{f+g+h} + \frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h} \; \frac{-2afx - 2bgx + 2ahx}{f+g+h} \; - xx.$$

8 ſignificat + vel —.

Vel in ſimplicioribus terminis: $yy \propto + 2iy + kk \; 8\, 2lx \; - xx.$

Hoc eſt, ſcribendo $2i$ pro $\frac{2cg}{f+g+h}$, & kk pro $\frac{dde - aaf - bbg - ccg - aah}{f+g+h}$, & + vel − $2l$ pro $\frac{-2af - 2bg + 2ah}{f+g+h}$. Datis enim omnibus hiſce quantitatibus, licebit iis ad arbitrium nomina imponere. Quocirca cum hæc æquatio non ſit diverſæ formæ à præcedente, continget punctum D, ut ante, circumferentiam circuli poſitione datam. Idem ſimiliter liquet de quotcunque punctis.

Concluſio 4^{tæ} Propoſitionis.

Hinc:

Si à quotcunque datis punctis ad punctum unum inflectantur rectæ lineæ, & ſint ſpecies, quæ ab omnibus fiunt, dato ſpatio æquales: continget punctum poſitione datam circumferentiam.

Quod erat demonſtrandum.

In

In 5^{tam} Propositionem.

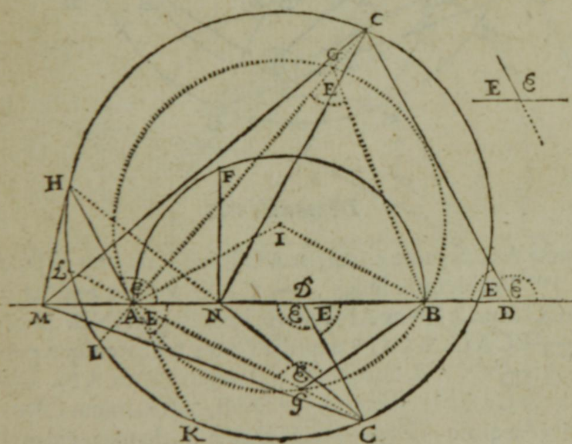
XI PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N in positione data recta linea AD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C ducatur recta CD in dato angulo E ad positione datam AD, quadrata ab inflexis MC, NC æqualia sint rectangulo sub data 2 AB, & alia MD, quæ ad alterutrum datorum punctorum M, vel aliud quodpiam in positione data AD ab ultimò ducta CD abscinditur.

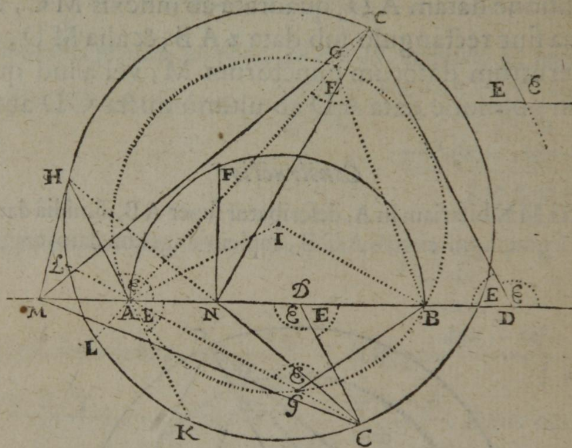
Constructio.

Sectâ MN bifariam in A, describatur super AB, dimidiâ datæ rectæ, [a] segmentum circuli AGB, capiens angulum dato angulo E æqualem: inventâque inter AN, NB mediâ proportionali NF, eâque positâ ab A ad H, (hoc est, in linea AH, quæ cum MA angulum facit

[a] p 33. libr. 3. Elem. vel per 2 Probl. 1^{mi} hujus.



ſacit dato angulo E æqualem) deſcribatur ex I centro circuli A G B per H circulus H C K L: Dico, ſi à punctis M, N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ MC, NC, tum recta C D ipſi A H parallela, hoc eſt, in dato angulo E, quòd □^{ta} ipſarum M C, N C ſimul ſumpta ſint æqualia ▭^{lo} contento ſub data 2 A B & abſciſſa M D.



Demonſtratio.

Junctâ A C, ſecante circulum A G B in G, ducatur G B: eritque ut in 7mo Problemate hujus, ▭ C A G æquale ▭^{lo} D A B, & ▭ ACG æquale □^{to} ex AH vel NF, hoc eſt, ▭ ANB. Sunt autem bina ▭^{la} C A G, A C G [b] æqualia □^{to} ex A C; itemque ▭ A N B [c] æquale ▭^{lo} N A B, hoc eſt, M A B minus □^{to} ex A N. Quocirca □^{tum} ex A C æquale eſt binis ▭^{lis} DAB, MAB, minus □^{to} ex A N, hoc eſt, [d] æquale erit ▭^{lo} ſub MD & AB, dempto eidem □^{to} ex A N. Atque adeò □^{tum} ex A C minus eſt ▭^{lo} ſub M D, A B quadrato ex AN; hoc eſt, erit illud unà cum □^{to} ex AN æquale ▭^{lo} ſub MD, AB. Hinc cum [e] bina □^{ta} ex MC, CN ſint binorum □^{torum} ex CA, AN dupla: erunt □ ex M C, C N ſimul ſumpta æqualia duplo ▭^{lo}

b *p 2. libr. 2. Elem.*
c *p 3. libr. 2. Elem.*
d *p 1. libr. 2. Elem.*
e *p 18 Prop. 2dæ partis 1^{mi} tractat.*

▭^{lo} ſub M D, A B, hoc eſt, æquale ▭^{lo} ſub M D & 2 A B. Quod erat faciendum.

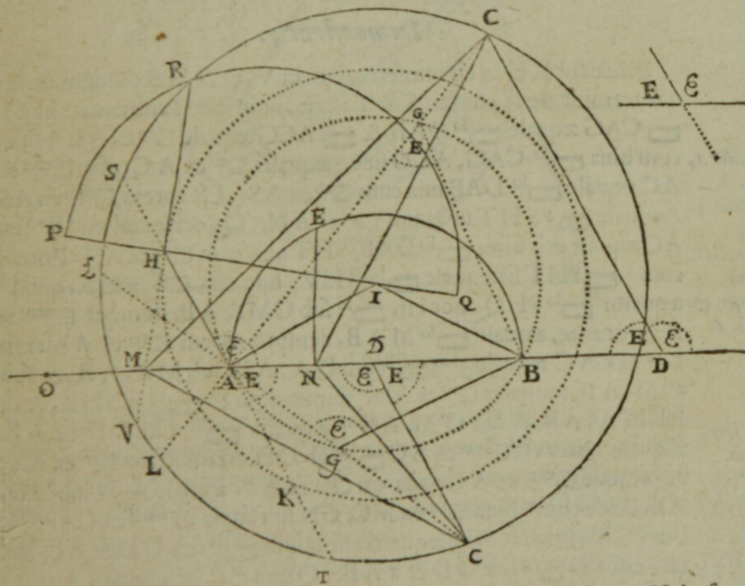
Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto C in circumferentia circuli HCKL aſſumpto.

Eodem modo invenitur punctum C, cùm bina $\square^{ta}$ ex M C, N C æqualia requiruntur ▭^{lo} ſub data 2 A B & linea N D, quæ à ducta C D ad alterum datum punctum N abſcinditur. Quo caſu manente eâdem figurâ punctum C cadet in circumferentiam minoris ſegmenti, prout illâ inversâ tantùm litera M in N, & N in M tranſmutatæ fuerint, ad quæſitum obtinendum.

NOTA.

Quod attinet ad demonſtrationem puncti H, illa ſic abſolvitur: Ductis duabus lineis M H, N H, quoniam $\square^{tum}$ ex H A æquale eſt

Nota. In hac figura lineam N H omiſſam eſſe.



▭^{lo} A N B: erunt, addendo utrique $\square^{tum}$ ex A N, bina $\square^{ta}$ ex H A, A N [f] æqualia ▭^{lo} B A N ſeu B A M. Unde, cum [g] bina $\square^{ta}$ ex M H, H N dupla ſint binorum $\square^{torum}$ ex H A, A N, erunt ipſa æqualia duplo ▭^{lo}

f p 3. libr. 2. Elem.

g p 18 Prop. 2dæ partis, 1mi tractat.

▭^{lo} B A M, hoc eſt, æqualia ▭^{lo} ſub data 2 A B & recta A M, quæ à ducta A H ad datum punctum M in poſitione data A B abſcinditur. ut requirebatur.

Sequitur Conſtructio & Demonſtratio, cùm bina □^{ta} ex M C, C N æqualia requiruntur ▭^{lo} ſub data 2 A B & recta O D, quæ ad aliud quodpiam datum punctum, ut O, in poſitione data A D à ducta C D abſcinditur.

Conſtructio.

Invento, ut ante, puncto H, ponatur in linea H I recta P H æqualis rectæ O M, & H Q æqualis A B; inventâque inter ipſas mediâ proportionali H R, & ex I per punctum R deſcripto circulo: Dico, ſi ex duobus punctis M & N ad aliquod in circumferentia punctum C ducantur rectæ M C, N C, □^{ta} quæ ab ipſis fiunt, ſimul ſumpta, eſſe æqualia ▭^{lo}, contento ſub data 2 A B & abſciſſa O D.

Demonſtratio.

Productâ R H ad circumferentiam in V, ut & H A eandem utrinque terminante in punctis S & T: erit, ut in 7mo Problemate hujus, ▭ C A G æquale ▭^{lo} D A B, & ▭ A C G æquale □^{to} ex A S. Hinc, cum bina ▭^{la} C A G, A C G ſint [h] æqualia □^{to} ex A C; erit □^{tum} ex A C æquale ▭^{lo} D A B unà cum □^{to} ex A S. Eſt autem □^{tum} ex A S [i] æquale ▭^{lo} S H T unà cum □^{to} ex A H. Quocirca etiam □^{tum} ex A C æquale erit binis ▭^{lis} D A B, S H T unà cum □^{to} ex A H. Porrò, cum [k] ▭ S H T ſit æquale ▭^{lo} R H V, hoc eſt, □^{to} ex H R, quod [l] æquatur ▭^{lo} P H Q, hoc eſt, ▭^{lo} ſub O M & A B; itemque □^{tum} ex A H, ut ante, æquale ▭^{lo} M A B, dempto eidem □^{to} ex A N: erit □^{tum} ex A C æquale 3^{bus} ▭^{lis} ſub D A, A B, ſub M A, A B, & ſub O M, A B, multatis □^{to} ex A N. Sunt autem 3^{a} ▭^{la} ſub D A, A B, ſub M A, A B, & ſub O M, A B [m] æqualia ▭^{lo} ſub O D & A B. Æquale igitur eſt □^{tum} ex A C ▭^{lo} ſub O D, A B multato □^{to} ex A N: ac proinde □^{tum} ex A C unà cum □^{to} ex A N æquale ▭^{lo} ſub O D, A B. Unde cum [n] bina □^{ta} ex M C, C N ſint dupla □^{torum} ex C A, A N, liquet, illa ſimul ſumpta æqualia eſſe duplo ▭^{lo} ſub O D & A B, hoc eſt, æqualia ▭^{lo} ſub O D & 2 A B. Quod erat faciendum.

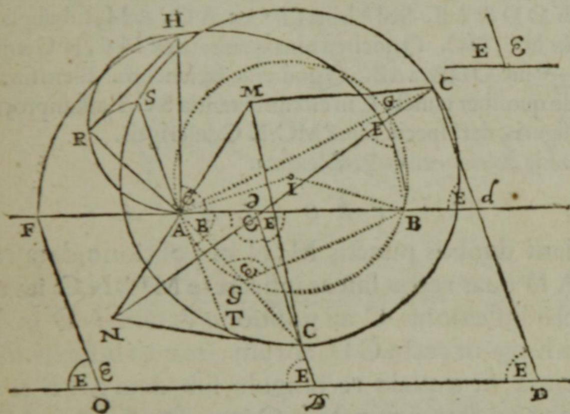
h *p 2. libr. 2. Elem.*
i *p 5. libr. 2. Elem.*
k *p 35. libr. 3. Elem.*
l *p Conſtr. & 17. lib. 6. Elem.*
m *p 1. libr. 2. Elem.*
n *p 18. Prop. 2dæ partis primi tract.*

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto C in circumferentia R C T aſſumpto; ut & de aliis figuris datâ ſpecie ſuper M C, N C deſcriptis.

XII

XII PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N extra positione datam rectam lineam O D duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C agatur recta C D in dato angulo E ad positione datam O D, quæ ab inflexis M C, N C fiunt quadrata, simul sumpta, æqualia sint rectangulo sub data 2 A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in positione data OD ab ultimò ducta CD abscinditur.



Constructio.

Junctâ N M, eâque bifariam sectâ in A, agatur F A B parallela O D; sumptâque in ipsa rectâ A B, æquali semissi datæ lineæ, describatur super ea [a] segmentum circuli AGB, capiens angulum æqualem dato E. Deinde ductâ ex O rectâ O F, faciente cum O D angulum æqualem angulo E, inveniatur [b] inter FA, A B media proportionalis A H, & super ipsa describatur semicirculus ARH. In quo si [c] aptetur H R æqualis N A vel A M, jungatur R A. Tum sumptâ A S æquali AR, eâque positâ, ut angulus S A F sit æqualis dato E, describatur ex I centro circuli AGB per S circulus SCT; & ex punctis M, N ad ali-

a p 33. libr. 3. Elem, vel p 2 Probl. 1mi hujus.
b p 13. libr. 6. Elem.
c p 1. libr. 4. Elem.

aliquod in circumferentia punctum C ducantur M C, N C, tum ex C ad O D recta C D, in dato angulo E: eruntque, quæ ab M C, N C, fiunt □^{ta}, ſimul ſumpta, æqualia ▭^{lo}, contento ſub data 2 A B & abſciſſa O D.

Demonſtratio.

Per 7^{mum} Problema hujus ▭ C A G eſt æquale ▭^{lo} *d* A B, & ▭ A C G æquale □^{to} ex A S vel A R. Eſt autem [d] □^{tum} ex A R unà cum □^{to} ex R H, hoc eſt, A M æquale □^{to} ex A H, hoc eſt, [e] ▭^{lo} F A B. Hinc cum [f] bina ▭^{la} C A G, A C G ſint æqualia □^{to} ex A C, & bina ▭^{la} *d* A B, F A B [g] æqualia ▭^{lo} ſub F *d* & A B, hoc eſt, ſub O D & A B: erit □^{tum} ex A C unà cum □^{to} ex A M æquale ▭^{lo} ſub O D & A B. Sed [h] bina □^{ta} ex A C, A M, ſubdupla ſunt □^{torum} ex M C, N C. Quocirca bina quadrata ex M C, N C æqualia erunt ▭^{lo} ſub O D & 2 A B. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto C in circumferentia S C T aſſumpto; ut & de aliis figuris, datâ ſpecie ſuper M C, N C deſcriptis.

His adde duo ſequentia Problemata.

d p 31. libr. 3, & 47. libr. 1. Elem.
e p Conſtr. & 17. libr. 6. Elem.
f p 2. libr. 2. Elem.
g p 1. libr. 2. Elem.
h p 18. Prop. 2dæ partis, 2^{mi} tractat.

XIII *PROBLEMA.*

A datis duobus punctis M, N in poſitione data recta linea A D duas rectas lineas inflectere M C, N C; ita ut, ſi à puncto inflexionis C ad poſitione datam A D in dato angulo E agatur recta C D, eorum, quæ ab inflexis fiunt, differentia, ſit æqualis rectangulo ſub data 4 A B & alia O D, quæ ad datum punctum O in poſitione data A D ab ultimò ducta C D abſcinditur.

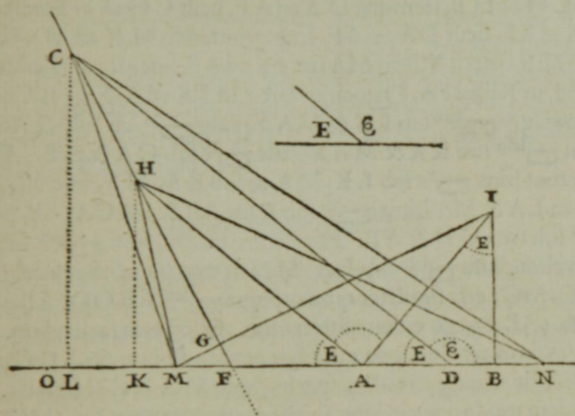
Conſtructio.

Sectâ M N bifariam in A, ſtatuatur A B æqualis $\frac{1}{4}^{tæ}$ parti datæ rectæ, ducaturque A H in dato angulo E. Tum ductâ A I perpendiculari ſuper A H, donec occurrat perpendiculari B I in I, jungatur M I. Deinde [a] ad M B, B A, & O A inventâ 4^{tâ} proportionali A F, (hoc eſt, ut M B ſit ad B A, ſicut O A ad A F) agatur ex F recta infinita F H C, ſecans M I ad angulos rectos in G. Dico ſi ab M & N ad aliquod in ea punctum C ducantur M C, N C, tum C D parallela A H, hoc eſt, in dato angulo E, differentiam □^{torum} ex M C, N C eſſe æqualem ▭^{lo} ſub 4 A B & O D.

a p 12. libr. 6. Elem.

Demonstratio puncti H, in quo FC secatur ab AH.

Demissâ ex H super A D perpendiculari H K, cum angulus KFH utrique △^{lo} KHF & MG F sit communis, ipsorumque anguli ad K & G sint recti : erit 3^{tius} quoque K H F 3^{tio} G M F [b] æqualis. Eodem modo △ MBI æquiangulum erit △^{lo} MGF, ideoque △ KHF æqui- [b] *p Cor. 32. libr. 1. Elem.*



angulum △^{lo} MBI. Unde erit [c] ut MB ad BI, ita H K ad KF. Rursus, cum [d] externus angulus K A I sit æqualis 2^{bus} internis & oppositis A B I & A I B; & anguli H A I, ABI, per constructionem, sint recti : erit angulus K A H æqualis angulo A I B, ac per consequens angulus KHA æqualis angulo BAI. Unde erit [e] ut BI ad AB, ita K A ad HK. Quocirca cum M B, B I, & A B sint 3 magnitudines, & K A, H K, & K F 3 aliæ, quarum, binis in eadem ratione sumptis, proportio sit perturbata : erit quoque ex æquo [f] ut MB ad B A, sic A K ad KF. Et per conversionem rationis [g] MB ad M A, sicut A K ad AF. [h] Æquale igitur est ▭^{lum} sub M B & A F ▭^{lo} sub MA & A K. Hinc cum per constructionem MB sit ad BA, sicut O A ad AF; & idcirco ▭^{lum} sub MB & A F etiam [i] æquale ▭^{lo} sub B A & AO : erit similiter ▭^{lum} sub MA & AK, æquale ▭^{lo} sub BA & A O. Est autem duplum ▭^{lum} sub

[c] *p 4. libr. 6. Elem.*
[d] *p 32. libr. 1. Elem.*
[e] *p 4. libr. 6. Elem.*
[f] *p 23. libr. 5. Elem.*
[g] *p Cor. 19. libr. 5. Elem.*
[h] *p 16. libr. 6. Elem.*
[i] *p 16. libr. 6. Elem.*

k p 18. Prop. 2dæ partis, 1mi tractat. sub MN & AK, hoc est, quadruplum ▭lum sub MA & AK [k] æquale differentiæ □torum ex NH, MH. Quocirca etiam quadruplum ▭lum sub BA & AO, hoc est, ▭lum sub data 4BA & abscissa AO eidem differentiæ □torum ex NH & MH æquale erit. Ut requirebatur.

Demonstratio puncti C, ubicunque in linea FGC assumpti.

l p 2. libr. 6. Elem. m p 11. libr. 5. Elem. n p 16. libr. 5. Elem. o p 17. libr. 5. Elem. p p 11. libr. 5. Elem. q p 16. libr. 6. Elem. r p 18. Prop. 2dæ partis, 1mi tractat.

Demissâ ex C super AD perpendiculari CL, cum [l] LK ad KF sit, sicut CH ad HF; itemque DA ad AF, sicut CH ad HF: erit etiam [m] LK ad KF, sicut DA ad AF. Et permutando [n] LK ad AD, sicut KF ad FA. Est autem MB ad MA, ut AK ad AF, hoc est, dividendo [o] BA ad AM, ut KF ad FA. Quocirca erit [p] ut LK ad AD, ita BA ad AM: ac proinde [q] ▭lum sub LK & MA æquale ▭lo sub AD & AB. Est autem ▭lum sub KA & MA æquale ▭lo sub OA & AB. Æqualia igitur sunt bina ▭la sub LK, MA & sub KA, MA, hoc est, ▭lum, sub tota LA & MA binis ▭lis sub AD, AB & sub OA, AB, hoc est, ▭lo sub tota QD & AB. Hinc cum quadruplum ▭lum sub LA, MA vel duplum ▭lum sub LA, MN sit æquale [r] differentiæ □torum ex NC, MC: erit similiter quadruplum ▭lum sub OD, AB, vel sub OD & 4AB æquale eidem differentiæ. Quod erat faciendum.

Idem similiter liquet de quolibet puncto C in recta FGC assumpto; ut & de aliis figuris, datâ specie, super MC, NC descriptis.

Eodem modo operandum, si differentia □torum ex NC, MC æqualis requiratur ▭lo sub data 4AB & recta MD, quæ ad alterutrum datorum punctorum, ut M, à recta CD abscinditur. nimirum si punctum O tantùm coïncidere fingatur puncto M, sine ulla constructionis aut demonstrationis immutatione.

XIV PROBLEMA.

A datis duobus punctis M, N extra positione datam rectam lineam OD duas rectas lineas inflectere MC, NC; ita ut, si à puncto inflexionis C agatur recta CD in dato angulo E ad positione datam OD, eorum, quæ ab inflexis fiunt MC, NC, differentia sit æqualis rectangulo sub data 4AB & alia OD, quæ ad datum punctum O in positione data OD ab ultimò ducta CD abscinditur.

Con-

Constructio.

Iuncta N M secetur, ut ante, bifariam in A; sumptâque A B æquali $\frac{1}{4}$^{tæ} parti datæ rectæ, inveniatur ad B A, A M 3^{tia} proportionalis O F, ducanturque O G, F H in dato angulo E, occurrentes perpendicularibus A G, M H in G & H. Per quæ si agatur recta linea infinita, & ex punctis N, M ad aliquod in ipsa punctum C, extra G, ducantur N C, M C; tum C D parallela O G vel F H, hoc est, in dato angulo E: erit differentia □^{torum} ex N C, M C æqualis ▭^{lo} sub data 4 A B & abscissa O D.

Demonstratio puncti H.

Iunctâ N H, quoniam □^{tum} ex N H [a] excedit □^{tum} ex M H quadrato ex N M, hoc est, 4^{plo} □^{to} ex N A vel A M: sequitur, cum per constructionem B A ad A M sit, ut A M ad O F, & idcirco [b] ▭^{lum} sub B A, O F sit æquale □^{to} ex A M, quòd 4^{plum} ▭^{lum} sub B A, O F, hoc est, ▭^{lum} sub 4 B A & O F, sit æquale 4^{plo} □^{to} rectæ A M, seu differentiæ □^{torum} ex N H, M H. Ut requirebatur.

a ℘ 47. lib. 1. Elem.
b ℘ 17. libr. 6. Elem.

Demonstratio puncti C.

Demissâ C L perpendiculari super N M, cum [c] □^{tum} ex N C majus sit □^{to} ex M C duplo ▭^{lo} sub N M & A L, hoc est, duplo ▭^{lo} sub A M & A L; & B A sit ad A M, sicut A M ad O F, vel A L ad O D, & idcirco [d] ▭^{lum} sub B A, O D æquetur ▭^{lo} sub A M, A L: sequitur quadruplum ▭^{lum} sub B A, O D, hoc est, ▭^{lum} sub 4 B A & O D esse æquale quadruplo ▭^{lo} sub A M & A L seu differentiæ □^{torum} ex N C, M C. Quod erat faciendum.

c ℘ Cor. 4. Prop. 6. 2^{dæ} partis, 1^{mi} tractat.
d ℘ 16. libr. 6. Elem.

Idem similiter liquet de quolibet puncto C in recta G C H extra G assumpto; ut & de aliis figuris datâ specie super N C, M C descriptis.

Hinc:

Conclusio 5ᵗᵃ Propositionis. Si sit positione data recta linea, & à duobus punctis in vel extra ipsam datis duæ rectæ lineæ inflectantur, & à puncto inflexionis ad positione datam in dato angulo recta agatur linea, quæ ad alterutrum datorum punctorum vel aliud quodpiam in ipsa datum abscindat rectam lineam, comprehendentem cum alia data rectangulum æquale iis, quæ datâ specie ab inflexis fiunt: punctum inflexionis continget circumferentiam circuli positione datam. At verò rectam lineam, si differentia earundem specierum sit dicto rectangulo æqualis.

Quod erat demonstrandum.

His adde duo sequentia Problemata.

XV PROBLEMA.

A terminis A & B datæ rectæ lineæ A B duas rectas lineas inflectere A G, B G; ut, quæ ab ipsis fiunt, habeant ad triangulum A G B, à data AB & inflexis A G, B G comprehensum, rationem datam R ad S.

Sit A B bifariam secta in E, & ex E super AB erecta perpendicularis EF. Deinde sicut R est ad S, ita sit quadruplum ipsius EF ad EB.

Constructio.

Descripto super EF semicirculo ECF, aptetur in eo EC æqualis EB, & ex F intervallo FC circulus describatur. Quo facto, si ex punctis A, B ad aliquod in circumferentia punctum G ducantur rectæ AG, BG: erunt, quæ ab ipsis fiunt □ᵗᵃ, ad △ˡᵘᵐ A G B, ut 4EF ad EB, seu R ad S. Quæ quidem ratio hîc non minor requiritur, quàm quæ est ipsius 4 ad 1.

Præ-

Præparatio ad demonstrationem.

Demiſsâ ex G ſuper AB perpendiculari G D, junctâque F G, agatur GH parallela AB. Deinde fiat FK æqualis F H, & FI æqualis FE.

Demonstratio.

Quoniam itaque [a] □^{tum} ex FH unà cum □^{to} ex H G æquale eſt □^{to} ex FG vel FC, hoc autem cum □^{to} ex CE vel EB [b] ſit æquale □^{to} ex E F: erunt □^{ta} ex FH, HG, & E B ſimul ſumpta æqualia □^{to} ex EF. Eſt autem [c] □^{tum} ex E F æquale □^{to} ex FH unà cum ▭ HEK. Quare etiam □^{ta} ex FH, HG, & E B æqualia erunt □^{to} ex F H unà cum ▭ H E K. Unde ablato communi □^{to} ex F H, erunt ſimiliter reliqua □^{ta} ex H G, E B vel A E, E D reliquo ▭^{lo} H E K æqualia. Eſt autem [d] ▭ HEK vel I H E æquale ▭^{lo} I E H, dempto eidem □$_{to}$ ex EH. Quocirca etiam □^{ta} ex AE, ED æqualia ſunt ▭^{lo} IEH, multato □^{to} ex EH. Hinc ſi utrinque addatur □^{tum} ex EH vel DG: erunt 3^{a} □^{ta} ex A E, E D, & D G, ſimul ſumpta, æqualia ▭^{lo} IEH. Ac proinde quoque eorum dupla, hoc eſt [e], □^{ta} ex A D, D B, unà cum □^{to} ex DG bis ſumpto, æqualia duplo ▭^{lo} IEH, hoc eſt, ▭^{lo}

[a] p 47. libr. 1. Elem.
[b] p 31. libr. 3, & 47. libr. 1. Elem.
[c] p 6. libr. 2. Elem.
[d] p 3. libr. 2. Elem.
[e] p 9. vel 10. libr. 2. Elem.

ſub EF & DG, quater ſumpto. Sunt autem □^{ta} ex AD, DB unà cum □^{to} ex DG bis ſumpto [f] æqualia □^{tis} ex AG, GB. Æqualia igitur ſunt bina □^{ta} ex AG, GB rectangulo ſub EF & DG 4ter ſumpto. Sed ut ▭^{lum} ſub EF & DG 4ter ſumptum eſt ad ▭^{lum} ſub EB & DG, hoc eſt, ad △^{lum} AGB, ita eſt [g] 4^{pla} ipſius EF ad EB. Quare etiam bina □^{ta} ex AG, GB ad △^{lum} AGB erunt, ut 4 EF ad EB. Quod erat faciendum.

f p 47. libr. 1. Elem.

g p 1. libr. 6. Elem.

Idem ſimiliter liquet de quolibet puncto G, in circuli circumferentia aſſumpto; idemque pariter conſtat de aliis figuris, datâ ſpecie ab inflexis deſcriptis.

XVI PROBLEMA.

A terminis A & B datæ rectæ lineæ AB duas rectas lineas inflectere AE, BE; ut eorum, quæ ab ipſis fiunt, differentia ad triangulum AEB, à data AB & inflexis AE, BE comprehenſum, datam habeat rationem *r* ad *ʃ*.

Conſtructio.

Fiat ut *r* ad *ʃ*, ita dupla AB ad perpendicularem BC. Deinde ſectâ AB bifariam in D, educatur ex D per C recta linea infinita DEC. Tum ex A & B ductis ad aliquod in ea punctum E rectis AE, BE: dico differentiam □^{torum} ex AE, EB ad △ AEB eſſe, ut dupla AB ad BC, ſeu ut *r* ad *ʃ*.

Demonſtratio puncti C.

Junctâ AC, cum [a] □^{tum} ex AC excedat □^{tum} ex CB quadrato ex AB, id eſt, ▭^{lo} ſub dupla AB & DB; hoc autem [b] ad ▭^{lum} ſub DB & BC, hoc eſt, ad △ ACB [c] ſit, ſicut dupla AB ad ad BC: patet differentiam □^{torum} ex AC, CB ad △ ACB eſſe, ſicut dupla AB ad BC, ſeu ut *r* ad *ʃ*. uti requirebatur.

a p 47. libr. 1. Elem.
b p 1. libr. 6. Elem.
c p 41. libr. 1. Elem.

De-

Demonstratio puncti E, ubicunque sumpti in linea DCE.

Cum A D sit æqualis D B, & idcirco A F æqualis B D, D F: erit □tum ex A F [d] æquale □to ex F B unà cum ▭ B D F quater sumpto, seu, quod idem est, □tum ex A F majus erit □to ex F B quadruplo ▭lo B D F, hoc est, ▭lo sub dupla A B & D F. Unde si utrinque addatur □tum ex F E, erunt bina □ta ex A F & F E, hoc est [e], □tum ex A E, majora binis □tis ex F B & F E, hoc est, [f] □to ex E B rectangulo sub dupla A B & D F. Sed ut D B est ad B C, ita est [g] D F ad F E; & per consequens ▭lum sub D B & F E, hoc est [h], △ A E B, æquale ▭lo sub B C & D F. Similiter [i] ▭lum sub dupla A B & D F est ad ▭lum sub B C & D F, sicut dupla A B ad B C. Quare etiam excessus quo □tum ex A E superat □um ex E B ad △ A E B erit, sicut dupla A B ad B C, seu ut *r* ad *s*. Quod erat faciendum.

d p 8. libr. 2. Elem.
e p 47. libr. 1. Elem.
f p 47. libr. 1. Elem.
g p 4. libr. 6. Elem.
h p 16 Sexti, & 41. libr. 1. Elem.
i p 1. libr. 6. Elem.

Idem similiter liquet de quolibet puncto in linea D E assumpto, atque etiam manifestum est de quibuslibet aliis figuris, datâ specie ab inflexis A E, B E descriptis.

E quibus igitur binis Problematîs constat sequens

PROPOSITIO.

Si à terminis datæ rectæ lineæ duæ rectæ lineæ inflectantur; ita ut figuræ datâ specie ab ipsis descriptæ ad triangulum sub data & inflexis comprehensum datam habeant rationem: punctum ad inflexionem continget circumferentiam circuli positione datam. At verò rectam lineam, si differentia earundem figurarum ad dictum triangulum datam habeat rationem.

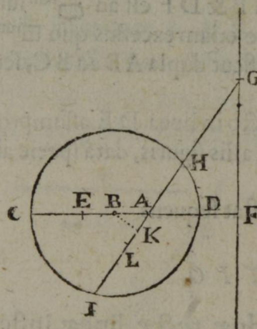
Quod erat demonstrandum.

In 6tam Propositionem.

XVII PROBLEMA.

Extra datum positione circulum CHD punctum invenire G, à quo si per punctum intra circulum datum A recta ducatur linea GHAI, circumferentiam secans in H & I; ut quadratum lineæ AG, inter hæc puncta interceptæ, sit æquale rectangulo IGH, contento sub tota secante IG & exteriùs assumpta GH.

Constructio.



Ductâ per A & centrum B rectâ lineâ, secante circumferentiam in C & D; sumatur EB æqualis BA, fiatque ut EA ad AD, ita AD ad DF. Tum per F ductâ FG ad angulos rectos ipsi CAD: dico, si ex puncto aliquo in ea G per A agatur recta GHAI, circumferentiam secans in H & I, □tum ex AG esse æquale ▭lo IGH.

Demonstratio puncti F.

Cum CB sit æqualis BD, & EB æqualis BA: erit etiam CE æqualis AD. unde & CA æqualis ED. Porrò cum [a] EA sit ad AD, ut AD ad DF, hoc est, componendo [b] ED vel CA ad AD, sicut AF ad FD: erit quoque [c] CF ad FA, sicut AF ad FD: ac proinde [d] □tum ex AF æquale ▭lo CFD. Ut requirebatur.

a p Constructionem.
b p 18. libr. 5. Elem.
c p 12. libr. 5. Elem.
d p 17. libr. 6. Elem.

Demonstratio puncti G.

Demissâ ex B super IG perpendiculari BK, secabit ipsa [e] rectam IH bifariam in K. Hinc si LK, ut supra, sumatur æqualis KA, erit similiter IL æqualis HA. Deinde cum [f] propter similitudinem △lorum ABK, AGF, BA sit ad AG, sicut KA ad AF; & idcirco EA ad AG,

e p 3. libr. 3. Elem.
f p 4. libr. 6. Elem.

AG, ſicut LA ad AF: erit [g] ▭ EAF æquale ▭lo LAG. Sed per conſtructionem EA eſt ad AD, ſicut AD ad DF, hoc eſt, per 12. 5ti Elem., EA ad AD, ſicut ED, hoc eſt, CA, ad AF; ac proinde [h] ▭ EAF æquale ▭lo CAD, hoc eſt [i], ▭lo IAH. Quocirca cum ▭ EAF ſit æquale oſtenſum ▭lo LAG, idemque ſimiliter ſit æquale ▭lo IAH: erunt etiam ▭la LAG & IAH inter ſe æqualia. Unde erit [k] ut AG ad AH, ita IA ad AL; & dividendo [l] GH ad HA, ſicut IL, hoc eſt, HA, ad AL. Cum igitur GH, HA, & AL ſint 3 rectæ proportionales, ſicut etiam FD, DA, & AE; illîc autem IL ſit æqualis HA, ſicut hîc CE æqualis DA: erit ſimiliter, ut ſupra, □tum ex AG æquale ▭lo IGH. Quod erat faciendum.

g ꝑ 16. libr. 6. Elem.
h ꝑ 16. libr. 6. Elem.
i ꝑ 35. libr. 3. Elem.
k ꝑ 16. libr. 6. Elem.
l ꝑ 17. libr. 5. Elem.

Idem ſimiliter intelligendum de quolibet puncto G in recta FG aſſumpto.

Aliud in 6tam Propoſitionem.

XVIII *PROBLEMA.*

Extra datum poſitione circulum DE invenire punctum C, à quo ſi per punctum intra circulum datum A recta ducatur linea CDAE, circumferentiam ſecans in D & E; ut quadratum lineæ AC inter hæc puncta interceptæ ſit æquale rectangulo ECD, contento ſub tota ſecante EC & exteriùs aſſumpta CD, unà cum rectangulo EAD, comprehenſo ſub duabus intra circulum portionibus EA, AD.

Conſtructio.



Ductâ ex centro B ad punctum A rectâ BA, erigatur in A ad ipſam perpendicularis AC. Dico, ſi in ea extra circulum ſumatur aliquod punctum C, ▭lum ECD unà cum ▭lo EAD eſſe æquale □to ex AC. Quod erat faciendum. Idem ſimiliter intellige de quolibet puncto C, in recta AC extra circulum aſſumpto.

Cujus demonſtratio ex 6ta 2di, & 3tia 3tii Elementorum Euclidis eſt manifeſta.

Hinc;

Conclusio 6tæ Propositionis. Si in circulo positione dato sit datum punctum, perque ipsum agatur quædam recta linea, & in ipsa punctum extra sumatur; sit autem quod fit à linea ducta usque ad punctum intra datum æquale ei, quod à tota & extra sumpta, vel soli, vel unà cum eo, quod duabus, quæ intra circulum portionibus, continetur: punctum extra assumptum positione datam rectam lineam continget.

Et si hoc quidem punctum contingat positione datam rectam lineam, circulus autem non ponatur: quæ sunt ad utrasque partes dati puncti contingent positione eandem circumferentiam.

Quod erat demonstrandum.

FINIS.

FRAN-

293

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,
LIBER IV.
SIVE DE
ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIONE, TRACTATUS.

GEOMETRIS, OPTICIS;
Præsertim verò
GNOMONICIS & MECHANICIS
UTILIS.



LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIↃ IↃC LVII.

Nobilissimis atque Amplissimis

DOMINIS,

ILLUSTRIS ACADEMIÆ

LUGDUNO-BATAVÆ, CURATORIBUS,

D. AMELIO BOUCHORST, Domino de Wimmenum, Rhenolandiæ Balivo & Chomarcho, atque in Consessu Præpotentum Illustrissimorumque Belgii Confœderati Ordinum ex Equestri Hollandiæ Ordine Delegato.

D. GERARDO SCHAEP, ad Sereniss. & Potentiss. Daniæ Regem nomine Præpot. & Illustriss. Belgii Confœd. Ordinum nuper Legato, nunc verò Urbis Amstelodamensis Consuli.

D. CORNELIO à BEVEREN, Equiti, Strevelshouckii & West-Iselmundæ Toparchæ, Comitatus Hollandiæ Consiliario ac in Zuidt-Hollandia Quæstori Generali, antehac ad Sereniss. & Potentiss. Magnæ Britanniæ & Daniæ Reges Legationibus perfuncto, jam autem in Consessu Præpot. & Illustriss. Belgii Confœd. Ordinum Hollandiæ Delegato.

UT ET,

D. CLEMENTI à BAERSDORP JCto
D. ADRIANO van STAVEREN
D. NICOLAO vander MEER
D. FOYTO van ZYP
} *Florentissimæ Reip. Lugd. Bat. Consulibus.*

NEC NON,

Amplissimo, Prudentissimoque Viro,

D. JOANNI à WEVELICHOVEN JCto, Reip. Lugd. Bat. Syndico, iisdemque D. D. Curatoribus à Secretis.

Nobi-

Nobilißimi atque Amplißimi Viri,

QUemadmodum inter complures Mathematicæ scientiæ partes, Geometria reliquas ferè omnes ut basis sustinet, ita etiam in ea addiscenda Græci olim summam operam posuerunt. Cum autem eandem simul cũ aliis scientiis ac artibus, felici successu, suo idiomate exercerent, factum inde quoque fuit ut illius utilitatem è vestigio deprehenderent, tam in cæteris faciliùs addiscendis, excolendisq;, quàm in ritè dirigendis artibus omnibus Mechanicis, nec non variis instrumentis excogitandis, quę ad quotidianum usum spectarent. Ei igitur parti quæ tractat de Conicis Sectionibus, cujus usum cum longè lateque se extendere agnoscerent, maximum studium adhibuerunt. Inter quos, qui ex professo hanc tractare susceperunt, nullus Euclide antiquior reperitur, qui quatuor libros eâ de re conscripsit. Apollonius autem post universaliùs hæc inspiciens, easdem Sectiones in unoquoque Cono ostendit, qui plurimis ingeniosis & pulcherrimis Theorematis Conicorum doctrinam locupletavit, & Euclidis libros quatuor ad octo perduxit. Quâ quidem re scientia hæc incredibile incrementum cepit, illeque inde magnam gloriam consequutus est, ita ut eo & sequentibus seculis Geometræ magni nomen meruerit. Sed cum, injuriâ temporis, nulla eorum monumenta vel aliorum, qui ipsis posteriores sunt ad nos pervenerint, aut saltem (quod sciam) publicè extent, in quibus modus ipsas Sectiones uno ductu in plano describendi ostendatur; quarum tamen descripto in praxi quotidiana quàm maximè requiritur: Id ipsum materiam mihi subministravit, ut idonea instrumenta excogitarem: quibusque modis Conicæ lineæ Organicè, & quovis casu, in plano describi possent, peculiari tractatu demonstrare conarer. Quem, primitias studiorum meorum, Vobis Nobilissimi, Amplissimique Viri, offerre non erubui: Vobis inquam, qui sem-

per

per eximii ſcientiarum omnium artiumque liberalium Mecœnates extitiſtis, ac etiamnum ad eas promovendas, atque Academiæ veſtræ ornamentum, curam omnem & favoris operam confertis. Quam porrò eò protuliſtis, ut illa ſingularis in hoc appareat ac nunquam non laudanda ſit, quòd etiam Mathematicas artes, exemplo clarorum olim Græcorum, vernaculâ linguâ in Academia Veſtra doceri volueritis, Batavoſque & aliarum linguarum ignaros iis imbui. Magno ſanè Reipublicæ commodo, communique omnium applauſu: ut ſcilicet ipſæ uſui publico inſerviant, nec non Vos earum fructus in gubernanda Republica, tam belli quàm pacis tempore, ubique ſentiatis. Denique quandoquidem, defuncto parente meo, benevolentiâ veſtrâ in ejus locum ſurrogatus fui, ut diſciplinas haſce publicè profiterer, officii mei eſſe duxi, grati animi aliquâ teſtificatione eidem reſpondere, & quæ in uſum publicum meditatus ſum, Illuſtribus Veſtris Nominibus dedicare. Hunc igitur laborem qualemcunque, Viri Nobiliſſimi atque Ampliſſimi, in clientelam Veſtram accipite benignè; quippe qui Vobis omni animi obſervantiâ à me offertur; eundemque accepti beneficii gratitudinis ergo auſpiciis Veſtris in lucem prodire ſinite. Quod ſupereſt, DEUM OPT. MAX. rogo ut vos incolumes ac felices quàm diutiſſimè conſervet. Dabam Leydæ, Kal. Novemb. Anni MDCXLVI.

Nobilitatibus atque Amplitudinibus Veſtris

devotiſſimus.

FR. à SCHOOTEN.

PRÆ-

PRÆFATIO AD LECTOREM.

QVANTVM incrementum Geometria, amice Lector, ex Conicorum doctrina, postquam Veteres ei sedulò incubuerunt, acceperit, quantaqúe ipsi dignitas accesserit; partim eorum monumenta; partim verò singularis eorum usus testantur. Inter quos, qui id sunt aggressi, nullus Euclide prior reperitur: qui Conum ex circumvolutione Trianguli rectanguli definivit, manente uno eorum, quæ circa rectum angulum sunt, latere: statuens præterea tres Conorum differentes species, secundùm triplicem angulorum ad verticem differentiam: deinde verò unumquemque horum trium secari plano ad unum Coni latus recto, unde tres illas ut Coni rectanguli, obtusanguli, & acutanguli sectiones deduxit. Verùm postea Apollonius universaliùs Conum definiens ex conversione rectæ lineæ indefinitæ, circa Circuli circumferentiam, transeuntis continuò per aliquod punctum in sublimi, quousque ad eum locum redeat, à quo moveri cœpit: universè inspexit in omni Cono, tam recto quàm scaleno, unamquamque trium prædictarum sectionum inveniri, pro diversa nempe plani secantis in Cono contemplatione. Qui porrò ante nominatas sectiones, rectanguli quidem Coni sectionem Parabolen, obtusanguli Hyperbolen, acutanguli verò Ellipsin appellavit, unicuique ex hisce tribus ab aliquo proprio accidente ejusmodi nomen imponens. Vt quilibet ex libris ejus, qui Conica Elementa inscribuntur, addiscere potest. Quorum propositiones, quantùm iis ad demonstrationem indiguimus, eorum, quæ hoc tractatu afferuntur, citavimus. Cæterùm, quantopere ille hac in parte Geometriam ditarit, quantaqúe ejus inventis præstantissimæ huic scientiæ dignitas accesserit, vix dici potest. Hic namque Euclidis libros quatuor, ea de re conscriptos, ad octo perduxit. Et quàmvis

vis dolendum sit, quatuor duntaxat primos ad nos hactenus pervenisse, atque reliqui quidem temporis injuriâ periisse videantur; futurum tamen confidimus ut eosdem, ex genuina Arabum versione Latinè redditos, Vir Clarissimus D. Iacobus Golius haud diutiùs desiderari sinat: quàm primùm alio opere, cujus editione impræsentiarum distinetur, fuerit defunctus.

Verùm ut ad usum harum Sectionum accedamus, ostendamusq; ad quæ earum descriptio in plano deserviat: sciendum primò est, eam in Geometria ad solutionem Solidorum Problematum adeò requiri, ut quemadmodum illa solvi nequeunt, nisi in constructionem adhibeatur aliqua trium Coni Sectionum supra dictarum; ita etiam earum descriptionem nequaquam ibidem negligere decet.

Quod verò ad Opticam, jucundissimam Matheseos partem attinet, quæq; præter Visum, Lucem, Vmbram, & Colores, objectorum quoque diversas apparentias contemplatur, ac earundem rationes reddit: considerando videlicet ea infinitis radiis ab objecto prodeuntibus conspici, qui in oculo simul conveniant: Quàm opportunum sit illîc Conum, Conicasque Sectiones animadvertere, cuivis, qui Circulum pro objecto acceperit, judicandum relinquo.

Quòd si Opticam penitiùs perspiciamus, eamque porrò ut fit subdividamus in Catoptricam, Dioptricam, & Perspectivam, multò magis Conicorum frequens usus elucebit.

Nam quod ad Catoptricam spectat, quoniam illam novimus occupatam esse in imaginibus, quæ in speculis per reflexionem radiorum in nostros oculos fiunt, explicandis; Cumque in ea præterea specula efficere conemur, quæ miros præbeant effectus; Sicuti quorum beneficio lucente Sole aliquid accendatur, vel quibus lumen alicujus candelæ mirabiliter diffundatur: an non necessariam planè ad hoc Paraboles ac Hyperboles descriptionem unusquisque agnoscet? Siquidem ejusmodi specula dictas figuras omnino requirunt? Quemadmodum quoq; Hyperbola

bola exigitur ad radios è diversis locis prodeuntibus in unum punctum congregandos; Ellipsis verò ut qui ex uno puncto veniunt rursus in aliud reflectantur punctum. Quæ quidem non solùm vario fini inservire queunt, verùm etiam summa cum voluptate adhiberi ad prodigiosas rerũ imagines repræsentandas.

Tacebo-ne Dioptricam? quæ non solùm hoc habet, ut sine eâ Visus ratio, ut & Lucis & Colorum minimè explicari valeat; sed etiam hoc sibi vendicat, ut vitra comburentia efficere nos doceat; nec non alia, quibus radii diversimode detorquentur, & tam tubis Opticis, quàm vario modo visum juvantibus, inserviant: Non-quid & ad illa Conicarum Sectionum descriptio utilis dicetur? cum ejusmodi vitra in formam Ellipsis ac Hyperbolæ expolienda esse, Dioptrica nobis demonstret. De qua re Dioptrica Nobilissimi Clarissimiqúe Viri D. Renati des Cartes consuli potest; in qua mirâ brevitate subtilissimè, quæcunque de reflexionibus, refractionibus, cæterisqúe rebus ad perfectionem visus pertinentibus, intelligi possunt, persequitur; & quæ de refractionis legibus ante fuerunt desiderata, planè perfecit. In qua parte si præterea expectes, quæ Clarissimus ac Subtilissimus Vir, D. de Beaune, Consiliarius Blæsensis, post excogitavit, non video quid in hoc genere ampliùs requiras.

Opticæ colophonem addit Perspectiva, quæ non modò ad contemplationem objecti pertinet, veluti Optica, sed ad ipsam figuram apparentem in plano describendam. Quocirca dubitari nequit, quanto cum compendio Organica Conicarum Sectionum descriptio in Circulorum projectionibus institui possit: quandoquidem projectionem illam non nisi aliquam ex Conicis Sectionibus existere, manifestum est. Cæterùm quàm crebra ibidem sit præ aliis Ellipseos decircinatio, nemini ambigendum puto, qui Planisphæria sibi parare unquam tentaverit. Ita ut hoc seculo, ob peculiare Conicorum studium, Optica quoque ad fastigium perducta videatur, summaqúe ejus perfectio speranda sit, si reliquos Conicorum libros

Nobilissimi ac Clarissimi Viri D. Claudii Mydorgii, in Francia Picardiæ Quæstoris, nec non Conica Acutissimi Viri, D. des Argues, ab iis impetremus.

Non est quòd multa dicam de Gnomonica, cujus totum fermè negotium in describendis Conicis Sectionibus consistit, cum Sol ibidem conversione suâ quotidie nobis Conum referre statuatur, quem Conum Luminis appellamus; cujus quidem basis Circulus est quem describit; vertex autem apex gnomonis; ipsum verò Solarium planum Sectionis Coni, priori oppositi, qui Conus Vmbræ vocatur. Ita ut lineæ, quas in eo extremitas umbræ gnomonis seu styli singulis diebus describit, repræsentent semper aliam atque aliam Coni Sectionem; prout nimirum Sol alium aliumqúe gradum Eclipticæ quotidie perambulat; ut etiam pro diversa Sphæræ constitutione, nec non vario plani Horologii situ. Vnde fit ut arcus diurni, signa Zodiaci, Paralleli Civitatum Latitudinumvé Circuli, sicut etiam Paralleli Horizontis seu Circuli Almucantarath, omnes in Sectiones Conicas sint consignandi, totumqúe ferè opus ab iis describendis pendeat.

Superest Mechanica, quæ artium Mathematicarum quasi exegesis est, cum instrumenta fabricare doceat, quorum præsidio id ipsum, quod cæteræ hujus Scientiæ partes construendum nobis suppeditant, exequi valeamus. Ad quam igitur Organicam Conicarum Sectionum descriptionem non immeritò referas. Quocirca hac in parte laborandum mihi quoque proposui, unde reliquæ commoditatis alicujus possint participes reddi, atque ad finem optatum perduci. Præsertim etiam cum observassem harum linearum descriptionem Organicam in praxi quotidiana usum habere uberrimum, ut architectis, lignariis, cæmētariis in extruendis typis ligneis, lapideis fornicibus templorum, ædificiorum, pontium, porticuum & cellarum sustinendis requisitos. Quemadmodum etiam diatretis in tornandis pluteis, nec non topiariis in diversimodè concinnandis pulvillis in horto, &c.

Cum

Cum ergo ad tam multa negotia Conicarum Sectionum in plano descriptio utilis sit, quid mirum, si vel ab ultima antiquitate præstantissimi Mathematici Conicorũ doctrinam adeò sedulò sibi excolendam duxerint, semperq; ei, præcipuè verò hoc erudito seculo, accessio nova facta sit? Verùm quod mirandum mihi videtur, est, quòd nemo hactenus (quod sciam) Spartam hanc sibi ornandã susceperit, ut nempe aliquis inventus fuerit, qui de Organica Conicarum Sectionum in plano descriptione tractatum conscribere sit aggressus, eamque quovis casu demonstrare. Quod quidem perutile futurum, vel ex eo deprehendi potuit, quòd casu fuerint inventi quidam modi, quorũ in quotidiana praxi non parvus est usus: quos nostris interserere quoq; libuit, ne aliunde quispiam quod huc spectat haberet quod peteret, & quod non possimus hâc nostrâ opellâ ipsi suppeditare. Fateor me legisse, Franciscum Aguillonium in animo habuisse (ut ipsemet scribit) peculiarem tractatũ hac de re instituere; verùm morte præventus, opus imperfectum reliquit. Novi insuper ingeniosissimum Virum D. Otterum multa super hac re excogitasse; sed neq; ille quantùm mihi innotuit, publici juris quidquam fecit. Quod autem attinet ad methodum, quâ hæ lineæ in plano per puncta describuntur, de qua Clarissimus D. Mydorgius totũ librum conscripsit, illa quidem, quum ipsæ majori formâ sunt exhibendæ ut in parietibus, caminis, pavimentis, hortis, & quales vulgò in Gnomonica & Mechanica requiruntur, non æquè facili viâ atq; Organicâ succedit. Prout hoc à primo limine dignoscere licet in Sciothericis hoc pacto constructis, si notemus quàm perperàm plerumq; ipsæ designatæ fuerint: siquidem methodus illa sæpiùs ibidem iteratam punctorum inventionem atq; manus exercitatæ solertiam requirit, nec non ut præterea, ad exactã operis exegesin, natura earundem linearum in aperto sit. Quod utiq; in Organica methodo locum non habet: quippe quæ lineas illas, multifariam iteratâ operâ vixdum acquisitas, suâ quasi sponte uno ductu continuo ob oculos ponit.

Placuit porrò præ cæteris is modus Organicus, qui è motu implicato originem ducit, eo insuper habito, quo hæ lineæ circino in eum finem extructo describantur. Quoniam ibi easdem lineas primùm descriptas habere oportet, ut circino adfixæ similium solummodò descriptioni inservire possint.

Præterea cum ratio ducendi lineas rectas, quæ curvas hasce in quibusvis punctis contingant, in indaganda objectorum varia apparentia ad Catoptricam & Dioptricam summopere sit necessaria; placuit quoq; post ipsarum descriptionem in Scholiis de iis breviter tractare; ut & de spatiis quæ includunt: quandoquidem cognitio illa ad centra gravitatum eorundem spaciorum invenienda plurimùm conducit, atq; una ab altera pendet.

Denique ne quid deesset, quod ad hanc materiam spectare videretur, subjeci etiam relationem, quam inter se habent spatia quæcunque, rectis lineis & curvis Conicis comprehensa. In quorum demonstrationibus Lectorem monitum velim, me brevitatis causâ methodo indivisibilium, quam subtilissimus Vir Bonaventura Cavallerius inivit, fuisse innixum: licèt id aliâ quoque ratione exhibere potuerim.

Aliarum autem linearum curvarum superioris generis descriptiones quod attinet, eas in medium afferre non fuit nostri instituti: cum maluerimus meritò eximiis Viris D. des Cartes, D. de Fermat, Senatori Tholosano, & D. Robervallo, Mathematum in Academia Parisiensi Regio Professori, relinquere. Qui præterea earum tangentes, quadrationes, & centra invenêre, quibus Geometriam mirificè ditare valeant, & (meo judicio) vix lucē visura sunt, nisi Philomathematicorū precibus & persuasionibus ab iis in Reipub. Literariæ bonum extorqueantur.

Has igitur primitias laboris nostri, amice Lector, si gratas tibi fuisse acceperimus, animū nobis addes ad Apollonii de locis planis Geometriam, aliosq; tractatus brevi, Deo volente, edendos; & ad ea, quæ circa optimam muniendi rationem meditari cœpimus, absolvenda. His interim fruere, eaqúe in usum tuum converte. Vale.

FRAN-



FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Mathescos Professoris,
DE
ORGANICA
CONICARUM SECTIONUM IN PLANO DESCRIPTIONE TRACTATUS.

CAPUT I.
De rectis lineis, quæ in plano ex motu implicato describuntur.



IN plano quocunque concipiatur regula AB, mobilis circa punctum fixum A, atque alia regula CBD huic quidem annexa in puncto B, quæ circa illud in eodem plano converti possit: statuantur autem intervalla AB, CB & BD inter se æqualia.

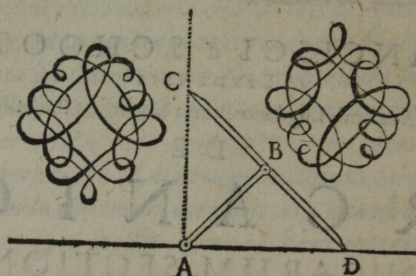
Dico, si feratur punctum D in recta linea transeunte per A, ut AD, punctum alterum C motu isto in eodem plano describere lineam rectam, priori AD perpendicularem.

Intelligatur enim à puncto C ad punctum A recta linea esse ducta AC. Quia igitur trianguli ABD latera AB, BD sunt æqualia, [a] erunt etiam anguli BAD, BDA inter se æquales. Eodem modo, quoniam in triangulo ABC latera AB, BC æqualia sunt, [b] erunt quoque anguli

[a] p 5 Primi Elem.
[b] p 5 Primi Elem.

guli A C B, BAC inter ſe æquales. Æqualis igitur eſt angulus CAD duobus angulis BCA, ADB. c Sunt autem tres anguli CAD, BCA, & A D B duobus rectis æquales. Rectus itaque erit angulus CAD. Cum verò conſtet, mutato ſitu puncti D in recta A D, mutari ſimul

c p 32 Primi Elem.

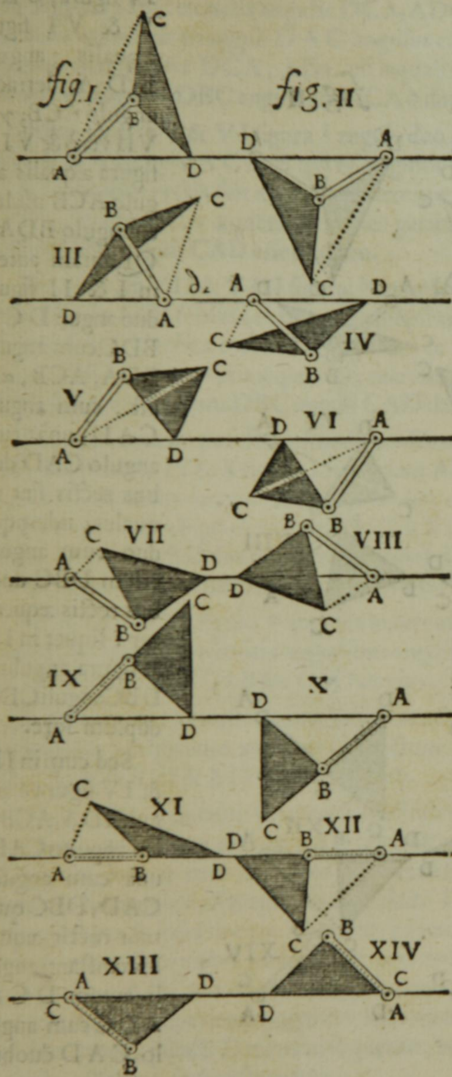


ſitum puncti C; atque in omni alia conſtitutione inſtrumenti idem prorſus ſemper demonſtretur, quod attinet punctum C: ſequitur rectas omnes ductas à punctis infinitis C ad punctum A, rectos cum A D angulos efficere. Sed cum recti omnes anguli inter ſe ſint æquales, non poterunt ejuſmodi rectæ, à punctis C ad punctum A ductæ, niſi eundem angulum conſtituere, hoc eſt, rectæ omnes ex C ad A eductæ unam eandemque efficient rectam lineam. Unde liquet puncto D moto per rectam A D, alterum punctum C ſuo etiam motu in plano deſcribere rectam lineam C A ipſi A D in puncto A perpendicularem. Quod erat demonſtrandum.

Statuatur autem regulam A B, quæ mobilis eſt circa punctum A, non ampliùs ſibi puncto B annexam habere regulam C B D ſed triangulum C B D, utrovis crure C B, B D ipſi A B æquale, quod circa illum ſuum verticem B, invariato manente angulo, moveri queat.

Dico rurſus, ſi feratur punctum D in recta linea A D, alterum punctum C motu iſto in plano deſcribere rectam lineam, efficientem ad A D angulos obliquos; quorum quidem acutus æqualis erit ſubduplo angulo D B C, qui in triangulo ſub æqualibus lateribus D B, B C continetur.

Cum



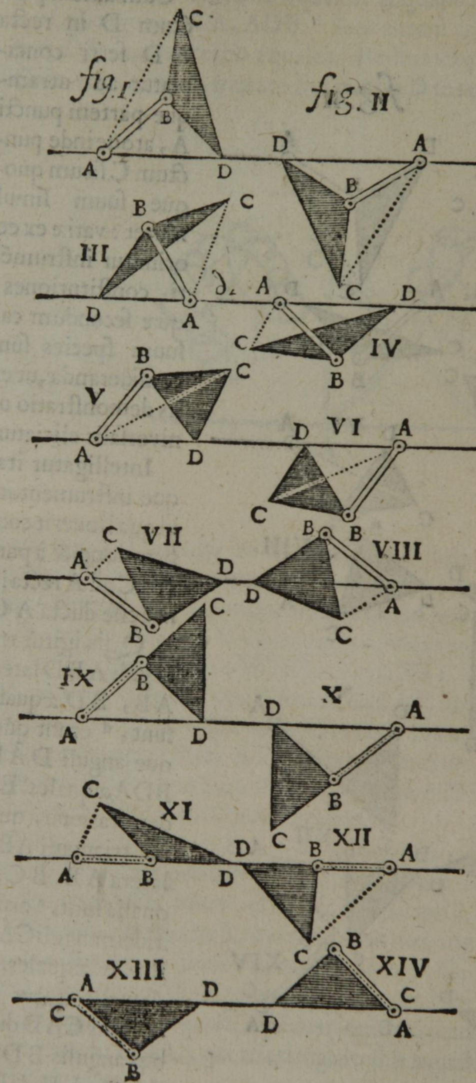
Cum autem punctum D in recta A D ferri concipiatur ad utramque partem puncti A, atque inde punctum C situm quoque suum simul mutet: variæ ex eo oriuntur instrumẽti constitutiones, quæ secundùm casuum species sunt considerandæ, ut ex iis demonstratio universalis eliciatur.

Intelligatur itaque instrumentum in qua libuerit constitutione, & à puncto C ad A recta linea esse ducta A C.

Quia igitur trianguli A B D latera A B, B D æqualia sunt, [d] erunt quoque anguli D A B, B D A æquales. Eâdem ratione, quoniã trianguli A B C latera A B, B C æqualia sunt, [e] erunt itidem anguli C A B, B C A æquales. α Æqualis igitur est angulus C A D duobus angulis B D A, A C B in I, II, III & IV

d p 5 Primi Elem.

e p 5 Primi Elem.



[f] p 32 Primi Elem.

[g] p 32 Primi Elem.

IV figura; β at in V & VI figura æqualis angulo BDA detracto angulo ACB; γ in VII verò & VIII figura æqualis angulo ACB multato angulo BDA. [f] Quoniam autem in I & II figura duo anguli DCB, BDC cum angulis BDA, ACB, α id est, cum angulo CAD, unà cum angulo CAD duobus rectis sint æquales; iidemque duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquentur: liquet in I & II figura, angulum DBC anguli CDA duplum fore.

Sed cum in III & IV figura [g] anguli BDA, ACB, α seu angulus CAD, unà cum angulis CAD, DBC quatuor rectis æquales existant; anguli autem DCA, ADC cum angulo CAD duobus rectis æquentur: erit

erit angulus DBC æqualis angulis DCA, ADC, bis simul sumptis. [h] At verò quoniam trianguli D A C angulus externus C A ƌ, duobus internis & oppositis DCA, ADC est æqualis: erit quoque in III & IV figura angulus DBC anguli acuti CA ƌ duplus.

h p 32 Primi Elem.

Porrò cum in V & VI figura [i] anguli duo D C B, BDC cum angulo B D A dempto A C B, β qui est angulus CAD, unà cum angulo C A D, duobus rectis sint æquales; iidemque duo cum angulo etiam D B C duobus rectis æquentur: liquet pariter in V & VI figura angulum DBC anguli CAD esse duplum.

i p 32 Primi Elem.

Denique, in VII & VIII figura, [k] quia duo anguli D C B, B D C cum angulo ACB sublato ei BDA, γ qui est angulus CAD, unà cum angulo C A D duobus rectis sunt æquales; ac iidem duo cum angulo etiam DBC duobus rectis æquentur; manifestum similiter est in VII & VIII figura angulum DBC anguli CAD duplum fore.

k p 32 Primi Elem.

Præterea concipi potest ejusmodi constitutio instrumenti, in qua AB, BC (sicut in IX & X figura;) sive etiam AB, BD (ut in XI & XII figura,) in directum jacent. Rursus enim fiet ut angulus DBC anguli CAD sit duplus. [l] Æqualis enim est in IX & X figura externus angulus DBC trianguli ABD duobus internis oppositis & æqualibus angulis DAB, BDA, ac proinde anguli D A B seu CAD duplus.

l p 32 Primi Elem.

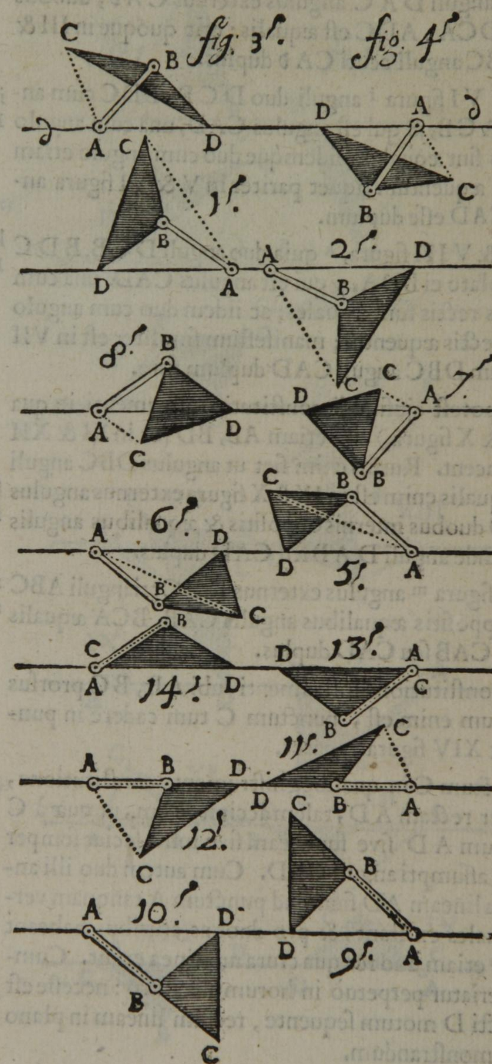
In XI verò & XII figura [m] angulus externus D B C trianguli ABC duobus internis & oppositis æqualibus angulis CAB, BCA æqualis est, ac idcirco ipsius CAB seu CAD duplus.

m p 32 Primi Elem.

Nihil dico de ea constitutione instrumenti, ubi AB, BC prorsus coincidunt: perspicuum enim est, punctum C tum cadere in punctum A, ut in XIII & XIV figura apparet.

Quapropter punctum C in qualibet instrumenti constitutione, ex motu puncti D per rectam A D, talem accipit situm, ut quæ à C ad A recta ducitur cum A D sive supra eam sive infra faciat semper angulum subduplum assumpti anguli CBD. Cum autem duo illi anguli, qui supra & infra lineam AD fiunt, ad punctum A tanquam verticem, inter se æquales existant, & pro duobus cruribus habeant unam lineam A D: [n] etiam duo reliqua crura una linea erunt. Cumque punctum C reperiatur perpetuò in horum alterutro: necesse est ejusdem motu, puncti D motum sequente, rectam lineam in plano describi. Ut erat demonstrandum.

n p conversam 15 Primi Elem.



Sciendum tandem est, nihil referre ad quam partem rectę BC concipiatur triangulum BDC, ut ea fiant quæ proposita sunt. Si autem in alteram partem rectæ BC idem triangulum intelligatur, quod quidem fiet sumẽdo illud puncto C moveri per rectam AD: recta AC aliam tunc quoque ad punctum A positionem obtinebit. Sed ne opùs sit novâ id ostendere demonstratione, satis esse duximus secũdùm eandem hypothesin consimiles omnes ejusdẽ instrumenti constitutiones exhibere, easque simili charactere insignire, quibus superiùs demonstrata communiter applicari possent. Cum alia nulla differentia hic videatur advertẽda, nisi quòd pun-

punctum supra vocatum C, hîc appelletur D; & quod ibi dicebatur D, hic à nobis nominetur C. Ita ut supervacaneum sit plura super hac re in medium afferre.

CAPUT II.

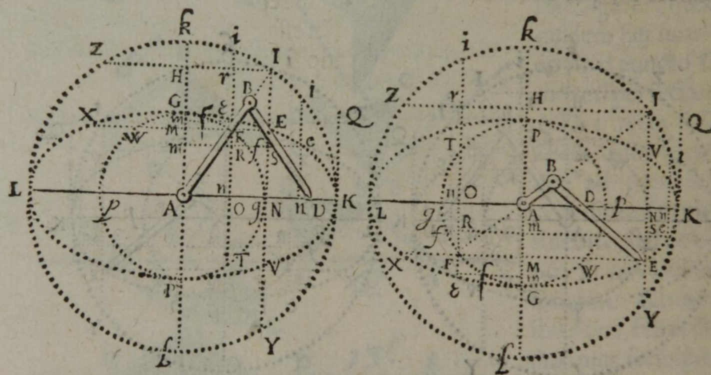
De ellipsibus, quæ ex motu implicato in plano circa axes seu extremas diametros describuntur.

REvertor jam ad primum instrumentum supra descriptum, hoc est, concipio rursus in plano quocunque regulam AB, mobilem circa punctum fixum A, atque huic annexam esse aliam regulam BED in puncto B, quæ circa illud in eodem plano similiter circumagi possit. Assumatur præterea in BD quodvis punctum E intra puncta B & D, sive etiam in ea producta ultra D. Sit autem BD ipsi AB æqualis.

Dico si feratur punctum D per rectam lineam AD, punctum quidem E motu isto in eodem plano describere ellipsis circumferentiam; cujus centrum est A; & axis transversus æqualis duplæ compositæ ex AB, BE; at verò axis rectus æqualis duplæ DE. Hoc autem est ostendendum.

Quoniam enim AB mobilis est circa A, manifestum est, si sumatur quodlibet punctum in AB vel in ipsa producta, quod simul cum ea moveri intelligatur circa A, illud ipsum describere circuli circumferentiam. Assumatur itaque punctum F, itaut BF sit æqualis BE, illudque describat circuli circumferentiam FGP. Sit porrò recta

GAP perpendicularis ad AD, ſecans circumferentiam dicti circuli in G & P: erit ea axis rectus ellipſis. æqualis enim aſſumpta eſt BF ipſi BE, atque eſt etiam A B ipſi BD æqualis: quapropter & reliqua AF reliquæ DE æqualis erit, atque ita G A P æqualis duplæ D E. Producatur denuò AB ad I, donec BI ſit æqualis BE, centroque A intervallo AI circuli circumferentia deſcribatur LIK, ſecans hinc inde AD in L & K: eritque L K axis tranſverſus ellipſis. cum A I æquetur compoſitæ ex AB, BE, atque ita L A K æqualis ſit duplæ compoſitæ ex AB, B E. His igitur ita ſe habentibus, demonſtrandum eſt, punctum E eſſe in ellipſis circumferentia, cujus axes ſunt, quos diximus.



a p 2 Sexti Elem. Agatur namque producaturve E F, ut ſecet A G in M: [a] erit igitur hæc parallela ipſi A D, ac perpendicularis ad A G. Agatur quoque ſeu producatur IE, donec ſecet AD in N: cadetque hæc ſimiliter perpendiculariter in AD. Ducatur denique FO ipſi INE æquidiſtans, ſecans AD in O; ipſiſque axibus LK, GP inveniatur tertia proportionalis K Q.

b p 4 Sexti Elem.
c p 16 Quinti Elem.
d p 15 Quinti Elem.
e p 22 Quinti Elem.
f p Corol. 20. ſexti Elem.

[b] Cum igitur ſimilia ſint triangula A F O, A I N: erit F O ad F A, ut N I ad I A; [c] permutandoque F O ad N I, ut FA ad IA, [d] vel dupla F A ſeu G P ad duplam I A ſeu L K; [e] atque etiam quadratum F O ad quadratum N I, ut G P quadratum ad LK quadratum. Cumque, ob proportionales KQ, GP & LK, [f] quadratum G P ad quadratum LK

ſit,

sit, ut KQ ad LK: erit quoque ut quadratum FO, hoc est, quadratum NE, ad quadratum NI, ita KQ ad LK. [g] Est verò quadratum NI æquale rectangulo LNK. Quapropter erit, ut quadratum NE ad rectangulum LNK, ita KQ rectum figuræ latus ad LK latus transversum. [h] Liquet ergo punctum E esse in ellipsis circumferentia, cujus extremæ diametri seu axes sunt LK, PG; latus autem rectum principale KQ, pertinens ad axem LK.

g p 35 Tertii Elem.

h p conversā 21 Primi Conic. Apollonii.

Quia autem hoc in infinitum ita se habet circa omnes alias rectas NE, ordinatim ad axem LK adplicatas, in quavis alia instrumenti constitutione: sequitur punctum E motu isto in plano describere ellipsis circumferentiam, circa extremas diametros, axesvè KL, GP. Quod erat demonstrandum.

Atque uti hæc quidem contingunt circa punctum E, prout sumitur in BD intra puncta B & D; sive etiam in ea continuata ultra D: idem continget quoque, si sumatur in BD producta ultra B, si modò BE ipsi AB non sumatur æqualis. Nam si in memoriam revocemus id quod capite primo demonstravimus de puncto C, quoad primum instrumentum sive regulas mobiles AB, DBC; nempe quòd, dum fertur punctum D per rectam AD, punctum C motu isto describat rectam lineam, ipsi AD perpendicularem: facilè intelligemus, si fingatur similiter ejusmodi punctum in BD intra puncta B & C, sive etiam in ea producta ultra C: idem tum esse ac si conciperemus punctum C ferri in recta AC ac ea fieri, quæ jam de puncto E demonstravimus. Eadem quippe tunc ibi erit relatio, eademque percipietur semper constitutio regularum AB, BEC punctique E, sumpti intra B & C, sive etiam in ea producta ultra C ad rectam AC; quæ fuit hic regularum AB, BED & puncti E, sumpti intra B & D, sive etiam in ipsa continuata ultra D, ad rectam AD: ac proinde alia non indigebimus demonstratione. Adeò ut si punctum E à B utrinque æqualiter fuerit dissitum, æquales ac similes planè, sed inverso situ ellipses describantur.

Sciendum denuo est, non solùm ex motu puncti D per rectam AD semi-ellipses describi, verùm etiam integras, si modò regulæ AB, BED ad alteras partes rectæ AD incurventur.

SCHO-

SCHOLIUM.

Quoniam superiùs ostensum est, FO, hoc est, NE, esse ad NI, ut GP, qui est axis rectus, ad LK, qui est axis transversus ellipsis; atque hoc ipsum in infinitum manifestum sit de omnibus aliis rectis n e, n i, quæ tam in ellipsi LGKP quàm in circulo L k K l ordinatim adplicantur ad axem LK: i sequitur, ellipsim LGKP ad circulum L k K l, sicuti etiam ellipsis segmentum E e V ad circuli segmentum I i Y, esse, ut axis rectus GP ad axem tranversum LK.

i Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Item quoniam ipsius n ε ad n i, totius ad totam, eadem est ratio quæ ablatæ n F ad ablatam n r: k erit etiam reliquæ F ε ad reliquam r i eadem ratio quæ totius n ε ad totam n i, hoc est, quæ axis recti GP ad axem transversum LK. Cumque hoc in infinitum sit evidens de omnibus aliis rectis F ε, r i in segmento ellipsis E ε X & circuli I i Z: eodem modo concludendum erit, l ellipsis segmentum E ε X ad circuli segmentnm I i Z esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

k p 19 Quinti Elem.

l Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

m Sequitur quoque, propter similitudinem triangulorum AFO, AIN, esse AO ad AF, ut AN ad AI; n permutandoque AO ad AN, hoc est, MF ad ME, ut AF ad AI seu GP ad LK: acproinde MF ad ME, ut axis rectus GP ad axem transversum LK. Quia verò in infinitum illud apparet quoque de omnibus aliis rectis m f, m ε, quæ tam in circulo p G g P quàm in ellipsi LGKP sunt ordinatim applicatæ ad axem GP: o necesse est circulum p G g P ad ellipsim LGKP, sicut etiam circuli segmentum F f W ad ellipsis segmentum E ε X, esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

m p 4 Sexti Elem.

n p 16 Quinti Elem.

o Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Porrò cum ipsius m f ad m e, totius ad totam, eadem sit ratio quæ ablatæ m R ad ablatam m S: p erit etiam reliquæ R f ad reliquam S e eadem ratio, quæ totius m f ad totam m e, hoc est, quæ axis recti GP ad axem transversum LK. Et quoniam hoc quoque in infinitum apparet de omnibus aliis rectis R f, S e in segmento circuli F f T & ellipsis E e V: q similiter inferendum est circuli segmentum F f T ad ellipsis segmentum E e V esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK.

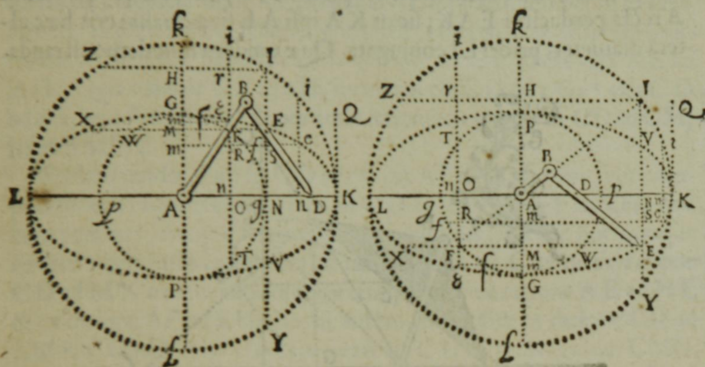
p p 19 Quinti Elem.

q Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Quia itaque demonstratum est, circulum p G g P ad ellipsim LGKP, itemque circuli segmentum F f W ad ellipsis segmentum E ε X esse, ut axis rectus GP ad axem transversum LK; ac in eadem ratione quoque esse ellipsim LGKP ad circulum L k K l, sicuti etiam ellipsis segmentum E ε X ad circuli segmentum I i Z: liquet ellipsim LGKP esse medio loco proportionalem inter circulum p G g P & circulum L k K l; nec non ejus segmentum E ε X inter circulorum segmenta F f W & I i Z.

Simi-

Similiter quoniam ostendimus, circuli segmentum F f T *esse ad ellipsis segmentum* E e V, *ut axis rectus* G P *ad axem transversum* L K; *ac in eadem ratione esse quoque ellipsis segmentum* E e V *ad circuli segmentum* I i Y:



liquet pariter ellipsis segmentum E e V *medio loco esse proportionale inter circulorum segmenta* F f T *&* I i Y. *Quod quidem nobis propositum erat hic demonstrare.*

CAPUT III.

De ellipsibus, quæ ex motu implicato in plano describuntur, circa quascunque diametros conjugatas.

REvocetur jam autem secundum instrumentum, de quo paulò ante loquuti sumus, hoc est, concipiatur rursus in plano quocunque regula mobilis AB circa punctum fixum A, atque huic annexum triangulum ᴅ B c in puncto B, quod habeat latera ᴅ B, B c æqualia longitudini regulæ A B; ita tamen ut circa B in eodem plano converti queat. Quandoquidem autem cognosco ex præmissis, dum punctum ᴅ fertur in recta linea A D, punctum c motu isto in hoc plano rectam lineam describere A C, quæ ad A D angulos facit obliquos, quorum acutus CAD est subduplus anguli ᴅ B c, qui in triangulo d B c sub æqualibus lateribus ᴅ B, B c continetur; considero preterea punctũ in aliquod ε in latere ᴅ c. Dico jam id ipsum motu illo in eodem plano de-

describere ellipsis circumferentiam, cujus centrum est A; diameter una LI, æqualis duplæ *c e*; altera verò ipsi conjugata EK. Hæc autem invenitur, si *c* ꝺ latus trianguli inter rectas A C, A D accommodetur, ita ut ipsi AD sit perpendicularis: quemadmodum hic per CD apparet. Si enim, in ea constitutione ipsius *c* ꝺ, à puncto E per punctum A recta perducitur E A K; sic ut K A ipsi A E sit æqualis: erit hæc altera diameter, priori LI conjugata. Quæ quidem sunt demonstranda.

Demittatur ex *c* recta *c* G perpendicularis in A D, fingaturque latus trianguli *c* ꝺ habere etiam positionem rectæ *c d* (patet enim ex figura Ima pagnæ 305 ita quoque posse esse constitutum), connectaturque recta ε *e*, secans *c* G in H. Producatur porrò C D ut D N sit æqualis DC; & ex DC abscindatur D M æqualis ipsi *c* G: ac denique ad E K, LI inveniatur tertia proportionalis K Q.

a Per caput 1 hujus.

a Cum igitur punctum *c* cadat semper in recta linea A C, manifestum est illud demum coïncisurum cum puncto C, cùm ab A longissimè erit remotum; quo quidem casu punctum E verticem ellipsis repræsentabit.

b p 4 Sexti Elem.

b Quoniam itaque *c d* hoc est CD ad *c* G est, α ut *c e* hoc est C E ad

ad *c* H; parallelæ autem existant C D, *c* G: erunt puncta E, H, A in una linea recta. Liquet igitur punctum H, ubi invicem secant perpendicularis *c* G & recta *ε e*, esse quoque punctum intersectionis ipsarum E A K, *ε e*. Cum autem recta *ε c* à *c* G in H bifariam semper dividatur, sequitur similiter ipsam à K A E bifariam semper in H divisum iri: ac proinde E A K diametrum esse; *ε e* verò quæ ad ipsam ordinatim adplicatur. Quocirca erit quoque ut C E ad *c* H, ita A E ad A H. Quia verò ut C E ad *c* H, ita etiam est C D ad *c* G: [c] erit C D ad *c* G, ut A E ad A H; [d] & per conversionem rationis ut C D ad C M, ita A E ad H E.

Eodem modo, cum sit C D ad *c* G, ut A E ad A H; [e] erit, per compositionem rationis contrariam, ut C D ad M N, ita A E ad K H. Sed cum rationes, compositæ ex eisdem rationibus, inter se sint quoque eædem: erit ratio composita ex ratione C D ad C M & ex ratione C D ad M N eadem rationi, quæ componitur ex ratione A E ad H E & ex ratione A E ad K H. Ratio autem composita ex ratione C D ad C M & C D ad M N, [f] est ratio quadrati C D ad rectangulum C M N. Ratio verò composita ex ratione A E ad H E & ex ratione A E ad K H, [g] est ratio quadrati A E ad rectangulum E H K. [h] Erit igitur ut quadratum C D ad rectangulum C M N, ita quadratum A E ad rectangulum E H K.

Quoniam verò est ut C D ad *c* G seu D M, *α* ita *c e* ad *c* H: [i] erit etiam ut quadratum C D ad quadratum D M, ita quadratum *c e* ad quadratum *c* H; [k] & per conversionem rationis ut quadratum C D ad quadratum C D multatum quadrato D M, [l] quod idem est atque rectangulum C M N, ita quadratum *c e* ad quadratum *c e* diminutum quadrato *c* H, [m] id quod est quadratum H *e*. Siquidem igitur ratio quadrati A E ad rectangulum E H K est, sicut quadrati C D ad rectangulum C M N; & quoque ratio quadrati *c e* ad quadratum H *e*, sicut quadrati C D ad rectangulum C M N: [n] erunt quoque inter se eædem, eritque ut quadratum *c e* ad quadratum H *e*, ita quadratum A E ad rectangulum E H K; [o] permutandoque ut quadratum *c e* seu A I ad quadratum A E, ita quadratum H *e* ad rectangulum E H K. Sunt autem K Q, L I, & K E ex constructione proportionales. [p] Erit idcirco K Q ad K E, ut quadratum L I ad quadratum K E, seu quadratum A I ad quadratum A E. Quia itaque constat quadratum H *e* ad rectangulum E H K esse, ut rectum figuræ latus K Q ad latus figuræ transversum K E: [q] liquet punctum *e* esse in ellipsis circumferentia, cujus dia-

c p 11 Quinti Elem.
d p Corol. 19 Quinti Elem.
e Vide Clavium ad 18 Quinti Elem.
f p 23 Sexti Elem.
g p 23 Sexti Elem.
h p 11 Quinti Elem.
i p 22 Sexti Elem.
k p Corol. 19 Quinti Elem.
l p 5 Secundi Elem.
m p 47 Primi Elem.
n p 11 Quinti Elem.
o p 16 Quinti Elem.
p p Corol. 20 Sexti Elem.
q Per conversam 21 Primi Conicorum Apollonii.

diametri conjugatę sunt KE, LI; latus autem rectum KQ, pertinens ad diametrum KE. Quia autē hoc in infinitum ita contingit circa omnes alias rectas H*e*, ordinatim ad diametrum KE adplicatas, in quavis alia instrumenti constitutione (cum illæ omnes hic nullam adferant differentiam, quo minus demonstratio ad illas possit adplicari): sequitur punctum ε motu isto in plano describere ellipsis circumferentiam, circa diametros KE, LI. Quod erat demonstrandum.

SCHOLIUM.

Quandoquidem præcedenti capite quædam attigimus de iis, quæ contingunt circa superficiem ellipsis & ejusdem segmentorum; hoc tamen ibi factum fuit juxta solam considerationem axium, nec locum habuit nisi tantùm in segmentis rectis. Verùm ut contemplatio illa generalis sit juxta quascunque diametros, & in segmentis quoque scalenis pateat; consequenter ostendemus, cui ellipsi, juxta axes considerata, alia sit æqualis: quemadmodum etiam, quibus segmentis rectis ipsa ellipsis segmenta scalena æquentur.

Sit ergo ellipsis LEIK, *cujus diameter* LI; *altera autem huic conjugata sit* KE, *ad quam ordinatim adplicata intelligatur* ε e; *segmentum verò scalenum esto* ε E e. *Si itaque ex punctis* E, K *alternatim ducantur rectæ* EM, KP *diametro* LI *parallelæ; tum per centrum* A *recta* PAM *perpendicularis ad* LI, *secans* EN, KP *in* M *&* P, [a] *ac denique circa axes conjugatos* LI, PM *ellipsis describatur* LMIP: *dico ellipsim* LEIK *ellipsi* LMIP *æqualem esse. Cæterùm si producatur recta* ε e, *donec secet hujus ellipsis circumferentiam in* f *&* T: *dico similiter segmentum illius* ε E e *segmento hujus* TMf *esse æquale.*

Est namque in ellipsi LEIK [b] *ut rectum latus* KQ *ad transversum* KE, *sive quadratum* LI *ad quadratum* KE, [c] *sive etiam quadratum* AI *ad quadratum* AE, *ε ita* He *quadratum ad* KHE *rectangulum. Quoniam verò* [d] *parallelæ sunt* ME, ε e, *&* KP: [e] *erit* AE *ad* HE, *ut* ED *seu* AM *ad* ES *seu* Mm. *Et sumptis antecedentium duplis, ut* KE *ad* HE, *ita* PM *ad* Mm;

a per 4 Caput hujus.
b p 21 Primi Conicorum Apollonii.
c p 15 Quinti Elem.
d Ex constructione.
e p 4 Sexti Elem.

M m; [f] *dividendoque* K H *ad* H E, *ut* P m *ad* m M. [g] *Ut autem* K H *ad* H E, *ita eſt rectangulum* K H E *ad* H E *quadratum*; *& ut* P m *ad* m M, *ita eſt* P m M *rectangulum ad* m M *quadratum*. [h] *Erit igitur ut rectangulum* K H E *ad quadratum* H E, *ita rectangulum* P m M *ad* m M *quadratum*; [i] *& permutando rectangulum* K H E *ad rectangulum* P m M, *ut quadratum* H E *ad quadratum* m M, [k] *ſive ut quadratum* A E *ad* A M *quadratum*. *Cum autem oſtenſum ſit, α quadratum* H e *ad rectangulum* K H E *eſſe, ut quadratum* A I *ad quadratum* A E: [l] *erit quoque ex æquo, ut quadratum* H e *ad rectangulum* P m M, *ita quadratum* A I *ad quadratum* A M. *Quia verò in ellipſi* L M I P *ſimiliter, ut ſupra, α quadratum* m f *ad rectangulum* P m M *eſt, ut quadratum* A I *ad quadratum* A M: [m] *erit quoque quadratum* H e *ad rectangulum* P m M, *ut* m f *quadratum ad rectangulum* P m M. *E quibus ſequitur* [n] *quadratum* H e *quadrato* m f *æquale eſſe. Æquales igitur quoque erunt rectæ* H e, m f, *unde & earum duplæ* ε e, T f. *Eadem eſt demonſtratio de omnibus aliis ordinatim adplicatis ad diametros* K E, P M, *in infinitum aſſumptis in utraque figura. Unde patet,* [o] *ellipſim* L E I K *ellipſi* L M I P *æqualem eſſe, ſicuti etiam ſegmentum ejus* ε E e *ſegmento hujus* T M f. *quod idem quoque de reliquis ſegmentis* ε K e, T P f *eſt intelligendum. Quare conſtat propoſitum.*

[f] ℘ 17 Quinti Elem.
[g] ℘ 1 Sexti Elem.
[h] ℘ 11 Quinti Elem.
[i] ℘ 16 Quinti Elem.
[k] ℘ 4 & 22 Sexti Elem.
[l] ℘ 22 Quinti Elem.
[m] ℘ 11 Quinti Elem.
[n] ℘ 9 Quinti Elem.
[o] Ex methodo indiviſibilium Cavalerii.

Ex his liquet, cuivis ſegmento ellipſis dato, exhiberi poſſe circuli ſegmentum ipſi æquale. Si enim ſegmentum illud fuerit ſcalenum, ut ſegmentum ε E e; *oſtendimus hîc aliud* T M f *ipſi æquale, quod ſit rectum. Porrò quænam ratio inter hoc & circuli ſegmentum exiſtat, ex præmiſſis quoque manifeſtum eſt. Patet ergo ſegmento cuivis ellipſis dato, circuli ſegmentū inveniri æquale.*

Sequuntur porrò alia ad ellipſes ſpectantia, quæ ex motu implicato, tam circa extremas, quàm alias quaſcunque diametros conjugatas, beneficio ejuſdem inſtrumenti, in plano deſcribuntur.

PRiuſquàm finem impono contemplationi prædicti inſtrumenti, etiam mihi in mentem venit conſiderandum, quid contingat circa punctum E, cùm ſumitur in latere B C trianguli B C D, ſive in ipſo in utramvis partem producto.

Aſſumatur igitur punctum aliquod in B C (ut E,) intra puncta B & C, ſive etiam in eadem utrinque ultra ipſa indefinitè producta, modò B E ipſi A B non ſumatur æqualis, ſi illud ſumere velimus ultra B. Dico rurſus, ſi feratur punctum D in recta linea A D, punctum E motu

 iſto

isto in plano describere ellipsis circumferentiam, cujus centrum est A, axis transversus ipsa recta AC, quam describit punctum C, longitudinem suam L K æqualem habens duplæ compositæ ex A B, B E: & cujus axis rectus priori conjugatus est GP, habens longitudinem suam æqualem duplæ C E.

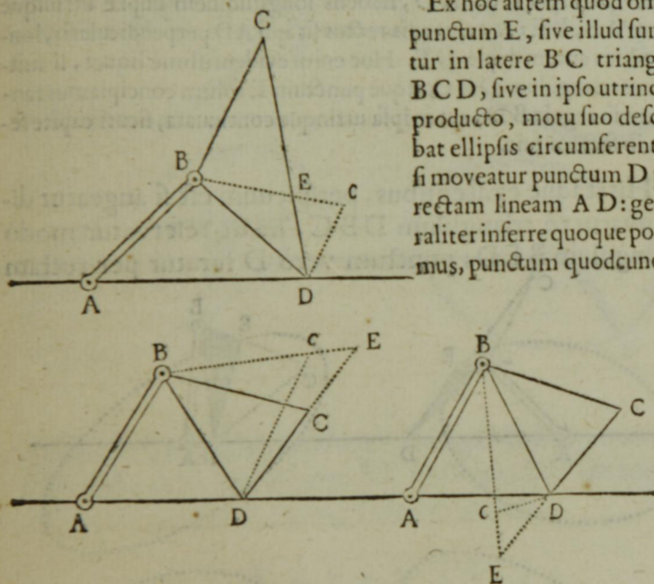
Enimverò si recordemur, quæ capite primo demonstravimus de puncto C circa prædictum instrumentum; nempe quòd, dum fertur punctum D per rectã A D, punctum C motu isto describat rectam lineam A C, efficientem ad A D angulos obliquos; & horum quidem acutum CAD subduplum esse anguli DBC, qui in triangulo C B D sub æqualibus lateribus D B, B C continetur: Facilè intelligemus, si, relicto triangulo D B C, ponatur jam punctum E tanquam in regula BC, seu in ipsa utrinque producta (ut priùs fecimus): idem fore ac si concipiamus punctum C tum ferri in recta A C, & ea fieri, quæ de puncto E capite secundo, circa regulas mobiles A B, DBC, demonstrata sunt. Hoc est, punctum E motu isto in plano describere ellipsis circumferentiam circa centrum A, cujus axis transversus L K cadit in A C, ac æqualis est duplæ compositæ ex AB, BE; rectus verò GP, huic perpendicularis conjugatusque, æqualis duplæ C E.

Quoniam autem accidit rectam AD, primò propositam, diametrum quoque ellipsis existere: deinceps determinanda restat ejus longitudo atque simul ejus, quæ cum ipsa est conjugata.

Ductâ itaque in triangulo D B C rectâ D E, erigatur ex A ad A D perpendicularis A H, æqualis ductæ D E; ducaturque per H recta H F, parallela ipsi A D. Porrò describatur supra A H triangulum AHB, æquale triangulo D E B in instrumento, ita ut H B sit æqualis ipsi BE, A B autem ipsi BD; & centro B intervallo B H arcus describatur,

batur, ſecans HF in E: eritque punctum E vertex ellipſis. Quare ſi ducatur recta ab E ad A, eaque continuetur donec MA æquetur AE: erit MAE ellipſis diameter. Denique ad determinandam alteram huic conjugatam, ſumatur in AD recta A *b*, ſimiliter ipſi DE in inſtrumento æqualis; atque, ut ante, ſupra hanc triangulum conſtituatur A *b b*, æquale triangulo DEB in inſtrumento; centroque *b* intervallo *b b* arcus deſcribatur, ſecans vel tangens AD in *e*. Poſt hæc æquatâ IA ipſi A *e*: erit I *e* altera ellipſis diameter, priori ME conjugata. Quæ quidem ex adplicatione inſtrumenti perſpicua ſunt.

Ex hoc autem quòd omne punctum E, ſive illud ſumitur in latere BC trianguli BCD, ſive in ipſo utrinque producto, motu ſuo deſcribat ellipſis circumferentiã, ſi moveatur punctum D per rectam lineam AD: generaliter inferre quoque poſſumus, punctum quodcunque



E, ſumptum in latere DC, aut in ipſo utrinque indefinitè producto, deſcripturum eſſe ellipſis circumferentiam.

Si enim ſumatur ejuſmodi punctum in latere DC, aut in ipſo utrinque indefinitè producto ultra C vel D, ducaturque recta BE: erit hæc vel minor, vel major quàm DB ſeu BC; minor quidem, ſi punctum E ſumptum fuerit in DC intra puncta D, C; major verò, ſi illud in latere DC utrinque indefinitè producto ultra puncta C, D ſuma-

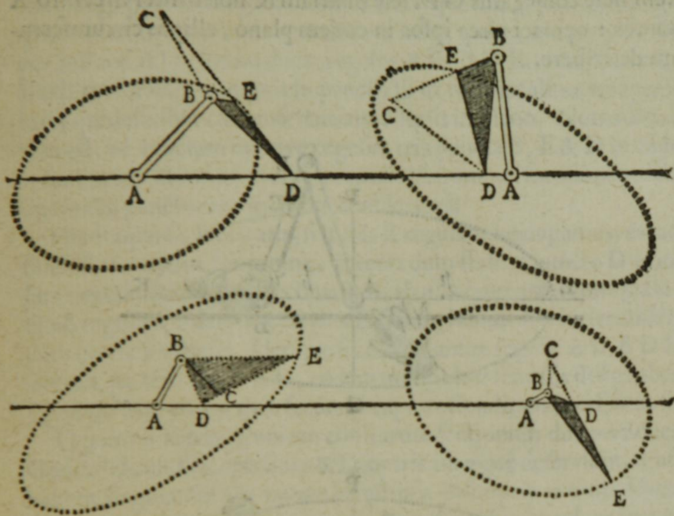
matur. Quocirca ductâ BE, in eaque assumendo rectam B*c* ipsi DB seu B C æqualem, jungendoque D*c*: concipi hâc ratione quoque poterit punctum E, tanquam in latere B*c* trianguli B D *c*, sive in eo ultra *c* indefinitè producto.

Quia denique considerari adhuc potest punctum E in latere B D trianguli B C D, sive in ipso utrinque indefinitè extenso, modò B E ipsi A B non sumatur æqualis, si illud sumere libeat ultra B: rursus fiet, ut, si feratur punctum D in recta linea A D, punctum E motu isto circumferentiam ellipsis describat; cujus quidem centrum sit A; axis transversus ipsa recta A D, habens longitudinem duplæ utriusque simul A B, B E; & cujus axis rectus sit ipsi AD perpendicularis, longitudinis autem duplæ D E. Hoc enim evidentissimè liquet, si mittamus triangulum D B C, atque punctum E solùm concipiamus tanquam in regula B D, aut in ipsa utrinque continuata, sicuti capite secundo factum fuit.

His itaque existentibus, perspicuum est si augeatur diminuaturvè triangulum D B C, ita ut reservetur modò triangulum B E D; punctum verò D feratur per rectam

AD: quòd punctum E motu illo describat semper ellipsis circumferentiam. Porrò quoniam perspicuum est, triangu-

gulum BED variè posse esse adfectum, & in utramvis partem rectæ BD constitutum; modò tantùm caveatur ne latus ejus B E ipsi lateri B D seu regulæ A B sit æquale: se-



quitur punctum E cujuscunque trianguli B E D, quod ad BD adplicatur, (cujus latus B E ipsi lateri B D seu regulæ A D non est æquale) idem præstaturum esse.

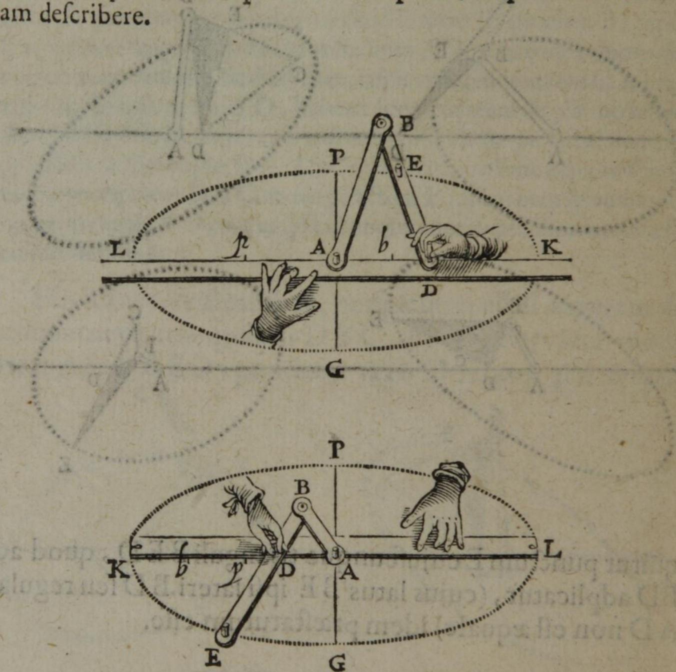
Caput IV.

De modo describendi ellipses in plano, circa datos axes seu extremas diametros.

Postquam præmissis capitibus ea pertractavimus, quæ ut fundamenta spectare possunt, quibus organicæ ellipsis descriptiones superstrui valent, superest ut iisdem vestigiis insistentes ad eorum usum nos accingamus, atque ostendamus quo pacto ea expedian-

tur quæ hac in parte vulgò proponi ſolent. Docebimus ergo primò, quibus modis circa datos axes, ſeu extremas diametros, ellipſes ipſæ in plano deſignentur.

Dentur itaque in plano quocunque, L K axis tranſverſus, rectus autem huic conjugatus G P, ſeſe bifariam & normaliter in centro A ſecantes : oportet circa ipſos in eodem plano, ellipſis circumferentiam deſcribere.



Ponatur A *p* æqualis G A ſeu AP, ita ut *p* K æquetur vel aggregato vel differentiæ ipſarum KA, AP (perinde enim eſt); ipſaque bifariam ſecetur in *b*. Deinde fiant duæ regulæ A B, B D ex orichalco, ligno, aliavè materia ſolida, longitudine æquales ipſi *p b* ſeu *b* K; hâc tamen lege, ut regula B D tam longa exiſtat, ut in ipſa notari poſſit punctum E à B verſus D, ſic ut BE ipſi A *b* ſit æqualis: quocirca ſi A *b* longitudine ſuperet regulam B D, eatenus hæc ultra D prolonganda erit,

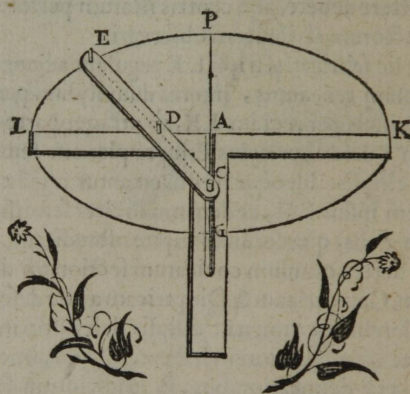
erit, donec ipsi sit æqualis. Hæ porrò regulæ sic aptari debent, ut A B sit perforanda unâ suâ extremitate in A, ita ut injici queat paxillo, in puncto A defixo, ac circa ipsum rotari: altera verò extremitas B annectenda regulæ BED extremitati B, ita tamen ut circa B liberè circumagi possit. Regula autem BDE in puncto D perforanda quoque erit, ut stylus aliquis acuminatus inseri queat, qui cuspide latus per rectam A D, secum ducat regulas AB, B D E. Denique regula BDE perforanda item erit in puncto E, ut recipiat alium insuper stylum, qui describat circumferentiam ellipsis in plano. Notandum autem est, ad exactam operis exegesin, tria puncta B, E & D in eadem recta linea existere debere, ac à centris istarum perforationum debita intervalla punctorum ab invicem observari.

His itaque sic fabricatis, si ipsi L K regulam adjungamus, eamque sinistrâ immotam teneamns, interea dum stylum puncto D immissum dextrâ ferimus per rectam LK, ab utraque parte centri juxta dictam regulam: describet stylus E supra planum semi-circumferentiam quæsitæ ellipsis. Ideoque si convertantur regulæ A B, B D E in alteram partem ipsius L K, eodem modo alter semissis designabitur. Quæ quidem ex iis, quæ secundo capite ostendimus, perspicua sunt.

Quamvis autem omnium conicarum sectionum delineationes ad Gnomonicam, Catoptricam & Dioptricam æquè deserviunt, ac usum habent singularem: fit tamen ut ellipsis descriptio in quibusdam latiùs pateat, ac usum uberiorem habeat. Quemadmodum in orthographicis sphæræ delineationibus, in ædificiorum fornicationibus, cœlationibus pluteorum, ac aliis compluribus. Hinc quoque oritur, ut illam describendi plures modi extent quàm reliquarum quidem coni sectionum: ita ut consentaneum judicaverimus omnes eos, qui organici sunt ac quorum beneficio ellipses uno ductu describuntur, quantumque ipsi mihi constant hic recensere. Occurrit autem primò hic modus.

Esto rursus ellipsis describenda circa extremas diametros, seu axes L K, P G. Ad hoc autem præparetur regula E C, ex orichalco vel ligno, ut velis, quæ longitudine æqualis sit ipsi L A seu A K; in eaque notetur punctum D, ita ut E D æqualis sit PA seu AG. Ipsa autem perforetur in punctis E, D & C, sic ut styli inseri queant. quocirca sciendum est, ad hoc regulam EC reverà quidem longitudine paululùm excedere debere rectam LA seu AK, aliàs enim fieri non posset ut in E & C perforaretur. Præterea construatur scipio LCK, similiter

liter ex orichalco, ligno, aliave dura materia, quæ in longitudinem CA pertusa sit fissurâ ejus latitudinis, cujus est crassities styli cylindrici in puncto C regulæ inserti. His ita paratis, si latus scipionis ipsi LK adjungamus, ita ut fissura respondeat ipsi GA; tum verò regula EC stylo D contra latus LK feratur, interea dum stylus C liberè currit per fissuram CA: describet stylus E in plano semissem circumferentiæ quæsitæ ellipseos. quocirca si eodem modo operemur ad reliquam partem, tota circumferentia descripta erit. Quia autem scipio

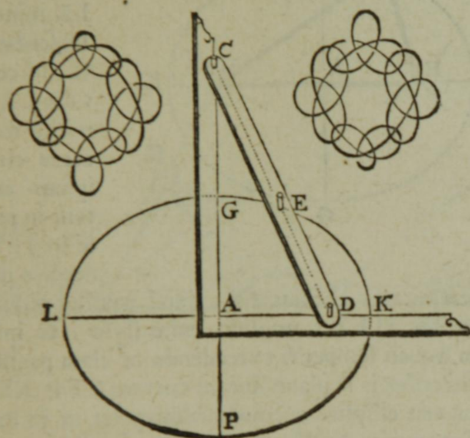


LGK duplicem ita normam repræsentat, manifestum est scipione destitutos, idem nos obtinere quoque beneficio alicujus normæ & regulæ CE, describendo singulis vicibus circumferentiæ ellipseos quartam partem.

Nullam hîc adjungo demonstrationem, quoniam ab aliis adducta est, ac illa etiam ex secundo capite à quovis facilè deduci potest. qui enim caput illud rectè considerat, advertet mecum alium porrò modum ex eo manantem huic haud multò dissimilem, qui sic se habet.

Sit idem rursus præstandum quod supra, fiatque regula CD ejus longitudinis ut in ipsa notari possint tria puncta C, E, D, ita se habentia; ut distantia puncti C ad punctum E æqualis sit semi-axi LA seu AK; distantia verò punctorum E, D à se invicem æqualis semi-

mi-axi G A seu AP. Quo facto, perforetur regula in dictis punctis ut styli inseri queant ipsaque moveri possit, ita ut collocata semper reperiatur inter duo crura cujusvis normæ ad angulum G A K adplicatæ, ac ut styli in punctis C & D inserti contingant perpetuò internè ipsa crura. Hoc enim motu describet stylus E uno ductu circumferentiæ ellipseos quartam partem G E K. Notandum hîc oc-

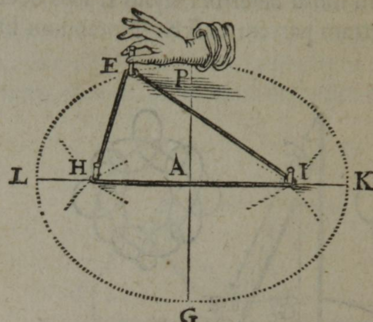


currit præterea ut ritè omnia succedant; in superiori quidem descriptione sufficere, latus scipionis L A seu AK & fissuram AG eam habere longitudinem, quæ est distantia punctorum D, C in regula; in hac autem, ut crus utrumque normæ ad minimum ejus sit longitudinis, cujus est regula CD.

Quia autem plura ab aliis afferuntur ad descriptionem ellipsis, ut modi distincti, quæ tamen parum differunt inter se, & à prædicto modo nihil habent diversum, cum ex eodem fonte deriventur: consultò eos omittendos esse duxi.

Cæterùm, cum alius insuper modus usitatus sit, describendi ellipsim in plano circa axes, qui fit beneficio alicujus restis vel fili: visum quoque fuit eum huic nostro subjungere, ne opùs sit ut aliunde pe-

petatur quidquid ad accuratam hujus lineæ descriptionem desiderari possit.

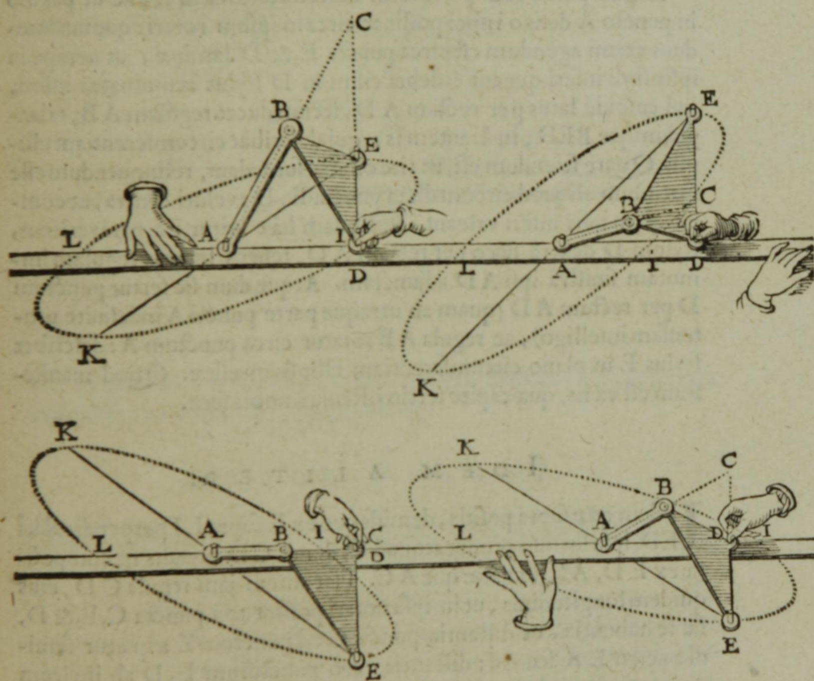


Sit itaque describẽda ellipsis circumferentia beneficio fili, circa prædictos axes LK, PG, quorum major quidem est LK, minor verò PG. Describatur ex P vel G, ut centro, intervallo LA seu AK, dimidio majoris axis, arcus circuli secans ipsum axem majorem in punctis H, I; & in H & I defixis duobus paxillis, jungantur extremitates alicujus fili, quod paxillis circumponatur, similiter ut hîc HEI: immisso enim stylo, ac ipso filum in triangulum æquali semper vi extendendo ac circa paxillos circumducendo, describet is in plano lineam curvam LEPKG, quæ circumferentia erit ellipsis. quemadmodum patet ex 52 Propositione libri 3tii Conicorum Apollonii. Quocirca si velimus ut ellipsis circumferentia transeat per puncta L, P, K, & G, curare debemus ut filum extensum pertingat præcisè ad aliquod horum punctorum. Denique sciendum est, loca punctorum H, I, ubi paxilli defixi fuêre ad descriptionem ellipsis, ab effectu Focorum nomine appellari; quorum quidem punctorum consideratio frequens est in Catoptrica & Dioptrica: ut perspicuum est ex iis, quæ sequuntur caput septimum Dioptricæ Viri illustris, Renati des Cartes.

CAPUT V.

De modo describendi ellipses in plano, circa datas quascunque diametros conjugatas.

OStensis quo pacto ellipsis in plano describi possit circa extremas diametros, congruum videtur & hîc ex præcedentibus



similiter ostendere, quibus modis circa ipsa datas quascunque diametros conjugatas in plano designetur.

Sint itaque datæ diametri conjugatæ L I, K E, bifariam sese & decussa-

cussatim in centro A secantes. Oportet circa ipsas in eodem plano ellipsis circumferentiam describere.

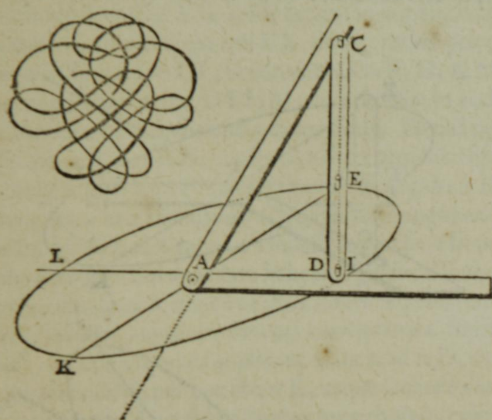
Demissâ ex E supra L I perpendiculari E D, ponatur EC æqualis L A seu A I, ita ut C D æquetur vel aggregato vel differentiæ ipsarum E D, A I, ducaturque recta A C. Divisâ autem A C bifariam in B, agantur BE, BD; fiatque regula AB ex orichalco aliavè materia dura, sibi annexum habens in puncto B triangulum B E D ex lamina orichalcea aliavè solida materia paratum, ita tamen ut illud ipsum circa B in plano circumvolvi queat.

Regula porrò A B perforetur extremitate suâ in A, sic ut paxillo in puncto A defixo injici possit ac circa id ipsum rotari: quemadmodum etiam agendum est circa puncta E & D laminæ, ut nempe in ipsis styli inseri queant: debet enim in D stylus acuminatus inseri, qui cuspide latus per rectam A D, secum ducat regulam A B, triangulumque BED; in E autem is, qui describat circumferentiam ellipsis. Quare sciendum est, ut ritè omnia succedant, relinquendum esse spatiolum aliquod circùm dicta puncta E, D, veluti centra, ut commodè in ipsis inseri valeant. Postquam hæc igitur ita paraverimus, stylum D dextrâ duco per rectam A D, tenens interea regulam immotam sinistrâ ipsi A D adjunctam. Atque dum sic fertur punctum D per rectam A D (quam ab utraque parte puncti A indefinitè protensam intelligo), ac regula A B rotatur circa punctum A: describet stylus E in plano circumferentiam ellipsis quæsitæ. Quod manifestum est ex iis, quæ capite tertio ostensa à nobis sunt.

Idem aliter.

Isdem quæ supra positis, demissaque ex E supra L I perpendiculari ED, ipsa sursum producatur ad C, donec C D æqualis sit compositæ ex E D, A I, jungaturque A C. Fiat autem jam regula C D, ejus quidem longitudinis, ut in ipsa notari possint tria puncta C, E, & D, sic se habentia, ut distantia puncti C ad punctum E æquetur semidiametro L A seu A I; distantia verò punctorum E, D ab invicem perpendiculari deductæ ED. Quo facto, perforetur hæc regula in punctis C, E, & D, ut styli inseri queant; adhibitâque ipsi angulo C A I lesbiâ regulâ (quod apud lignarios frequens est instrumentum in capiendis angulis), moveatur regula C D inter ejusdem crura, ita ut styli in punctis C & D inserti internè contingant perpetuò illa crura.

crura. Fiet enim, ut hoc incessu stylus E uno ductu circumferentiæ ellipsis quartam partem designet. Eodem modo, si Lesbiam regulam C A D ipsi angulo L A C adplicemus, atque regulam inter ejus duo crura internè moveamus, perficietur semi-circumferentia ellip-



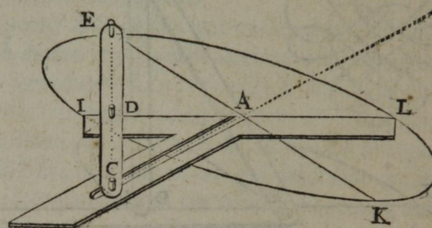
sis. Quod idem si fiat ad reliquam partem diametri L I, descripta erit tota circumferentia ellipsis quæsitæ.

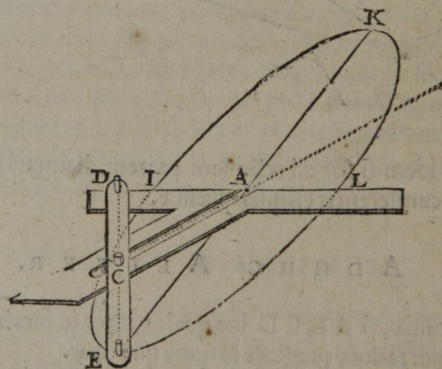
Adhuc Aliter.

Isdem positis, si A I, E D inæquales inter se fuerint, poterimus aliâ insuper ratione præstare id quod quæritur.

Positâ enim E G æquali A I, ut differentia sit C D, agatur recta per puncta C, A. Tum verò assumptâ rursus regulâ E D C, in qua notata sint tria puncta E, C, & D; ita quidem, ut distantia punctorum E, D ab invicem æqualis sit perpendiculari demissæ E D; distantia autem punctorum E, C æqualis semidiametro A I seu A L, ita ut CD sit ipsarum AI, ED differentia: adhibeatur præterea scipio I C L, qui in longitudinem C A pertusus sit fissurâ C A, quæ quidem cum I L angulos faciat obliquos, æquales angulis IAC, CAL. Hoc igi-

igitur adplicato ipſis rectis I L & C A, perforetur regula ECD in dictis punctis, ut ſtyli inſeri queant; ita quidem ut is, qui in C eſt inſerendus, paris ſit craſſitiei atq; eſt latitudo fiſſuræ CA: ut dum regula ECD ſtylo D contra latus ſcipionis I L fertur, interea dum ſtylus C liberè currit per fiſſuram, ipſa regula CED non vacillet, ac ſtylum E exactè ellipſis circumferentiam deſcribere efficiat. Atque hâc qui-





dem ratione ſemiſſis circumferentiæ deſignabitur: quocirca ut integra deſcribatur, convertendus erit modò ſcipio in reliquam partem ipſius L I, atque adplicandus, ut dictum eſt. Cujus quidem rei demonſtrationem non adduco, cum illa ex ſuperioribus perſpicua ſit, atque à quolibet facilè inveniri poſſit.

CAPUT VI.

De hyperbolis, quæ ex motu implicato in plano, tam circa extremas, quàm alias quaſcunque diametros conjugatas, deſcribuntur.

SEcent invicem rectæ E K, L I bifariam in puncto A, agantur verò per puncta L, I parallelæ ipſi E K, donec rectis per puncta E, K ductis æquidiſtanter ipſi L I, occurrant in D, F, H, & M, parallelogrammumque conſtituant D F H M; ducti autem in eodem diagonii D H, F M utrinque in infinitum producantur. Diviſâ porrò A D bifariam in B, jungatur B E: conſtruaturque angulus rectilineus *d b ε*, æqualis angulo D B E in 1^{mâ} & 2^{dâ} figura, aut angulo A B E in 3^{tiâ} aut 4^{tâ} figura; cujus una linearum *b d* (quæ dictum angulum conſtituunt) æqualis ſit ipſi BD; alia autem *b ε* indefinitè verſus *ε* ſit producta, quæ in puncto *d* inſuper ſibi annexam habeat regulam *d* E utrinque indefinitè quoq; extenſam, & quę circa illud liberè in plano converti queat.

Dico ſi dictum angulum moveri concipiamus ſupra planum in recta AD, ita ut *b d* ſemper adplicata maneat ad A D; regulam autem *d* E perpetuò tranſire per punctum E, atque ſecare *b ε* in *ε*: punctum quidem *ε* motu iſto deſcribere lineam hyperbolen, cujus centrum eſt A, tranſverſa diameter K E, recta autem huic conjugata L I, atque aſymptoti rectæ DAH, MAF.

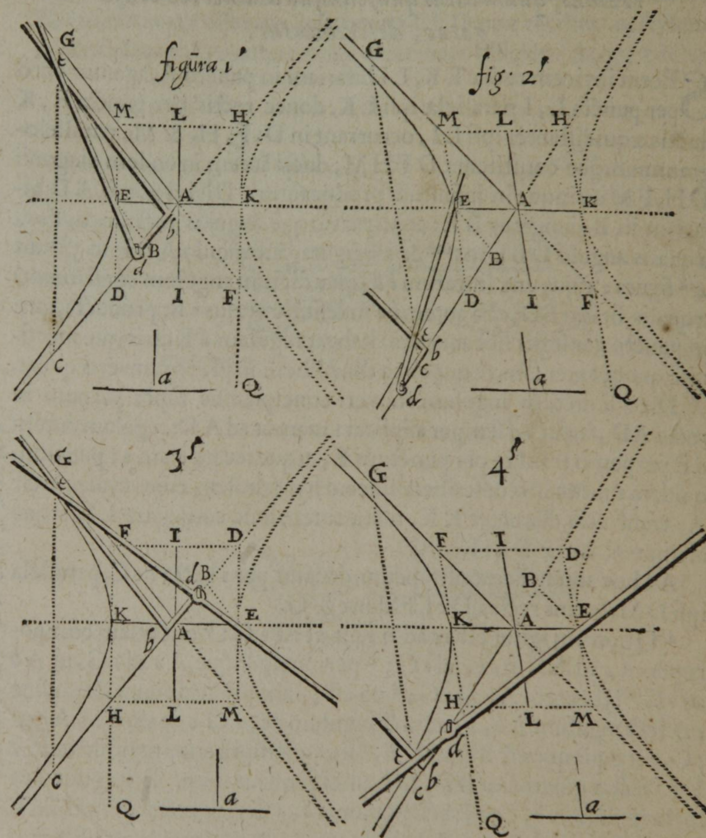
Ad hoc autem demonſtrandum, ducatur per *ε* recta *c ε* G parallela ipſi D M, ſecans rectas D H, FM in *c* & G.

[a] Quoniam igitur eſt *b c* ad A *b*, ut *c ε* ad *ε* G: [b] erit etiam componendo A *c* ad A *b*, ut *c* G ad *ε* G; [c] permutandoque A *c* ad *c* G, ut A *b* ad *ε* G. Ut autem A *b* ad *ε* G, [d] ita eſt (aſſumptâ communi altitudine *c ε*) rectangulum A *b*, *c ε* ad rectangulum *c ε*, *ε* G: at verò ut A *c* ad *c* G, [e] ita quoque eſt BD ad D E, [f] ſeu (aſſumptâ communi altitudine DE) rectangulum ſub B D, D E ad D E quadratum. Erit igitur [g] ut rectangulum A *b*, *c ε* ad rectangulum *c ε*, *ε* G, ita rectangulum, B D, DE ad D E quadratum. [h] Æquale autem eſt rectangulum A *b*, *c ε* rectangulo BD, DE: [i] eſt enim B *d*, hoc eſt, A *b*, ad *b d*, hoc eſt, DB, ut DE ad *c ε*. [k] Unde & rectangulum *c ε*, *ε* G quadrato DE æquale erit. Liquet itaque [l] punctum *ε* eſſe in hyperbola, cujus aſymptoti ſint rectæ D A H, M A F, diameter tranſverſa EK, recta autem huic conjugata LI, & centrum A. Quia verò hoc in infinitum contingit circa

a *p 2 Sexti Elem.*
b *p 18 Quinti Elem.*
c *p 16 Quinti Elem.*
d *p 1 Sexti Elem.*
e *p 4 Sexti Elem.*
f *p 1 Sexti Elem.*
g *p 11 Quinti Elem.*
h *p 16 Sexti Elem.*
i *p 4 Sexti Elem.*
k *p 14 Quinti Elem.*
l *p converſâ 10 Secundi Conic. Apollonii.*

 pun-

punctũ ε, secundùm ea quæ proposuimus: sequitur intersectione continuâ rectarum *b* ε, ε *d* punctum ε motu isto in plano lineam hyperbolen describere, circa diametros EK, LI. Quod ostendendum erat.



Manifestum præterea est, si transferamus regulam *d*E ipsamque transire concipiamus per punctum K, postquam conversus sit angulus *d b* ε in alteram partem rectæ AD, aliam similem lineam hyperbolen in plano, huic oppositam, eâdem viâ describi.

SCHO-

SCHOLIVM.

Sicuti sub genere ellipsium circulus quoque comprehendi solet, atque pro certa ejus specie assumi; quippe in quo latus transversum æquale est lateri recto: ita quoque in genere hyperbolarum fieri potest, ut certa ibi species determinetur, omnium simplicissima, ad quam cæteræ omnes sint referendæ, hoc est, in qua latus transversum & rectum inter se æquentur.

Quemadmodum igitur in Scholio Capitis *secundi usu venit, ut ibidem consideraremus, quam relationem ellipsis habet cum circulo, quod spectat ad eorum superficiem: ita quoque hic facturi sumus; comparando videlicet figuram contentam sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuscunque cum alia figura, contenta similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ; cujus nempe latus rectum & transversum inter se æqualia sunt: quia illud à nemine hactenus (quod sciam) animadversum fuit.*

Sit itaque ε E e *figura contenta sub recta linea* ε e *& portione lineæ hyperbolæ cujuscunque, cujus quidem axis transversus sit* EK, *rectus autem* LI. *Sit item alia figura* i E y *contenta sub recta linea* i y *& portione lineæ hyperbolæ* i E y, *cujus rectum latus & transversum inter se æqualia existant, ac utrumque æquale lateri transverso* E K *figuræ* ε E e.

Dico, similiter fieri ut in ellipsi, figuram ε E e *ad figuram* i E y *eam habere rationem, quam habet axis rectus* L I *ad axem transversum* E K.

Quoniam enim ad axem E K *ordinatim adplicantur rectæ* n ε, n i; [a] *erit in figura* ε E e, *ut rectum latus ad transversum, ita quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E. *Quia autem secundus axis* L I *mediam proportionem habet inter latera figuræ* ε E e: [b] *erit, rectum latus ad transversum, ut quadratum* LI *ad quadratũ* EK. [c] *Quamobrem erit, ut quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E, *ita quadratum* L I *ad quadratum* E K. [d] *At verò cum latera figuræ* i E y *inter se æqualia existant, & utrumque eorum æquale lateri transverso* E K *figuræ* ε E e: *sequitur quadratum* n i *rectangulo* K n E [e] *æquale esse. Ac idcirco esse quadratum* n ε *ad rectangulum* K n E *seu* [e] *ad quadratum* n i, *ut quadratum* LI *ad quadratum* EK. [f] *ac proinde quoque*

a *p* 21 Primi *Conicorum Apollonii.*

b *p* Corol. 20 Sexti Elem.

c *p* 11 Quinti Elem.

d Ex hypothesi.

e *p* 7 Quinti Elem.

f *p* 22 Sexti Elem.

nε *ad* ni, *ut* LI *ad* EK. *Quoniam autem hoc in infinitum apparet de omnibus aliis rectis* nε, ni, *ordinatim adplicatis ad axem* EK *in utraque figura:* g *relinquitur figuram* εEe *ad figuram* iEy *esse, ut axis rectus* LI *ad axem transversum* EK. *Quod erat propositum.*

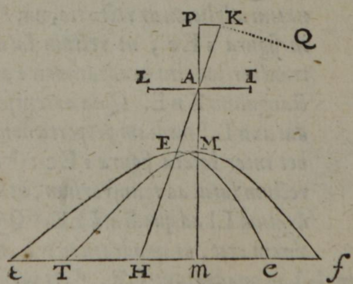
g *Ex methodo indivisibilium Cavalerii.*

Porrò hæc non tantùm locum habent juxta solam considerationem axium, sicuti ea hîc fuerunt proposita; verùm etiam secundùm quascunque diametros, quemadmodum ex demonstratione colligi potest. Veruntamen quia in his eundem ferè ordinem quem in ellipsibus placuit nobis servare; ibidem autem ostenderimus cui figuræ rectæ, sub recta linea & portione circumferentiæ ellipsis comprehensæ, æquaretur figura quævis scalena, itidem sub recta linea & portione circumferentiæ ellipsis comprehensa: ideo & hîc rectè facturos nos existimavimus, si similiter ostendamus cui figuræ rectæ, quæ comprehenditur sub rectæ linea & portione lineæ hyperbolæ, æqualis sit qualibet figura scalena, pariter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ comprehensa.

Sit ergo figura εEe *scalena, contenta sub recta* εe *& portione lineæ hyperbolæ* εEe, *cujus latus transversum sit* LI, *rectum autem* KQ; *sive cujus transversa diameter sit* EK, *recta autem huic conjugata* LI.

Si itaque ex punctis E, K *alternatim ducantur rectæ* EM, KP *diametro* LI *parallelæ; ac deinde per centrum* A *recta* PAM *perpendicularis ad* εe, *secans* EM, KP *in* M *&* P, *rectam autem* εe *in* m;* *atque denuo circa* PM *quidem ut transversum axem, rectum verò* LI, *describatur linea hyperbole* TMf, *quæ secetur à recta* εe, *vel ab ipsa in hanc vel illam partem producta in* T *&* f: *dico figuram* εEe *figuræ* TMf *æqualem esse.*

* *p 7 Caput hujus.*



Quoniam enim ordinatim ad diametrum EK *adplicata est recta* He *in figura* εEe: h *erit ut rectum latus* KQ *ad transversum* KE, i *sive quadratum* LI *ad quadratum* KE, k *sive etiam quadratum* AI *ad quadratum* AE, *ita* He *quadratum ad* KHE *rectangulum.*

Quoniam item l *parallelæ sunt* KP, ME *&* mH: m *erit* AE *ad* EH, *ut* AM *ad* Mm. *Et sumptis antecedentium duplis, ut* KE *ad* HE, *ita* PM *ad* Mm; n *componendoque* KH *ad* HE, *ut* Pm *ad* mM. o *Vt autem* KH *ad* HE, *ita est rectan-*

h *p 21 Primi Conicorum Apollonii.*
i *p Corol. 20 Sexti Elem.*
k *p 15 Quinti Elem.*
l *Ex constructione.*
m *p 2 Sexti Elem.*
n *p 18 Quinti Elem.*
o *p 1 Sexti Elem.*

ctangulum KHE *ad* HE *quadratum; & ut* Pm *ad* mM, *ita est* PmM *rectangulum ad* mM *quadratum.* p *Erit igitur ut rectangulum* KHE *ad quadratum* HE, *ita rectangulum* PmM *ad* mM *quadratum;* q *& permutando rectangulum* KHE *ad rectangulum* PmM, *ut quadratum* HE *ad quadratum* mM, *sive ut quadratum* AE *ad quadratum* AM. *Cum autem ostensum sit,* α *quadratum* He *ad rectangulum* KHE *esse, ut quadratum* AI *ad quadratum* AE: r *erit quoque ex æquo, ut quadratum* He *ad rectangulum* PmM, *ita quadratum* AI *ad quadratum* AM. *Quia verò in figura* TMf *similiter, ut supra, quadratum* mf *ad rectangulum* PmM *est, ut quadratum* AI *ad quadratum* AM: s *erit quoque quadratum* He *ad rectangulum* PmM, *ut* mf *quadratum ad rectangulum* PmM. *E quibus sequitur* t *quadratum* He *quadrato* mf, *æquale esse. Æquales igitur quoque erunt rectæ* He, mf. *unde & earum duplæ* εe, Tf. *Eadem est demonstratio de omnibus aliis rectis* He, mf, *ordinatim adplicatis in infinitum ad diametros* KE, PM *in utraque figura.* v *Quare constat figuram scalenam* εEe *figuræ rectæ* TMf *æqualem esse. Quod erat propositum.*

p ℘ 11 Quinti Elem.
q ℘ 16 Quinti Elem.
r ℘ 22 Quinti Elem.
s ℘ 11 Quinti Elem.
t ℘ 9 Quinti Elem.
u Ex methodo indivisibilium Cavalerii.

Ex his quæ jam ostensa sunt liquet, figuræ cuilibet datæ, quæ continetur sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, exhiberi posse aliam figuram eidem æqualem, contentam similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, cujus latus transversum & rectum inter se æqualia existunt. Si enim ejusmodi figura fuerit scalena, ut εEe, *ostendimus hîc aliam* TMf *ipsi æqualem, quæ quidem est recta. porrò quam rationem hæc habeat ad figurã. sub recta linea & hyperbola comprehensam, cujus latus transversum & rectum inter se æquantur, ex superioribus quoque constat. Manifestum igitur est, cuivis figuræ datæ, quæ continetur sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuscunque, exhiberi posse aliam ipsi æqualem, contentam similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ, cujus latus transversum & rectum inter se sunt æqualia.*

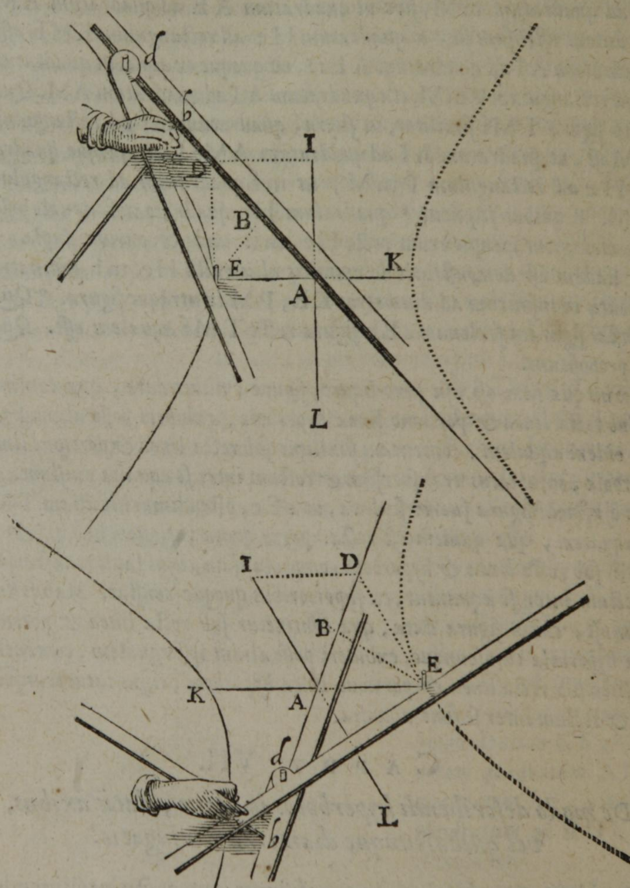
CAPUT VII.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis axibus, vel quibuscunque diametris conjugatis.

SIquidem præcedenti capite exposuimus, quo pacto intelligendum sit motu implicato in plano aliquo hyperbolas describi: reliquum est ut ostendamus, quomodo ipsæ in plano, datis axibus, vel quibuscunque diametris conjugatis, describantur.

Den-

Dentur itaque in plano quocunque, EK axis tranſverſus ſive diameter tranſverſa, IL autem rectus axis ſeu recta diameter priori EK conjugata, bifariam ſeſe in centro A ſecantes.



Oportet in eodem plano lineam hyperbolen deſcribere, cujus axes, diametrivè conjugatæ ſint, quos diximus.

Ductâ

Ductâ igitur ex puncto I rectâ I D parallelâ ipsi K E, secante ductam ex E parallelam ipsi L I in D, agatur recta A D, eaque utrinque indefinitè protendatur. Porrò sectâ A D bifariam in B, connectatur recta B E. Fiatque ex orichalco, ligno, aliâvè materiâ solidâ norma, angulusvè obliquus rectilineus *d b ε*, æqualis angulo D B E aut ABE; cujus unum quidem crus *b d* æquetur ipsi BD; alterum autem *b ε* indefinitè versùs *ε* sit extensum, qui puncto *d* sibi præterea annexam habeat regulam *d* E utrinque indefinitè quoque extensam, & quæ circumcirca illud liberè circumvolvi queat. His ita constructis, si feratur angulus *d b ε* per rectam A D, ita ut crus ejus *b d* applicatum perpetuò teneatur contra regulam, ipsi AD adjunctam; interea dum regula *d* E rotatur circa *d*, quam assiduè per punctum E transire cogimus: describent crus *b ε* regulaque *d* E, continuâ illâ intersectione *ε*, in plano lineam curvam, hyperbolen dictam; cujus quidem axis, diametervè transversa sit K E; recta verò huic conjugata L I. Notandum autem occurrit, si aptè & accuratè omnia exsequi velimus; perforandam quidem esse regulam *d* E in *d*, ita ut punctum *d* margini ejusdem exactè respondeat, ac ipsa paxillo, circa quem rotari possit, in extremitate *d* cruris *b d* dicti anguli *d b ε* extructo, injici queat. Similiter in E supra planum figendum esse paxillum, cui regula *d* E (quam transire semper oportet per E) suâ margine, in qua punctum *d* situm est, incumbat. Denique stylo acuminato uti erit necesse ad designandam puncti *ε* intersectionem.

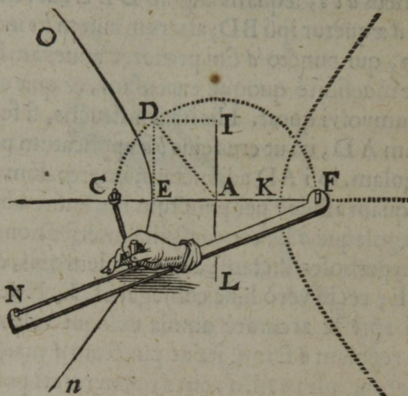
Atque ut quidem ratione adductâ, datis axibus, diametrisvè conjugatis, lineam hyperbolen describi constat: ita similiter, si transferamus regulam *d* E ac ipsam transire faciamus per punctum K, postquam conversus fuerit angulus *d b ε* in alteram partem rectæ AD, alia quoque similis linea hyperbole huic opposita, eosdem axes, diametrosvè habens, designabitur.

Idem aliter, datis axibus.

Quia alius porrò modus occurrit, describendi hyperbolas in plano, datis axibus, beneficio alicujus restis vel fili, qui originem ducit ex 5ta prop^{ne} libri 3^{tii} Conicorum Apollonii: placuit paucis eum hic exponere. Is autem sic se habet.

Proponatur itaque rursus linea hyperbole describenda, cujus axis transversus sit E K, rectus autem ipsi conjugatus IL, qui sese bifariam & ad angulos rectos secent in A.

Ductâ, ut ante, ex I rectâ I D æquidistante ipsi K E, donec secetur à recta ex E ductâ parallelâ cum L I in D, agatur recta AD; centroque A intervallo AD semicirculus describatur C D F, secans hinc inde EK productam in C & F. Porrò defixis in punctis C & F duobus paxillis, annexoque extremitati N longæ regulæ N F extremo alicujus fili N ε C, ipsâ N F paulò breviori, perforetur altera ejus extremitas, ac ita paxillo F injiciatur; filum verò N ε C altero extremo paxillo C nectatur. His ita peractis, si immisso stylo ducatur filum N ε C juxta regulã N F, initio facto in *n* extremo fili, stylusque deducatur ad E, ita ut pars fili N ε semper veluti agglutinata teneatur regulæ: describet is in plano lineam curvam *n* ε E, quæ portio erit lineæ hyperbolæ. Quocirca si velimus, ut hoc ipso modo hyperbole in plano designetur, cujus quidem axis transversus sit E K, rectus autem L I, ut propositum est: curandum erit, ut longitudo regulæ N F longitudinem fili N ε C exactè superet quantitate axis: sive etiam, ut dum stylus ita deducitur, qui curvam lineam designat, ipse accuratè pertingat ad punctum E. Cæterùm si transferatur regula ad partem reliquam rectæ C F versùs O, eodem modo alia portio O E designabitur. Quòd si autem regula ex F ad C, & filum ex C ad F transferantur, alia præterea similis linea hyperbole, huic opposita eorundemque axium, describetur.



Tandem sciendum est, punctis C & F, descriptioni hyperboles inservientibus, focorum nomen ab autoribus impositum fuisse, sive etiam ipsa puncta urentia dici, ab effectu quem habent specula & vitra ad hanc figuram expolita. Vide ea quæ post caput septimum tractat vir Nobilissimus & Clarissimus Renatus Des-Cartes in sua Dioptrica.

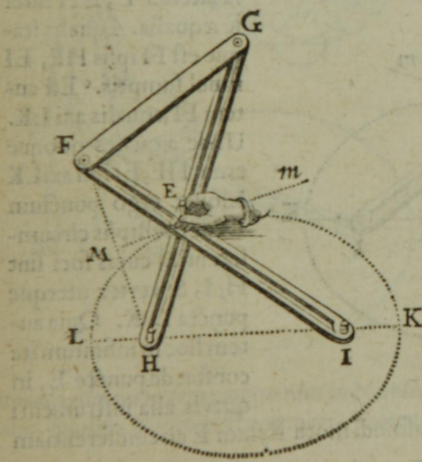
C A-

CAPUT VIII.

De modo describendi ellipses in plano, datis focis, & utroque vertice.

INter modos ellipseos describendæ varios non minùs expeditus est is, qui procedit ex datis focis & utroque vertice: quamobrem rationi consentaneum fore existimavi, si post modos jam ostensos, quibus ellipses in plano designantur, datis extremis vel etiam quibuscunque diametris conjugatis, tradam quoque quo pacto ipsæ in plano, datis focis & utroque vertice, describantur. Processus autem talis est.

Dentur in plano aliquo foci H & I, vertex alter L, alter autem K, ita ut axis transversus sit LK: oportet in eodem plano ellipsis circumferentiam describere, cujus foci & vertex uterque sint, quos diximus.



Præparentur ex orichalco, ligno, aliàve solida materia regulæ tres HG, GF, & FI; quarum quidem HG & FI singulæ æquales sint axi LK; ipsa autem FG æqualis distantiæ HI focorum ab invicem: regulæ verò HG, FI in longitudinem pertusæ sint fissurâ, quæ quidem ejus sit latitudinis, cujus est crassities styli cylindrici inserēdi, quo circumferentia ellipsis sit designanda. Cæterùm, perforentur quoque regulæ HG, FI in extremitatibus suis H, I, ita ut paxillis in H & I defixis injici queant; earundem verò extremitates G, F extremitatibus regulæ FG annectantur, eamque positionem habeant, quam in apposita figura vi-

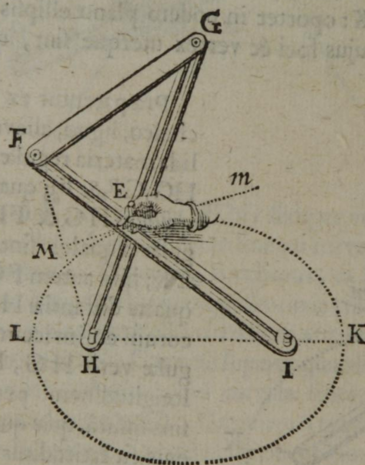
 dere

dere licet. His ita fabricatis, si stylus in utramque fissuram immissus, (hoc est, in E, communem intersectionem regularum HG, IF) circumferatur, secum ducens regulas HG, IF rotantes circa puncta H, I, describet is prout ab L versùs K defertur semi-circumferentiam LEK ellipseos quæsitæ. Quo quidem modo & alter semissis perficietur.

Quòd autem hâc ratione stylus circumductus E circumferentiam ellipsis describat, cujus foci sint H, I, & vertex uterque LK: ita liquet.

Jungatur recta FH. Quoniam itaque triangula FGH, FIH duo latera FG, GH duobus lateribus HI, IF utrumque utrique æqualia habent, basin verò FH communem: [a] habebunt quoque angulum FHG angulo HFI sub æqualibus rectis lineis contentum æqualem.

a p 8 Primi Elem.



b p 6 Primi Elem.

c Ex constructione.

Cum igitur trianguli FEH anguli ad H & F æquales inter se existant, [b] erunt & subtensa latera FE, EH inter se æqualia. Æqualis itaque est FI ipsis HE, EI simul sumptis. [c] Est autem FI æqualis axi LK. Unde æquales quoque erunt HE, EI ipsi axi LK. Liquet ergo punctum E esse in ellipsis circumferentia, cujus foci sint H, I, & vertex uterque puncta L, K. Quia autem hoc in infinitum ita constat de puncto E, in quavis alia instrumenti constitutione: [d] sequitur ejusmodi motu stylum E circumferentiam ellipsis quæsitæ describere.

d p Conversâ 52 Tertii Conicorum Apollonii.

Sequitur præterea, si bifariam secetur recta HF in M, & recta connectatur ME, ipsam contingere ellipsin in puncto E.

e p 8 Primi Elem.

f p 15 Primi Elem.

Æqualia enim sunt latera MF, FE trianguli MEF lateribus MH, HE trianguli MEH; & basis ME utrique triangulo est communis: [e] quamobrem & anguli MEF, MEH inter se æquales erunt. [f] Est autem

tem

tem angulus MEF angulo *m* EI æqualis, quòd sint secundùm verticem. Æqualis igitur quoque erit angulus MEH angulo *m* EI, atque adeò recta ME*m* ellipsin contingens in E, per conversam 48 Prop. libri 3tii Conicorum Apollonii. Quod erat propositum.

SCHOLIVM.

Colligitur ex methodo allatâ ratio facillima ducendi rectam, quæ ellipsin in quovis dato puncto circumferentiæ contingat. Sit enim, exempli gratiâ, in puncto E *ducenda recta ellipsin contingens. Agatur ex alterutro foco* H *vel* I, *puta* I, *per* E *recta* IEF *æqualis axi* LK, *conjunganturque focus alter* H *& extremitas hujus rectæ* F, *rectâ* HF: *si namque bifariam sectâ hâc rectâ in* M, *puncta* M, E, *rectâ lineâ connectantur, continget hæc ellipsin in* E.

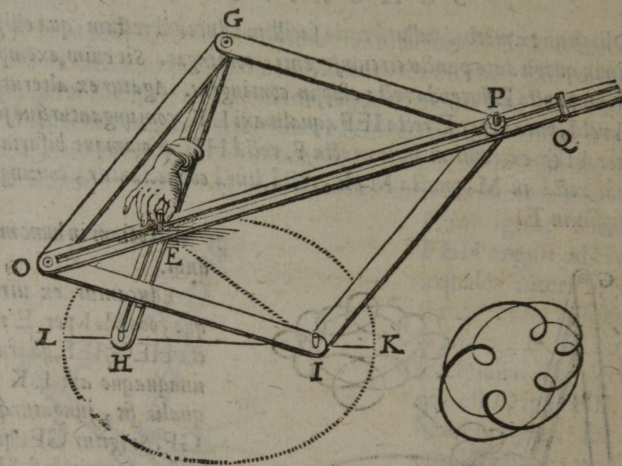
Vel etiam in hunc modum.

Educantur ex utroque foco H, I *per* E *rectæ* HEG, IEF, *quarum unaquæque axi* LK *æqualis sit, jungaturque* GF. *Si igitur* GF *æquidistans fuerit ipsi* HI, *quod quidem accidet cùm punctum* E *extremitatem referet minoris axis: recta, quæ per* E *ipsi* HI *ducitur parallela, ellipsin in* E *continget. Si verò* FG, HI *non fuerint parallelæ, producantur ambæ donec concurrant in* N, *recta enim quæ ab* N *ad* E *perducitur, similiter ellipsin in* E *continget. Vt erat propositum.*

IDEM ALITER.

Isdem quæ supra positis, assumantur præter regulam HG aliæ quatuor regulæ æquales GP, PI, IO, & OG longitudinis cujuslibet, modò tamen ea minor non sit quàm LI seu HK; ipsæque extremitatibus sibi invicem nectantur, ita ut rhombum, quadratumve GPIO re-

repræſentent. Ubi autem ipſæ in G connexæ ſunt, connectantur & ſimul cum extremitate G regulæ HG: ubi verò in I ſibi invicem ſunt annectendæ, iiſdem locis perforentur, ut paxillo in I defixo injici queant, hâcque ratione connexæ habeantur; porrò ubi in O connexæ



ſūt, ipſis alia inſuper annectatur regula OPQ versùs P indefinita, quæ in longitudinē pertuſa ſit longo canali ſeu fiſſurâ, ejuſdem latitudinis cujus eſt fiſſura regulæ HG. Siquidem autem dicta regula medio ſuo tranſire perpetuò requiritur per P, non è re fuerit perforare regulas GP, IP in P, ita ut in ipſas paxillus inſeri queat, quo ſimul in P connexæ teneantur, paris quidem craſſitiei atque latitudo fiſſurarum, conſtans ſubtus ex lamella, ſuperiùs verò in cochleam extructus; ita ut, poſtquam regulæ GP, IP, & OP eidem injectæ fuerint, atque his alia lamella foramine pertuſa ſuperimponatur, dictæ regulæ cochleâ inter lamellas contineantur. Denique annulo quadrangulo regulam OP circundare oportebit extra P, qui arctè eam circumplectens ulteriùs quoque ſi opùs ſit amoveri poſſit, nec ſinat ut fiſſura in aliam evadat latitudinem. His ita conſtructis, ut ad deſcriptionem ellipſeos accedamus, ſumatur ſtylus aliquis cylindricus, ejus quidem craſſi-

crassitiei cujus est latitudo utriusque fissuræ, isque in fissuram utramque immittatur, utpote in E quò secant invicem regulæ H G, O P, deferaturque ab L versùs K, prout à jam dictis regulis tenetur: quo opere designabitur quidem in plano semissis circumferentiæ ellipsis quæsitæ. Similiter autem alter semissis absolvetur. Ratio hujus negotii perfacilis est. Ducatur enim recta I E.

Cum igitur triangulorum GPO, OPI duo latera OG, GP duobus lateribus OI, IP utrumque utrique æqualia sint, basis verò OP utriq; triangulo communis: [a] erunt quoque α anguli GPO, OPI, sub æqualibus rectis lineis contenti, æquales. Porrò cum duo triangula GPE, EPI duo latera G P, P E duobus lateribus I P, P E utrumque utrique æqualia habeant, est namque E P utrique communis; habeant verò & angulum G P E angulo E P I sub æqualibus rectis lineis contentum æqualem (α ut jam est ostensum): [b] habebunt quoque basin GE basi E I æqualem, β angulumque G E P angulo P E I, sub quibus æqualia latera subtenduntur. Æqualis itaque est H G ipsis H E, E I simul sumptis; est autem H G ex constructione æqualis axi L K: æquales ergo quoque erunt H E, E I ipsi axi L K, atque adeò punctum E in ellipsis circumferentiã cadet, cujus foci H, I, & axis major est LK, per conversam 52dam Prop. libri 3tii Conicorum Apollonii. Quia verò hoc similiter constat de omni puncto E in qua libet alia instrumenti constitutione, relinquitur hâc viâ stylum E circumferentiam quæsitæ ellipseos describere. Quod præstare opus erat.

a p 8 Primi Elem.

b p 4 Primi Elem.

Habet autem hæc methodus hoc sibi peculiare, ut inter describendum regula O P assiduè designet quoque lineam, quæ ellipsin in quovis circumferentiæ puncto E contingat. Quod quidem sic liquet.

Quoniam enim anguli G E P, PEI æquales sunt, (ut modò ostendimus,) [c] angulus verò G E P angulo O E H æqualis, cum sint ad verticem: erit etiam angulus P E I angulo O E H æqualis, atque ita recta O P ellipsin L E K contingens in E, per conversam 48vam Propnem libri 3tii Conicorum Apollonii. Ut proponebatur.

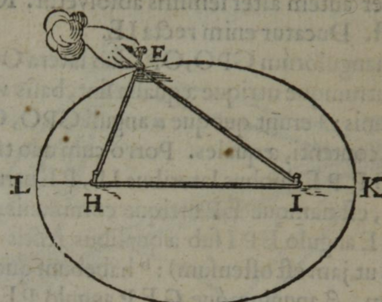
c p 15 Primi Elem.

Aliter, vulgari modo.

Iisdem positis, ostendendum est ut propositum vulgari modo perficiatur.

Defixis itaque paxillis in H & I, filum capiatur quod duplicatum nexis

nexis extremitatibus longitudinem L I vel H K adæquet, illudque paxillis circumponatur: fiet enim, si immisso stylo filum extendatur



in triangulum, æquali semper vi, atque ita stylus circa paxillos circumducatur, ut is circumferentiam L E K quæsitæ ellipseos in plano describat.

Caput IX.

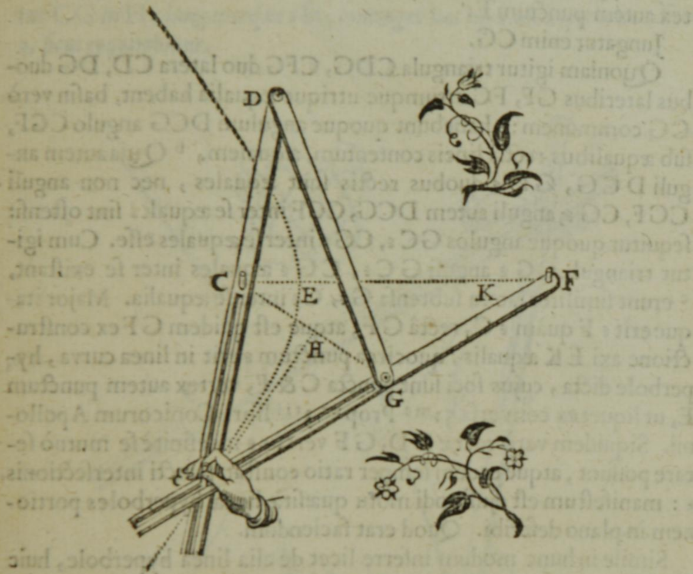
De modo describendi hyperbolas in plano, datis focis & vertice.

TAmetsi promptè variis modis hyperbolæ quoque in plano describuntur, infimo tamen loco non habendus est is, quo ex datis focis & vertice ipsæ in plano delineantur. Similiter igitur sicut in ellipsi factum fuit, ubi, postquam docueramus quibus modis, datis extremis vel etiam quibuscunque diametris conjugatis, ipsæ in plano describerentur, ostendimus quâ viâ ex datis focis & utroque vertice decircinandæ essent: ordo postulat ut & idem circa hyperbolas instituamus, præsertim cum præsentes modi iis, quos circa eandem de ellipsi Propositionē dedimus, consentiant. Ut ex sequentibus patebit.

Dentur igitur in plano quocunque foci C, F, & vertex E. Oporteatque in eodem plano lineam hyperbolen describere, cujus C & F sint foci, vertex autem E.

Ponatur KF æqualis C E, ita ut axis transversus sit E K; præparen-tur-

turque ex orichalco, ligno, aliavé dura materia regulæ tres CD, DG, & GF; quarum quidem CD, GF unaquæque axi EK; reliqua verò DG intervallo focorum æqualis sit. Intelligi tamen volo, ut regulæ CD, GF ultra C & G indefinitè sint extensæ ac longæ, itemque per-



tusæ fissurâ ejus latitudinis, quæ est crassities styli cylindrici inserendi, quo hyperboles linea delineanda erit. Præterea perforari debent hæ regulæ in C & F, ut paxillis in C & F defixis injici queant, in D & G autem ipsæ connectendæ sunt cum regula DG, quemadmodum per appositam figuram conspicere licet. Quo facto, si immittatur stylus in utramque fissuram, nempe in ε punctum communis intersectionis regularum CD, GF, isque deferatur secum ferens regulas CD, GF rotantes circa puncta C, F, prout ab E versùs ε fertur: de-

ſcribet in plano lineam curvam E ε, quæ portio erit lineæ hyperbolæ. Quod quidem ſimiliter ita ſe habet ad alteram partem rectæ CF. Si verò prædictæ regulæ CD, GF ad reliquam partem ultra D & F indefinitè quoque intelligantur extenſæ, non minùs alia linea hyperbole huic oppoſita, eoſdem focos, axemque habens, deſcribetur.

Demonſtrandum itaque eſt ratione oſtenſâ ſtylum ε lineam quæſitam hyperbolen deſcribere, hoc eſt, cujus foci ſunt puncta C, F, vertex autem punctum E.

Jungatur enim CG.

Quoniam igitur triangula CDG, CFG duo latera CD, DG duobus lateribus GF, FC utrumque utrique æqualia habent, baſin verò CG communem: [a] habebunt quoque angulum DCG angulo CGF, ſub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. [b] Quia autem anguli DCG, GCε duobus rectis ſunt æquales, nec non anguli CGF, CGε; anguli autem DCG, CGF inter ſe æquales ſint oſtenſi: ſequitur quoque angulos GCε, CGε inter ſe æquales eſſe. Cum igitur trianguli CGε anguli GCε, CGε æquales inter ſe exiſtant, [c] erunt ſimiliter latera ſubtenſa Gε, Cε inter ſe æqualia. Major itaque erit εF quàm εC, rectâ GF; atque eſt quidem GF ex conſtructione axi EK æqualis: quocirca punctum ε erit in linea curva, hyperbole dicta, cujus foci ſunt puncta C & F, vertex autem punctum E, ut liquet ex converſa 51ma $Prop^{ne}$ 3^{tii} libri Conicorum Apollonii. Siquidem verò rectæ CD, GF versùs ε indefinitè ſe mutuò ſecare poſſunt, atque eadem ſemper ratio conſtat puncti interſectionis ε: manifeſtum eſt ejuſmodi motu quæſitæ lineæ hyperboles portionem in plano deſcribi. Quod erat faciendum.

a p 8 Primi Elem.
b p 13 Primi Elem.
c p 6 Primi Elem.

Simile in hunc modum inferre licet de alia linea hyperbole, huic oppoſita, verticem habente in K.

Infertur præterea, ſi biſariam ſecetur recta CG in H, rectam connectentem puncta H, ε, hyperbolen in ε contingere.

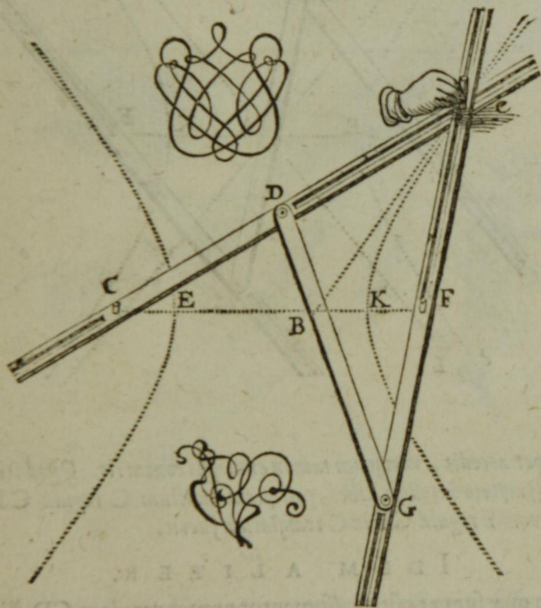
Æqualia enim ſunt latera HC, Cε trianguli HCε, lateribus HG, Gε trianguli HGε, & baſis Hε utrique triangulo communis eſt: [d] quamobrem & anguli HεC, HεG ſub æqualibus rectis lineis contenti inter ſe æquales ſunt; adeoque recta Hε hyperbolen contingens in puncto ε, per converſam 48^{vam} $Prop^{nem}$ libri 3^{tii} Conicorum Apollonii, ut proponebatur.

d p 8 Primi Elem.

SCHO-

SCHOLIVM.

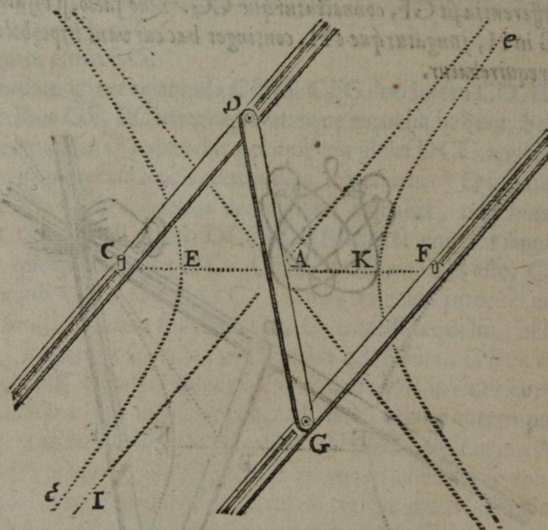
Perspicuum est, ex adducta methodo facilè rectam lineam duci posse, quæ curvam hyperboles tangat in dato quolibet puncto. Si enim in e, verbi gratiâ, ducenda sit tangens curvam hyperboles e E, agantur ab e ad C *&* F *rectæ* E C, E F; *auferaturque ex majori e* F *recta e* G *ipsi minori e* C *æqualis, ut differentia sit* GF, *connectaturque* CG. *Quo facto, si bifariam secetur* C G *in* H, *jungaturque e* H, *continget hæc curvam hyperboles e* E *in e, sicut requirebatur.*



Quod etiam in hunc modum fieri potest.

Agantur à puncto e *ad puncta* C, F *rectæ* e C, e F; *& ab* e C *quidem auferatur* C D *æqualis axi* E K; *e* F *verò tantundem producatur ad* G, *ut nimirum* GF *axi* EK *æqualis sit, ducaturque* D G, *secans* C F *in* B: *similiter enim ut ante, recta quæ à* B *ad* e *perducitur, hyperbolen in* e *continget.*

Notandum denique in hac methodo cùm regulæ CD, GF sunt parallelæ nec ullam interſectionem admittunt, qualem diximus: tum rectam IA, quæ per centrum A alteri ipſarum CD, GF æquidiſtans ducitur, eſſe alteram ex aſymptotis, ſeu quæ cum curvis dictarum hyperbolarum propiùs qui-

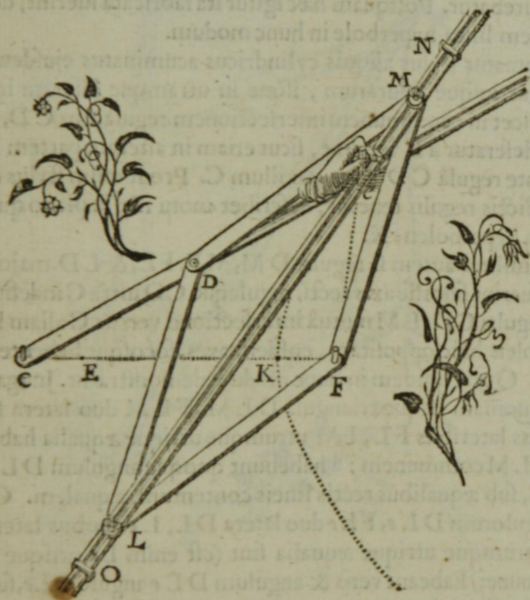


dem ſemper accedit, nunquam tamen cum ipſis concurrit. Quod itidem de altera aſymptoto intelligi debet, poſtquam punctum C regulæ CD in F, punctum verò F regulæ GF in C tranſlatum fuerit.

IDEM ALITER.

Iſdem quæ ſupra poſitis, aſſumantur præter regulam CD aliæ quatuor æquales DM, MF, FL, & LD, longitudinis cujuſlibet majoris quàm KF, (requiritur autem cum hyperbola ex numero ſit earum linearum, quæ in infinitum augentur, nec unquam fines ſuos committat; ut illa minor non exiſtat quàm ſemiſſis axis recti: aliàs enim ſemper non niſi ejus portio quædam deſcribetur); ipſæque cum extremitatibus ſibi invicem nectantur in formam rhombi, quadrativé DMFL.

DMFL. Ubi autem in D connexæ ſunt, annectantur & ſimul regulæ CD in puncto D; ubi verò in F ſibi invicem annectendæ ſunt, iiſdem locis perforentur, ut paxillo in F defixo injici poſſint, atque hâc ratione ſimul nexæ habeantur. Porrò quandoquidem per L & M regulam aliquam medio ſuo aſſiduè tranſire oportet, utrinque indefinitè extenſam: gemina in eum finem ſumatur regula utrinque indefinitè extenſa, perforenturque prædictæ regulæ in extremitatibus ſuis



L, M, ita ut paxillis injici queant, ejuſdem craſſitiei ac fiſſuræ regulæ CD. Conducet autem hoſce paxillos ſubtus fieri ex lamella, ſuperiuſque in cochleam extructos eſſe; ut non ſolùm hâc ratione connexioni quatuor dictarum regularum inſerviant, verùm etiam ut ſi præter his impoſitam regulam geminam alia adhuc lamella foramine pertuſa illis ſuperimponatur, dictæ regulæ omnes inter lamellas cochleâ contineantur. Quæ quidem ex accurata figurarum contempla-

tione perſpicuiora evadunt, quàm ut multis verbis explicentur. Cæterùm oportebit annulis duobus quadrangulis O, N regulam L M circumdare, qui arctè eam amplectentes propiùs aut remotiùs, ut opus exiget, amoveri valeant: quibus regula gemina ita dictos paxillos continere cogatur, ut velut hiulcata ſit ac in longitudinem fiſſuram præ ſe ferat latitudinis paris atque regulæ C D. Fiet enim ſemper, ut, ſi per medium fiſſuræ hujus regulæ utrinque indefinitè extenſæ recta linea ducatur, ipſa perpetuò tranſeat per puncta L, M, ſicuti requirebatur. Poſtquam hæc igitur ita fabricata fuerint, deſignabitur quidem linea hyperbole in hunc modum.

Sumatur ſtylus aliquis cylindricus acuminatus ejuſdem craſſitiei, quæ utriuſque fiſſurarum, iſque in utramque fiſſuram immittatur, videlicet in *e* communem interſectionem regularum C D, L M; ipſeque deferatur à K versùs *e*, ſicut etiam in alteram partem rectæ C F, rotante regulâ C D circa paxillum C. Prout enim ſtylus ejuſmodi à jam dictis regulis tenetur, deſcribet motu illo in plano quæſitam lineam hyperbolen *e* K.

Similiter autem ſi regulæ D M, M F, F L, & L D majores aſſumptæ fuerint ſemiſſe axis recti, regulaque C D ultra C indefinitè extenſa: regulæ C D, L M mutuâ interſectione versùs C aliam lineam hyperbolen huic oppoſitam, eoſdem axes, focoſque habentem, deſcribent. Quod quidem in hunc modum demonſtratur. Jungatur F*e*.

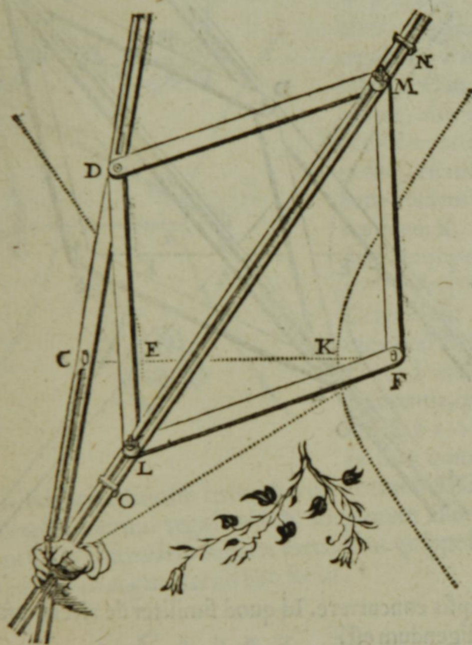
Quoniam itaque triangula D L M, F L M duo latera L D, D M duobus lateribus F L, F M utrumque utrique æqualia habent, baſin verò L M communem: [d] habebunt quoque angulum D L M angulo F L M, ſub æqualibus rectis lineis contentum, æqualem. Cum igitur triangulorum D L *e*, F L *e* duo latera D L, L *e* duobus lateribus F L, L *e* utrumque utrique æqualia ſint (eſt enim L*e* utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum D L *e* angulo F L *e*, ſub æqualibus lateribus contentum, æqualem, ut jam oſtenſum eſt: [e] habebunt quoque baſin D*e* baſi *e*F æqualem, angulumque D *e* L angulo L *e* F, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. Major itaque eſt C *e* quàm *e* F, ipsâ C D; eſt autem C D æqualis axi E K, ex conſtructione. Liquet ergo ex converſa 51ma Propne libri 3tii Conicorum Apollonii, punctum *e* eſſe in linea curva, hyperbole dicta; cujus foci ſunt puncta C & F; vertex autem punctum K. Quia verò rectæ C D, L M ita in infinitum ſe mutuò ſecare poſſunt, atque eadem ſemper ratio conſtat de puncto interſectionis *e*: manifeſtum eſt, ejuſmodi motu portio-

d p. 8 Primi Elem.

e p. 4 Primi Elem.

tionem lineæ hyperbolæ in plano deſcribi. Sicut faciendum proponebatur. Similis eſt ratio de alia hyperbola huic oppoſita, verticem habente in E.

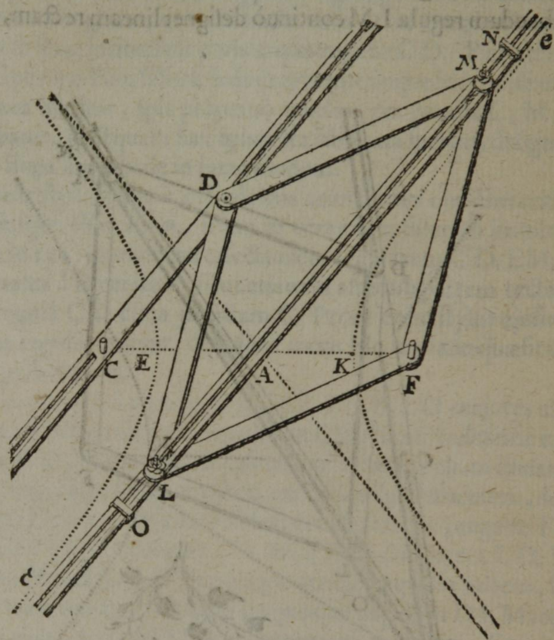
Speciale autem hic modus illud præ ſe fert advertendum, ut inter deſcribendum regula LM continuò deſignet lineam rectam, quæ hy-



berbolen in quocunque curvæ puncto contingat. Hoc enim liquet è converſa 48va Prop^{ne} libri 3^{tii} Conicorum Apollonii, propter æqualitatem angulorum C & L, L & F, quam modò demonſtravimus.

Notandum denique in hac methodo, cùm regulæ CD, LM ſunt parallelæ, ac nullam interſectionem admittunt, qualem diximus: regulam LM eo caſu alteram ex aſymptotis referre, id eſt, rectam lineam

lineam per medium ejus fissuræ ductam, propiùs quidem hinc inde cum curvis dictarum hyperbolarum semper accedere, nunquam ta-

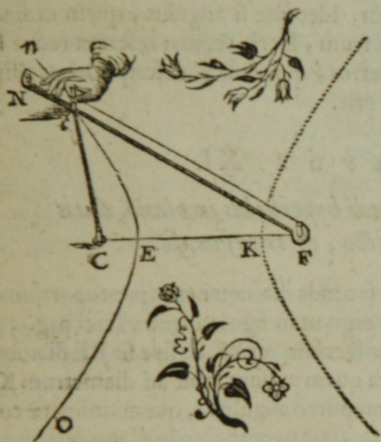


men cum ipsis concurrere. Id quod similiter de altera quoque asymptoto intelligendum est.

ALITER.

Quod autem propositum est licebit insuper aliâ ratione cum illustri viro Renato des Cartes in hunc modum exequi. Defixis in C & F duobus paxillis, capiatur filum C e N; illudque altero extremo, paxillo C annecte; altero verò extremo, extremitati N regulæ N F, ipsâ C F longioris; quæ prædictum filum, postquam ita nexum fuerit, longitudine superet, quantitate axis EK. Deinde perfore-

perforetur altera extremitas hujus regulæ, ut paxillo F injici queat, ac circa illum in plano rotari. Fiet enim, ut, immisso stylo eoque delato ab *n* extremo fili ad E, interea dum pars fili N ε velut agglutinata tenetur regulæ N F, rotanti circa F, quæsitæ lineæ hyperbolæ portio *n* ε E in plano describatur, hoc est, cujus foci sint C & F, vertex autem E. Translatâ verò regulâ ad alteram partem lineæ CF, eodem modo reliqua hyperbolæ portio E O designabitur. Quòd si autem regula ex F in C, & filum ex C in F transferantur, alia insuper hyperbolæ portio huic opposita describetur, habens eosdem focos, & verticem K. Quæ quidem, tum per conversã 51^{mam} Prop^{nem} 3^{tii} libri Conicorum Apollonii, tum quòd inter rectas C ε, ε F eadem semper differentia, quę inter C ε, ε N & F ε, ε N seu F N existit, manifesta sunt.



Denique si indefinitè lineam hanc ulteriùs versùs *n* & O describere lubet, oportebit tantùm regulam F N longiorem assumere, sicuti etiam filum C ε N tantundem augere: extendetur quippe hæc linea eò longiùs, quò major augmentatio hæc fuerit.

Caput X.

De modo describendi ellipses in plano, datis latere recto, & transverso.

Quoniam in ellipsi secunda diameter media proportionalis est inter latera figuræ, esto itaque ut in figura capitis tertii pag 314. latus rectum datum KQ, transversum verò KE; sive sit K E diameter ellipsis, K Q autem linea juxta quam possunt, quæ ordinatim ad dia-

metrum KE adplicantur. Detur præterea angulus *a*, quem ordinatæ constituere debent ad KE. Oporteatque ellipsin in plano describere.

Sectâ igitur bifariam diametro KE in A, inveniatur inter KQ & KE media proportionalis LI, eâque ordinatim adplicatâ ad KE in A, ita ut cum ea angulum faciat æqualem dato *a*: erit ipsa secunda diameter, priori KE conjungata. Quo facto, circa diametros KE, LI ellipsis describatur, quemadmodum capite quinto tradidimus, factumque erit quod quæritur. Ideoque si angulus, quem ordinatæ constituere debent ad diametrum, fuerit rectus; referent rectæ LI, KE axes seu extremas diametros, quo casu ad descriptionem ellipsis caput quartum sequendum erit.

CAPUT XI.

De modo describendi hyperbolas in plano, datis latere recto, & transverso.

SIquidem & in hyperbolâ secunda diameter media proportionalis est inter latera figuræ, sit ergo ut in figura capitis sexti pag. 332. latus rectum datum KQ, transversum verò KE; sive sit KE diameter hyperbolæ, & KQ linea juxta quam possunt, quæ ad diametrum KE ordinatim adplicantur. Detur porrò angulus *a*, quem ordinatæ constituere debent ad KE. Oporteatque hyperbolen in plano describere.

Divisâ itaque bifariam diametro KE in A, inveniatur inter KQ & KE media proportionalis LI, eâque ordinatim adplicatâ ad KE in A, ita ut cum ipsa angulum efficiat æqualem angulo dato *a*: erit ipsa secunda diameter, priori KE conjugata. Deinde datis diametris KE, LI, describatur hyperbole Kε, quemadmodum capite septimo traditum est, factumque erit, quod imperabatur.

Eodem modo describetur quoque hyperbola Eε priori Kε opposita, ut ex eodem capite est manifestum.

CAPUT XII.

De modo describendi hyperbolas in plano, per datum punctum, circa datas positione asymptotos.

CÆterùm cum frequentissimè occurrat hyperbole describenda in plano, circa datas positione asymptotos, quæ transeat per datum

tum punctum: visum quoque fuit modum subindicare, quo illud Organicè expediri possit.

Repetitâ itaque figurâ capitis sexti pag. 332, in eaque datis positione rectis lineis A D, A M, & puncto intra ipsas E, oporteat per E, circa asymptotos A D, A M, hyperbolen in plano describere.

Ducatur ex E alteri ipsarum AD, AM, puta AM, recta æquidistans EB, secans alteram AD in B; deinde assumptâ BD æquali AB, agatur D E, eaque producatur donec secet AM in M; junctâ autem EA, producatur hæc ipsa ad K, ut AK sit æqualis AE: & per punctum A ducatur ipsi D M æquidistans ac æqualis IL, quæ à KE bifariam secetur in A. His ita existentibus, si assumptis rectis KE, IL, ceu axibus, vel quibuscunque diametris conjugatis, per E, tanquam verticem, hyperbole describatur, quemadmodum capite 7mo ostensum fuit: factum erit quod imperabatur.

Sed jam tempus est, ut nonnulla quoque de parabola in medium afferamus, & de modis eam Organicè in plano describendi. Præmittimus itaque in demonstrationem eorum quæ sequuntur, sequens

L E M M A.

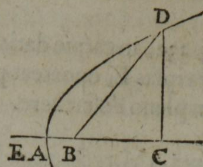
SIT parabole, cujus axis quidem A C, *vertex verò* A, *& à quopiam in sectione puncto D adplicetur ad* AC *recta ordinatim* D C. *Abscindatur autem ex axe ab* A *vertice linea* AB, *æqualis quartæ parti lateris recti, jungaturque* BD. *Dico hanc æqualem fore lineæ* E C, *quæ tum ex* E A *lateris recti quarta parte, tum ex AC componitur.*

a *Quoniam enim quadrata* A C, A B *simul sumpta æqualia sunt rectan-* a p 7 Secundi Elem.
gulo bis sub C A, A B *comprehenso, unà cum quadrato* B C: *erit quadra-*
tum B C *æquale quadratis* A C, A B, *dempto iisdem rectangulo bis*
sub C A, A B. *Cum autem* A B *ex hypothesi sit quarta pars lateris*
recti, b *erit quoque rectangulum sub* C A, A B *rectanguli quod* b p 1 Sexti Elem.
continetur sub C A *& latere recto parabolæ quarta pars; hoc est, re-*
ctangulum bis sub C A, A B *æquale erit semissi rectanguli, compre-*
hensi sub C A *& latere recto. Æquale igitur erit quadratum* B C

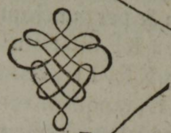
 qua-

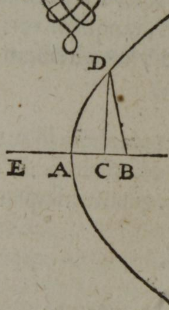
quadratis A C, A B, *minus semisse rectanguli sub* C A *& latere recto. Quocirca si utrobique commune addatur quadratum* C D, [c] *erit quadratum* B D *æquale quadratis* A C, A B, *minus semisse rectanguli sub* C A *& latere recto. At cum* [d] *quadratum* C D *æquale sit rectangulo sub* C A *& latere recto, quadrata* A C, A B, C D, *multata semisse rectanguli sub* C A *& latere recto, æquivalebunt quadratis* A C, A B *& semissi rectanguli sub* C A *& latere recto, hoc est, ei quod bis sub* C A, A E *continetur. E quibus sequitur quadratum* B D *æquale esse quadratis* C A, A B *seu* A E, *unà cum rectangulo sub* C A, A E *bis. Manifestum autem est,* [e] *quadrata* C A, A E, *unà cum rectangulo sub* C A, A E *bis, simul æquari quadrato totius* E C. *Quocirca æqualia erunt quadrata* B D, E C; *unde & rectæ* B D, E C. *Quod erat propositum.*

c p 47 Primi Elem.



d p 11 Primi Conicorum Apollonii.





e p 4 Secundi Elem.

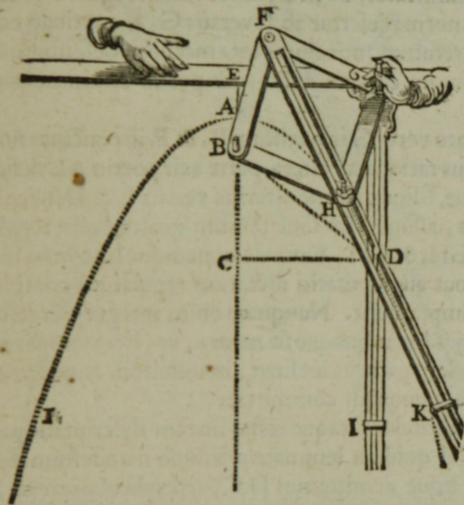
CAPUT XIII.

De modo describendi parabolas in plano, datis axe, vertice, & latere recto.

IN plano quocunque detur A C axis, vertexque punctum A, sit autem A B lateris recti quarta pars. Oporteatque in eodem plano lineam parabolen describere, cujus quidem axis sit recta A C, vertex punctum A, latus verò rectum linea recta ipsius A B quadrupla.

Producatur A C versùs A, donec A E ipsi A B sit æqualis; & ex E erigatur ad E C perpendicularis E G, eaque indefinitè utrinque protendatur. Deinde assumantur quatuor regulæ æquales BF, FG, GH, & HB, longitudinis cujuslibet; ita tamen ut illa non sit minor quàm

AB, ipsæque extremitatibus sibi invicem annectantur, sic ut rhombum, quadratumvé referant BFGH. Ubi autem in G connexæ sunt, connectantur & simul puncto G normæ GDI, qualis appositâ figurâ exhibetur, hoc est, quæ per medium secundùm longitudinem GI pertusa sit longâ canali seu fissurâ, desinente propè G, distantiam circiter rectæ AE, ipsaque versùs I indefinitè extensa intelligatur. Ubi verò in B sibi invicem sunt annectendæ, iisdem locis perforentur, ut paxillo in B defixo injici queant, atque hâc ratione connexæ existant.



Porrò cū per F & H regula medio suo assiduè transire requiratur annectatur illa puncto F, ubi regulæ BF, FG sibi mutuò sunt annexę, quę in longitudinem sit pertusa quemadmodum norma, hoc est, pari fissurâ; perforenturque regulæ BH, HG in H, sic ut in illas paxillus inseri queat ejusdem crassitiei atque latitudo alterutrius fissuræ, constans subtus ex lamella, superiùs verò in cochleam extructus; ita ut hâc ratione regulæ BH, HG in H sint connexæ, & regula FH, intùs dictum paxillum comprehendens, medio suo per F & H semper transire cogatur. Ut autem regulæ BH, HG, & FH in paxillum injectæ sic-

ſic eodem ſtatu conjunctæ perſeverent, ipſis alia lamella foramine pertuſâ imponatur, atque matre perſtringatur. Denique adhibeantur duo annuli quadranguli I & K, regulam FH normamque GD circundantes, ut eas arctè circumplectentes ubique eandem fiſſuræ latitudinem conſervent, & qui huc vel illuc divelli quoque poſſint, prout uſus exiget. His ita peractis, linea parabole in hunc modum deſcribetur.

Adjunctâ ipſi EG regulâ, aſſumatur ſtylus aliquis cylindricus ejuſdem craſſitiei cum latitudine utriuſque fiſſuræ, iſque in utramque fiſſuram immittatur, ut in D, ubi ſe ſecant regula FH & norma GI: dum enim norma defertur ab E versùs G, & continuò contra dictam regulam premitur, movebitur tota machina, deſcribetque hoc motu ſtylus D lineam curvam AD, quæ portio erit lineæ parabolæ quæſitæ.

Tranſlato verò G in paxillum B, & B in punctum normæ G, eâdem prorſus ratione ab altera parte axis portio AL deſignabitur.

Denique, ſi lineam hanc ulteriùs versùs L & D indefinitè delineare velimus, aſſumendæ ſunt tantùm quatuor aliæ regulæ longiores BF, FG, GH, & BH. Extendetur namque hæc linea indefinitè longiùs, prout augmentatio dictarum regularum continuò major ac major aſſumpta fuerit. Nunquam enim integra ipſa deſcribi poterit, cum ea hujus lineæ quoque ſit natura, ut, licèt ſemper magis magiſque ad eandem partem inclinet, in infinitum tamen protenſa extremitates ſuas nunquam committat.

Demonſtrandum itaque reſtat lineam deſcriptam parabolen exiſtere. Quod quidem lemmate præmiſſo manifeſtum fiet, ſi jungamus BD, atque demittamus DC perpendiculariter ad AC. Erunt enim triangulorum BFH, HFG duo latera HB, BF duobus lateribus HG, GF utrumque utrique æqualia, baſiſque FH utrique triangulo

a p 8 Primi Elem. communis: [a] quocirca & angulus BFH angulo HFG, ſub æqualibus rectis lineis contentus, æqualis erit. Igitur cum duo triangula DBF, DFG duo latera BF, FD duobus lateribus GF, FD utrumque utrique æqualia habeant (eſt enim FD latus utrique triangulo commune;) habeant verò & angulum BFD angulo DFG, ſub æqualibus la-

b p 4 Primi Elem. teribus contentum, æqualem, ut jam eſt oſtenſum: [b] habebunt quoque baſin BD baſi DG æqualem, angulumque BDF angulo FDG, ſub quibus æqualia latera ſubtenduntur. Quoniam autem CE ipſi DG eſt æqualis, erunt quoque BD, CE inter ſe æquales. Patet ergo

[c] pun-

ᵉ punctum D esse in curva linea parabole dicta, cujus axis est A C, vertex A, & latus rectum linea recta ipsius A B quadrupla. Cum autem adducto modo FH, G D se mutuò in infinitum secare possint, & eadem semper ratio de puncto intersectionis D constet: sequitur ejusmodi motu descriptam curvam LAD, esse lineam parabolā quæsitam. ᵉ 5 Lemma antecedent.

Præterire autem non oportet, quod hîc observatu dignum occurrit, regulam nempe F D K inter describendum medio suo tangere

continuò lineam parabolen in puncto D. Ostensum enim est, angulos BDF, FDG esse æquales. Quocirca cum ᵈ angulus F D G angulo IDK sit æqualis, quòd secundum verticem consistant: erit quoque angulus B D F angulo IDK æqualis, atque ita linea F D K parabolam contingens in D. Ut patet ex 41 Propⁿᵉ libri 9ⁿⁱ Perspectivæ Vitellionis. ᵈ 15 Primi Elem.

Cæterùm sciendum, B punctum Focum ab Opticis appellari solitum, eò quòd, si speculum concavum ad hanc figuram expolitum Soli opponatur, radii speculo incidentes axi paralleli, omnes ad hoc unicum punctum B reflectantur; atque ita à superficie talium speculorum ignem in B accendi.

SCHO-

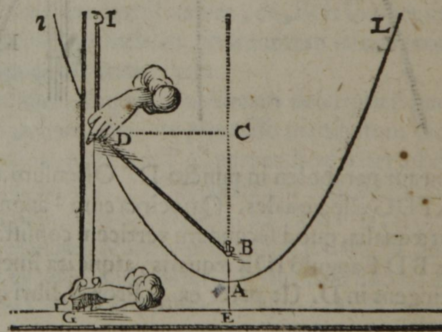
SCHOLIVM.

Liquet porrò ex allatis, nullâ operâ rectam lineam duci posse, quæ curvam paraboles in dato quolibet puncto contingat. Si enim in D, exempli gratiâ, ejusmodi tangens ducenda foret, agatur per D recta DG axi AC parallela, jungaturque BD. Quo facto, si bifariam secetur angulus BDG rectâ DF, continget hæc parabolam in D, ut requiritur.

CAPUT XIV.

De modo describendi parabolas in plano, dato foco, & vertice.

NON ignorabit quisquam (ut opinor) præcedentem modum, quo datis axe, vertice, & latere recto, parabola in plano designatur, etiam & hîc locum obtinere, ubi focus & vertex datus est: cum ad constructionem focus reverà ibidem esset inveniendus, qui hîc jam datur. Quocirca non è re me facturum existimo, si ad quæsitum perficiendum alium insuper modum afferam, qui beneficio fit alicujus fili. Et talis est.



Detur in plano quocunque focus punctum B, vertex autem punctum A. Oporteatque in eodem plano lineam parabolen describere, ut diximus.

Junctâ

Junctâ A B, ipsâque eatenus ultra A productâ ad E, erigatur ex E ad eam perpendicularis E G. Deinde defixo paxillo in B, capiatur filum I D B; illudque cum una extremitate annecte paxillo B; cum altera verò extremitati I normæ I G, quæ quidem filo sic nexo longitudine sit æqualis. Oportet autem eam ipsâ EB majorem assumi. Ut itaque propositum exsequamur, adjungatur ipsi GE regula utrobique indefinitè extensa; feraturque norma I G contra regulam à G versùs E. Fiet enim, ut, dum norma ita movetur, ac stylus immissus, qui tenet assiduè partem fili I D velut agglutinatam normæ & ab *i* extremo fili ad A deducitur, idem stylus quæsitæ lineæ parabolæ portionem *i* D A in plano describat: hoc est, cujus focus sit datum punctum B, vertex autem A. Cæterùm pari ratione à parte reliquâ portio A L designabitur. Cujus quidem rei demonstratio ex præmisso lemmate perspicua est.

Nam cum æquales sint regula IG & filum I D B; ideo si ab his æqualibus communis auferatur ID: erunt quoque reliquæ G D, DB æquales. Est autem GD ipsi E C æqualis. Erit igitur & DB ipsi EC æqualis, adeoque punctum D in parabola, cujus focus B, & vertex A. Ut ex conversa lemmatis antecedentis colligere licet,

Quoniam verò circa ostensum modum eadem ubique ratio est puncti D: sequitur ejusmodi motu lineam descriptam *i*DAL esse parabolam, qualem in plano describere oportebat.

Denique si placuerit hanc lineam ulteriùs extendere versùs *i* & L, oportet tantùm æqualiter augere normam & filum: quandoquidem illa indefinitè longiùs extenditur, prout hæc augmentatio semper major ac major assumitur.

SCHOLIUM.

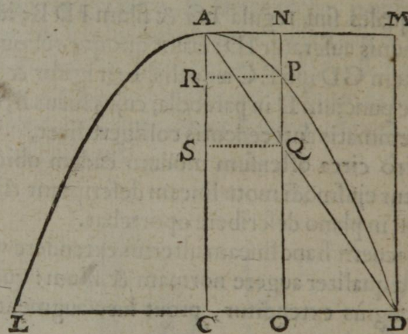
Siquidem hactenus ostendimus varios modos Conicas Sectiones Organicè in plano describendi: simulque etiam quo pacto in singulis rectæ lineæ duci possint, quæ easdem in datis punctis contingant: ac porrò etiam relationem, quam inter se habent superficies ellipsis ac cujuslibet ejus segmenti & superficies circuli ejusque segmenti; ut & eam, quam inter se habent figura contenta sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ cujuscunque & alia similiter sub recta linea & portione lineæ hyperbolæ contenta, cujus latus rectum & transversum sunt æqualia (quæ meo judicio illa sunt, quæ de earum superficie à nobis tantummodo cognosci possunt) : Restat ut coronidis loco hîc ultra

ultra subjungamus relationem, quam inter se habent figura rectilinea & alia, sub recta linea & portione lineæ parabolæ cujuscunque comprehensa. Quæ quidem sola inter Conicas Sectiones hactenus ad quadrati formam reduci potuit, & ab Archimede primùm fuit ostensa. Aliam verò à nobis inventam sic accipe.

Præmittimus autem sequentia Theoremata demonstrata, quoniam iis ad institutum omnino indigebimus.

I.

Si in figura, contenta sub recta linea L D & portione lineæ parabolæ L A D, diameter sit A C, & basis L C D ipsi A C ordinatim adplicata, jungaturque A D; compleatur



autem parallelogrammum C M, in quo ductâ N O ipsi A C vel D M utcunque parallelâ, occurrente ipsis A M, C D in N & O, atque secante A D in Q, lineam verò parabolæ in P: dico esse O N ad Q N, sicut Q N ad N P.

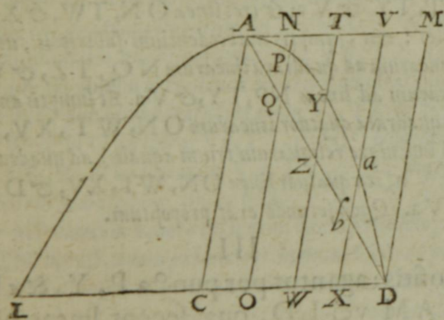
Hoc enim perspicuum est, cum A C *sit ad* A S, *ut* C D *ad* S Q *seu* R P; A C *autem ad* A R, *ut quadratum* C D *ad quadratum* R P, *per* 20^mam^ *Prop^nem^ libri* 1^mi^ *Conicorum Apollonii. Unde liquet* A C, A S, *&* A R *esse proportionales, & esse quidem* A C *seu* N O *ad* A S *sive* N Q, *ut* A S *sive* N Q *ad* A R *seu* N P. *Ut proponebatur.*

II. Iis-

II.

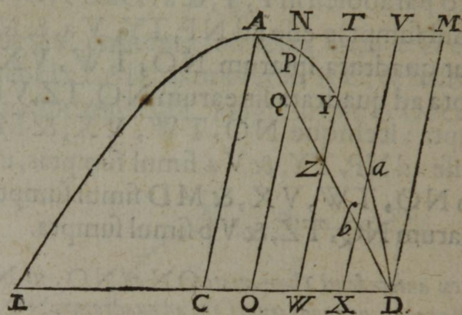
Iisdem positis, si dividatur A M in partes quotcunque æquales, atque ex punctis divisionum N, T, & V ad latus oppositum C D rectæ ducantur NO, TW, & VX parallelæ ipsi AC vel DM, quæ rectam AD secent in Q, Z, & b, lineam verò parabolen in P, Y, & a: Dico NO, TW, VX, & MD simul sumptas esse ad NP, TY, V a, & MD simul sumptas, ut quadrata ipsarum NO, TW, VX, & MD simul sumpta ad quadrata linearum NQ, TZ, V b, & MD simul sumpta: itemque NO, TW, VX, & MD simul sumptas esse ad NP, TY, & V a simul sumptas, ut quadrata ipsarum NO, TW, VX, & MD simul sumpta ad quadrata linearum NQ, TZ, & V b simul sumpta.

Est enim ex antecedenti Theoremate ON *ad* NQ, *ut* NQ *ad* NP. *Quocirca erit quoque, ut quadratum* ON *ad quadratum* NQ, *ita* ON *ad* NP. *Eodem modo cum sit* WT *ad* TZ, *ut* TZ *ad* TY: *erit etiam quadratum* WT *ad quadratum* TZ, *ut* WT *ad* TY. *Itemque quia* XV *est ad*



V b, *sicut* V b *ad* V a: *erit similiter quadratum* XV *ad quadratum* V b, *ut* XV *ad* V a. *Omnia igitur quadrata* ON, WT, XV *erunt ad omnia quadrata* NQ, TZ, V b, *ut omnes lineæ* ON, WT, XV *ad omnes lineas*

NP, TY, V a. *Denique cum & D M ad M D sit, ut D M ad MD; erit itidem quadratum DM ad quadratum MD, ut DM ad MD. Vnde omnia quadrata* ON, WT, X V, *&* D M *erunt ad omnia quadrata* N Q, T Z, V b, *&* MD, *sicut omnes lineæ* ON, WT, XV, *&* D M *ad omnes lineas* NP, TY, V a, *&* MD. *Quod primò erat propositum.*



Iam verò cum ostensum sit quadrata simul O N, W T, *&* X V *esse ad quadrata simul* N Q, TZ, *&* V b, *ut lineæ simul* O N, W T, *&* X V *ad lineas simul* NP, TY, *&* V a; *& tres lineæ* O N, TW, *&* X V *sibi invicem sint æquales: erit, sumptis antecedentium subtriplis, ut quadratum unius harum linearum ad quadrata linearum* N Q, T Z, *&* V b, *ita una earundem linearum ad lineas* NP, TY, *&* V a. *Et sumptis antecedentium quadruplis, ut quadrata quatuor linearum* O N, W T, X V, *&* D M *(est enim &* D M *unicuique reliquarum trium æqualis) ad quadrata linearum* NQ, T Z, *&* V b, *ita quatuor lineæ* ON, WT, XV, *&* D M *ad lineas* NP, TY, *&* V a. *Quod secundò erat propositum.*

III.

Iisdem positis: agantur per puncta P, Y, & *a* lineæ parallelæ ipsi A M vel L D, quæ secent lineas his punctis utrinque proximas in *c*, *d*, *e*, *f*, *g*, & *h*. Dico parallelogrammum C M esse quidem parallelogrammis *c* N, *e* T, *g* V, & X M minus quàm triplum, parallelogrammis verò PT, YV, & *a* M majus quàm triplum.

Cum enim lineæ MD, V*b*, TZ, *&* NQ *se invicem æqualiter excedant, excessus verò sit æqualis minimæ* NQ, *& aliæ totidem existant* MD, VX, TW, *&* NO, *quæ magnitudine maximæ* MD *sint æquales: erunt, per* 10. *Prop. tractatus Archimedis de Lineis Spiralibus, quadrata* MD, VX, TW, *&* NO *harum æqualium linearum unà cum quadrato maximæ* MD *ac simul rectangulo, comprehenso sub minima* NQ *& linea æquali inæqualibus simul sumptis, tripla quadratorum earundem inæqualium linearum* MD, V*b*, TZ, *&* NQ. *Unde sequitur quadrata linearum* MD, VX, TW, *&* NO *minora esse quàm tripla quadratorum à lineis* MD, V*b*, TZ, *&* NQ. *Quia autem ex proximè antecedenti Theoremate constat, quadrata* MD, VX, TW, *&* NO *ad quadrata* MD, V*b*, TZ, *&* NQ *eam habere rationem, quàm habent lineæ* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* MD, V*a*, TY, *&* NP: *sequitur item lineas* MD, VX, TW, *&* NO *linearum* MD, V*a*, TY, *&* NP *minores esse quàm triplas. Manifestum autem est, lineas* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* MD, V*a*, TY, *&* NP *eandem habere rationem, quàm parallelogramma* XM, WV, OT, CN, *hoc est, quàm parallelogrammum* CM, *ad parallelogramma* XM, *g* V, *e* T, *& c* N. *Quare constat parallelogrammum* CM *minus esse quàm triplum parallelogrammorum* XM, *g* V, *e* T, *& c* N.

Dico verò idem parallelogrammum parallelogrammorum a M, YV, *&* PT *majus esse triplo.*

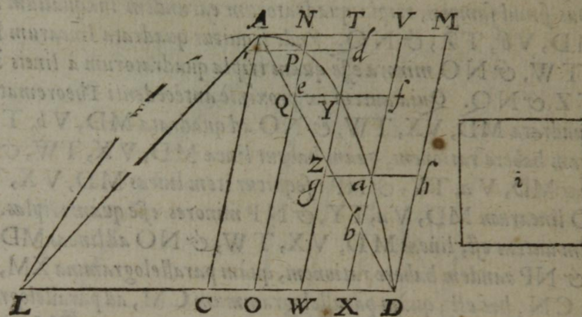
Quoniam enim ex demonstratione citatæ Propositionis Archimedis perspicuum quoque est, quadrata linearum MD, VX, TW, *&* NO *simul sumpta majora esse triplo quadratorum à lineis* V*b*, TZ, *&* NQ, *simul sumptorũ; &, per proximum præcedens Theorema, quadrata linearum* MD, VX, TW, *&* NO *sint ad quadrata linearum* V*b*, TZ, *&* NQ, *sicut lineæ* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* V*a*, TY, *&* NP: *sequitur quoque lineas* MD, VX, TW, *&* NO *linearum* V*a*, TY, *&* NP *majores esse quàm triplas. Est autem manifestum, lineas* MD, VX, TW, *&* NO *ad lineas* V*a*, TY, *&* NP *eandem habere rationem, quàm parallelogramma* XM, WV, OT, CN, *hoc est, quàm parallelogrammum* CM, *ad parallelogramma a*M, YV, PT. *Constat itaque parallelogrammum* CM *parallelogrammorum a*M, YV, *&* PT *majus esse quàm triplum. Quare constat propositum.*

IV.

Iisdem positis: sit spatium *i* parallelogrammi CM tertia pars. Dico jam spatium, comprehensum à rectis AM, MD, & portione lineæ parabolæ AD, spatio *i* æquale esse.

Si enim ſpatium illud ſpatio i non fuerit æquale, erit majus eo aut minus.

Eſto primùm majus, ſi fieri poſſit, & exceſſus, quo ſpatium hoc ſuperat ſpatium i, ſibi ipſi toties aggregetur, donec compoſitum ex ipſo excedat tandem parallelogrammum CM. *Poteſt itaque & ſumi ſpatium quoddam minus*



nus illo exceſſu, quod ſit pars parallelogrammi CM. *Sit ergo* CN *parallelogrammum dicto exceſſu minus, & pars parallelogrammi* CM. *Erit quoque inde linea* AN *pars lineæ* AM. *Dividatur itaque* AM *in partes ipſi* AN *æquales, & reliqua fiant ut in ſuperioribus dictum eſt.*

Igitur cum parallelogrammum CN *ſit minus exceſſu, quo ſpatium* APY*a*DM *ſuperat ſpatium i: ſequitur ſpatium i & parallelogrammum* CN *ſimul ſumpta ſpatio* APY*a*DM *eſſe minora: ac proinde minora quàm parallelogramma c*N, *e*T, *g*V, & XM, *quæ ipſo ſpatio* APY*a*DM *ſunt majora. Parallelogrammo autem* CN *æqualia ſunt parallelogramma c*N, *ed, gf, &* X*h*, *per quæ parabola incedit. Quare ſi utrobique demantur parallelogramma c*N, *ed, gf, &* X*h*: *relinquetur quoque ſpatium i minus parallelogrammis reliquis* PT, YV, *& a*M. *Cumque parallelogrammum* CM *ſpatii i ſit triplum, erit parallelogrammum* CM *minus quàm triplum parallelogrammorum* PT, YV, *& a*M. *At hoc eſt impoſſibile, oſtenſum enim eſt ipſis majus quàm triplum exiſtere. Non erit igitur ſpatium* APY*a*DM *majus ſpatio i.*

Dico item neque minus eſſe poſſe.

Sit enim minus, ſi fieri poteſt. Rurſuſque exceſſus quo ſpatium i ſuperat

APY

APY a DM *sibi ipsi toties addatur, donec superet tandem parallelogrammum* CM. *Potest itaque sumi spatium aliquod, quod sit minus illo excessu, quodque sit pars parallelogrammi* CM, *reliquis ut prius dispositis.*

Quoniam igitur parallelogrammum CN *minus est excessu, quo spatium* i *superat spatium* APY a DM: *erunt spatium* APY a DM *& parallelogrammum* CN *simul sumpta minora spatio* i. *Est autem ipsum* i *spatium minus parallelogrammis* c N, e T, g V, *&* XM. *Parallelogrammum enim* CM *spatii* i *est triplum, minus autem quàm triplum parallelogrammorum prædictorum, uti ostensum est. Igitur spatium* APY a DM *& parallelogrammum* CN *simul sunt minora parallelogrammis* c N, e T, g V, *&* XM. *Quocirca spatio* APY a DM *utrinque ablato: erit quoque reliquum parallelogrammum* CN *reliquis spatiis* A c P, P e Y, Y g a, *&* a Y D *minus. Quod fieri non potest. Patet enim parallelogrammum* CN *parallelogrammis* c N, e d, g f, *&* X h *esse æquale, quæ simul dictis spatiis sunt majora. Non erit igitur quoque spatium* APY a DM *spatio* i *minus. Ostensum autem est, & neque eo majus esse posse. Spatium itaque* APY a DM *spatio* i *necessariò erit æquale. Quod erat propositum.*

V.

Hoc autem demonstrato, manifestum est spacium quodcunque, comprehensum sub recta linea & portione lineæ parabolæ, esse sesquitertium trianguli, eandem basin & altitudinem cum ipso spatio habentis.

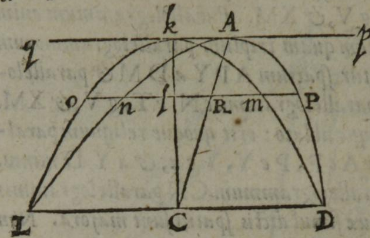
Perspicuum enim hoc est, si ducamus rectam LA.

Patet namque triangulum LAD *parallelogrammo* CM *æquale esse. Ideoque qualium partium triangulum* LAD *continebit tres, talium spacium* APY a DM *erit una, & spacium* APY a DC *duæ, spatium vero* LAPY-a D *quatuor. Sesquitertium itaque existit spatium* LAPY a D (*comprehensum sub recta linea* LD *& portione lineæ parabolæ* LAPY a D) *trianguli* LAD, *eandem cum ipso basin, eandemque altitudinem habentis. Quod ostendere propositum erat.*

Denique licet hæc ubique vera sint ac locum habeant tam in hujusmodi figuris scalenis quàm in rectis; attamen quia similiter Quadrationem hanc concludere decrevimus atque in ellipsi & hyperbola factum fuit: placuit hîc porrò subjicere, quibus figuris rectis, sub recta linea & portione lineæ parabolæ comprehensis, æquentur hujusmodi figuræ scalenæ, sub recta pariter linea & portione lineæ parabolæ comprehensæ.

Sit

Sit itaque talis figura ſcalena L A D, *contenta ſub recta linea* L D *&* *portione lineæ parabolæ* L A D, *cujus diameter ſit* C A, *latus verò rectum* A p: *& ex* A *ducatur* A k *parallela* L D; *tum verò ex* C *ad* L D *erigatur perpendicularis* C k, *ſecans* A k *in* k: *atque circa puncta* L, k, D *linea parabole in plano deſcribatur. Dico figuram ſcalenam* L A D *figuræ rectæ* L k D *eſſe æqualem.*



Vt autem per puncta L k D *in plano portio lineæ parabolæ deſcribatur, adplicetur quadratum rectæ* L C *vel* C D *ad longitudinem* k C, *ſitque latitudo ortiva recta* k q; *ſive quod idem eſt, inveniatur ipſis* k C, C D *tertia proportionalis* k q. *Referet enim ea juxta* 11. *Prop. libri* 1mi *Conicorum Apollonii latus rectum parabolæ, cujus axis eſt* k C, *vertex* k, *& ordinatim adplicata* C D. *Vnde porrò facile eſt, per caput ultimum hujus tractatus, ejuſmodi lineæ portionem deſcribere.*

Ducatur jam ipſi L D *recta utcunque æquidiſtans* P R l o; *ſecans quidem parabolam* L A D *in* P *& n, ac diametrum ejus* C A *in* R; *parabolam verò* L k D *in m & o, ac axem ejus* C k *in l.*

His ita conſtitutis, dico rectas n P, *o m inter ſe æquales eſſe.*

Quoniam enim ob rectam C D, *in utraque figura ordinatam; in parabola quidem* L A D [a] *rectangulum ſub* C A *& latere recto* A p *quadrato ipſius* C D *eſt æquale; in parabola verò* L k D [b] *rectangulum ſub* C k *& latere recto* k q *eidem etiam quadrato* C D *eſt æquale: ſequitur rectangulum ſub* C A, A p *rectangulo ſub* C k, k q *eſſe æquale.* [c] *Vnde erit ut* C A *ad* C k, *ita* k q *ad* A p. *Vt autem* C A *ad* C k, [d] *ita quoque eſt (ob parallelas* R l, A k) *recta* C R *ad* C l, [e] *& reliqua* R A *ad reliquam* l k. [f] *Erit itaque ut* R A *ad* l k, *ita* k q *ad* A p. [g] *Æquale igitur eſt rectangulum* R A p *rectangulo* l k q. *Eſt autem in parabola* L A D [h] *rectangulũ* R A p *æquale quadrato* R p; *in parabola verò* L k D *rectangulum* l k q *æquale quadrato* l m. *Æqualia ergo quoque erunt quadrata* R P, l m, *ac proinde & ipſæ rectæ* R P, l m, *unde & earũ duplæ* n P, o m.

a p 11 Primi Conicorum Apollonii.
b Ex conſtructione.
c p 16 Sexti Elem.
d p 4 Sexti Elem.
e p 19 Quinti Elem.
f p 11 Quinti Elem.
g p 16 Sexti Elem.
h p 11 Primi Conicorum Apollonii.

Eadem eſt ratio de omnibus aliis rectis, quæ ordinatim in infinitum ad diametros C A, C k *in utraque figura adplicantur.*

Quia itaque ejuſmodi æqualitas in infinitum apparet in utraque figura, relinquitur ipſas inter ſe æquales eſſe. Quod oſtendere propoſitum erat.

FINIS.

FRAN-

369

FRANCISCI à SCHOOTEN
LEYDENSIS
In Academia Lugduno-Batava Matheseos Professoris,

EXERCITATIONUM MATHEMATICARUM,
LIBER V.

CONTINENS
Sectiones triginta miscellaneas.



LUGD. BATAV.
Ex Officina JOHANNIS ELSEVIRII,
Academiæ Typographi.
CIↃ IↃC LVII.



Clarissimo, Consultissimoque

VIRO,

D^no^ IOHANNI WALBEECK,

JC^to^ eximio, atque in curia Hollandiæ causarum patrono disertissimo.

FRANCISCUS à SCHOOTEN

S. D.



CUM singulari benevolentiâ atque humanitate, Vir Doctissime, semper me exceperis ac prosequutus sis, & amicitiam, quę mihi à teneris tecum intercessit, plurimis beneficiorum argumentis sæpius obsignare studueris: nil magis mihi in votis fuit, quàm ut iisdem publicâ grati animi testificatione responderem. Permitte igitur, quæso, ut tractatum hunc, qui elegantiorum ac selectiorum quarundam propositionum quasi spicilegium est, tuo nomini inscribam, atq; in perpetuæ amicitiæ tesseram tibi offeram dedicemque. Quem utique non ingratum tibi fore confido, gnarus scilicet, quo loco apud te sint Mathematicæ scientiæ; qui illas etiamnum haud minori voluptate recolere, quàm antehac summa cum alacritate

tractare consuevisti, variaque earum munera non exiguâ cum laude obiisti. Etenim nosti, Vir Consultissime, quantùm ipsæ ad ingenii cultum faciant, & quantopere mentes, nimium luxuriantes, frænent, ne quid fucatum aut præter rei veritatem admittant; adeò ut ultra earum dignitatem, quam maximâ cum utilitate conjunctam habent, etiam plurimum subsidii conferant ad reliqua studia faciliùs capessenda, quæ uberiorem quæstum amplosque honorum titulos pollicentur, ideoque à vulgo magis probantur. Unde fit, ut minimè dubitem, quin ingenii tui acumen & singularem prudentiam, quam in te suspicio, ac in rerum causis discutiendis omnes quotidie in foro experiuntur, non minùs tibi ex harum artium cultura, quàm ex cæteris tuis studiis ritè pertractatis, comparaveris. Hinc, quotiescunque te causas magno cum applausu perorantem audivi, toties quoque non infeliciter te juris peritiam cum accurata Mathematum cognitione conjunxisse judicavi; unde & tuam in dicendo dexteritatem, & eruditionem in justa legum interpretatione sæpissimè sum admiratus. Neque me seducit hîc singularis meus erga te amor: testes enim mihi sunt complures civitates, quæ mentis tuæ præstantiâ allectæ, limatissimumque tuum judicium sæpiùs expertæ, causarum suarum patronum te disertissimum simulac eruditissimum jure merito elegêre. Quamobrem si exactissimo tuo calculo probari hæc intelligam, nullibi meliùs operam hanc meam collocari potuisse arbitrabor. Accipe igitur, Vir Amicissime, exercitationes hasce, quas tanquam ἐπίμετρον præcedentibus addo, & nunc sub nominis tui auspiciis in lucem edo. Quòd, si verò eo animo, quo à me offeruntur, eas exceperis, laboris suscepti præmium sat amplum reportasse me existimabo. Vale, ac me amare perge.

SECTIONES MISCELLANEÆ.

SECTIO I.

Ratio inveniendi electiones omnes, quæ fieri possunt, datâ multitudine rerum.



Atio inveniendi electiones omnes, quæ circa propositam rerum multitudinem fieri possunt, haud multùm aliena est à modo inveniendi dati cujusque numeri aut quantitatis partes omnes aliquotas & divisores, quem alibi exposuimus.

Etenim si, verbi gratiâ, quatuor fuerint res diversæ, designatæ per *a,b,c,* & *d*, ut inveniantur electiones omnes, quæ fieri possunt, prout ipsæ aliter atque aliter sumuntur, multiplico *a* per *b*, & fit *ab*. Tum *a,b,* & *ab* per *c*, fiuntq; *ac,bc,* & *abc*. Ac deinde *a,b,ab,c,ac,bc,* & *abc* per *d*, fiuntque *ad, bd, abd, cd, acd, bcd,* & *abcd*. Omnino ut hîc infra videre licet.

Et invenitur electio, si summa omnium sub ipsa comprehendatur, fieri posse 15 modis diversis,

Utpote, sumendo,

	1mo.	*a*
a	2.	*b*
b. ab	3.	*a* & *b* simul
c. ac. bc. abc	4.	*c*
d. ad. bd. abd. cd. acd. bcd. abcd.	5.	*a* & *c* simul
	6.	*b* & *c* simul
	7.	*a, b,* & *c* simul.
	8.	*d*
	9.	*a* & *d* simul
	10.	*b* & *d* simul
	11.	*a, b,* & *d* simul
	12.	*c* & *d* simul
	13.	*a, c,* & *d* simul
	14.	*b, c,* & *d* simul
	15.	*a, b, c,* & *d* omnes simul.

Hinc si per *a* designetur unũ malum, per *b* unum pirum, per *c* unum prunum, & per *d* unum cerasum, & ipsa aliter atque aliter, ut supra, eligantur, electio eorum fieri poterit 15 diversis modis, ut sequitur.

Nimirum, ſumendo 1mo. malum

2. pirum.

3. malum, & pirum

4. prunum

5. malum, & prunum

6. pirum, & prunum

7. malum, pirum, & prunum

8. ceraſum

9. malum, & ceraſum

10. pirum, & ceraſum

11. malum, pirum, & ceraſum

12. prunum, & ceraſum

13. malum, prunum, & ceraſum

14. pirum, prunum, & ceraſum

15. malum, pirum, prunum, & ceraſum.

Ubi porrò notandum, quòd, cum ſupra inventarum electionum ſequens regula duplo ſemper plures electiones contineat quàm proximè præcedens, ad ſolam earum ſummam inveniendam, ſufficiat addere quatuor terminos proportionales 1, 2, 4, & 8: erit enim 15, eorum ſumma, numerus electionum quæſitus.

Sic ſi 5 fuerint res diverſæ, utputa: *a*, *b*, *c*, *d*, & *e*, quæraturque quot modis diverſis earundem electio fieri poſſit, addendi tantùm ſunt 5 proportionales 1, 2, 4, 8, & 16: eritque ſumma 31, quæſita electionum ſumma. Quæ quidem, ut ſupra, inventæ, ſic exhibentur.

a.

b. ab.

c. ac. bc. abc.

d. ad. bd. abd. cd. acd. bcd. abcd.

e. ae. be. abe. ce. ace. bce. abce. de. ade. bde. abde. cde. acde. bcde. abcde.

Præterea advertendum hîc eſt, rebus omnibus diverſis exiſtentibus, in unaquaque ſequentium regularum ſemper unam ampliùs inveniri electionem quàm in antecedentibus omnibus regulis ſimul. Sic *b* & *ab* unâ plures ſunt numero quàm *a*. Et *c*, *ac*, *bc*, & *abc* unà plures quàm *a*, *b*, & *a b* ſimul. Itemque *d*, *ad*, *b d*, *a b d*, *cd*, *a c d*, *b c d*, & *abcd* unâ plures quàm *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, & *a b c*. Atque ita ulteriùs.

Id quod oſtendit, in Progreſſione Geometrica rationis duplæ ab uni-

unitate, terminos omnes antecedentes simul additos semper esse unitate minores termino subsequente. Adeoque si ultimo termino addatur duntaxat numerus, qui eo unitate minor sit, habebitur summa omnium terminorum. Quam etiam obtinere licet, ponendo binarium toties, quot sunt termini seu res diversæ, atque à numero continuè ab eo facto auferendo unitatem.

Ex quibus denique inferre ac notare licet, rerum diversarum multitudine deinceps unitate excrescente, differentias, quibus electionum numeri consequenter se mutuò excipiunt, numeros semper esse progressionis duplæ ab unitate: Itemque sequentium electionum numerum semper unitate majorem esse duplo proximè præcedentis. Sicut hic infra apparet.

Res datæ.	Multitudo electionum	Differentiæ electionum.
a .	1	
ab .	3	2
abc .	7	4
abcd .	15	8
abcde .	31	16
abcdef .	63	32
abcdefg .	127	64
abcdefgh .	255	128
abcdefghi .	511	256
abcdefghik .	1023	512

Et sic in infinitum.

Cum autem hæc, quæ de electionibus earumque numero dicta sunt, ad partes quoque aliquotas & divisores dati numeri aut quantitatis referri possint, (quoniam ratio illas investigandi à modo inveniendi electiones, ut supra monuimus, parùm differt): Idcirco, ad id ostendendum, propositum sit quantitatis *abcd*, productæ multiplicatione ipsarum *a*, *b*, *c*, & *d*, invenire partes omnes aliquotas & divisores.

Hinc inventis, ut supra, harum *a*, *b*, *c*, *d* electionibus omnibus, videlicet *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & *abcd*, si in locum ultimæ *abcd*, quæ semper est data seu tota quantitas, non autem ejus pars aliquota, assumatur unitas, referent *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & 1 partes omnes aliquotas ipsius *abcd*. Adeò ut semper tot sint partes, quot electiones. Quantùm verò ad divisores, cum unaquæque quantitas se ipsam quoque per unitatem divi-
dat:

dat: manifeſtum eſt diviſorum numerum unitate ſemper excedere electionum ſive partium multitudinem, ita ut ipſius *abcd* diviſores ſint 1, *a*, *b*, *ab*, *c*, *ac*, *bc*, *abc*, *d*, *ad*, *bd*, *abd*, *cd*, *acd*, *bcd*, & *abcd*.

Quocirca ſi ſolummodò partium vel diviſorum numerum invenire animus ſit, illas autem ipſas exhibere ſupervacaneum fuerit, oportet tantùm terminos progreſſionis 1. 2. 4. 8, ut ſupra, addere, & fit ſumma 15. Hæc enim cum tam electionum quàm partium multitudinem deſignet, deſignabit 16 diviſorum numerum.

Idem de numeris eſt intelligendum. Ut ad inveniendam tam diviſorum quàm partium multitudinem numeri 210, quoniam 210 provenit multiplicatione quatuor primorum numerorum 2, 3, 5, & 7; ſive 210 dividendo per 2, ac tum qui fit per 3, ac quotiens rurſus per 5, ac denuo hic ultimus per 7, ſic pervenitur ad unitatem: manifeſtum eſt, ſi quatuor hi numeri tanquam res diverſæ accipiantur, multitudinem electionum, quæ ab ipſis ſemper aliter atque aliter fieri poſſunt, fore 15. Ac proinde 210 habere 15 partes aliquotas, & 16 diviſores, quos ex adjuncta operatione facilè colliges.

1
210 | 105 | 35 | 7 | 1
2 | 3 | 5 | 7 |

2

3 . 6

5 . 10 . 15 . 30

7 . 14 . 21 . 42 . 35 . 70 . 105 . 210. Atque ita de aliis.

Porrò cum in omnibus hiſce electionibus rerum, illæ quæ per *a*, *b*, *c*, *d*, &c. deſignantur, continuò ſemel tantùm ita ſimplices occurrant, reliquæ autem electiones ex iis ſemper ſint compoſitæ: patet, ſi à numero electionum auferatur numerus rerum, reliquum indicare quot modis ipſæ aliter atque aliter poſſint conjungi.

Sic *a*, *b*, *c*, & *d* modis omnibus, quos excogitare licet, conjungentur 11cies, hoc eſt, 11 modis differentibus. Sic & ipſarum *a*, *b*, *c*, *d*, & *e* numerus conjunctionum, omnifariam ſumptarum, erit 26. Haud ſecus invenietur 7 Planetas conjungi poſſe 120 modis diverſis. Et ſic de aliis.

Jam verò ſicut ex *a*, *b*, *c*, & *d*, cùm ipſæ deſignant quatuor res diverſas, inferuntur 15 electiones variæ, ita ſi eandem rem deſignent, hoc eſt, *a*, *b*, *c*, & *d* omnes inter ſe æquales ſive ejuſdem valoris intel-

ligan-

ligantur, poterunt tantùm ex iis quatuor colligi electiones. Si enim tunc, ut convenit, eodem nomine insigniantur, hoc est, per *a*, *a*, *a*, & *a* designentur: electiones erunt *a*, *aa*, *aaa*, & *aaaa*.

Unde liquet si ipsius *aaaa* seu a^4 partes aliquotæ inveniendæ sint, atque eum in finem loco ultimæ electionis *aaaa* sumatur unitas: erunt ipsius a^4 partes aliquotæ *a*, *aa*, a^3, & 1; & divisores 1, *a*, *aa*, a^3, & a^4.

Sic & si quinque fuerint res æquales, singulæ per *a* designatæ, reperientur quoque 5 earundem electiones, quæ sunt *a*, *aa*, *aaa*, *aaaa*, & *aaaaa*. Ita ut inde concludere liceat quantitatem a^5, propter quinque ejus dimensiones, quinque similiter habere partes aliquotas, quæ sunt *a*, *aa*, a^3, a^4, & 1; & 6 divisores, nimirum, 1, *a*, *aa*, a^3, a^4, & a^5. Idem de similibus aliis intellige.

Cæterùm datâ multitudine rerum, quarum aliquæ tantùm inter se æquales sint, ut si, verbi gratiâ, ipsæ sint quatuor numero, quarum duæ sibi invicem æquales existant, eæque designentur per *a*, *a*, *b*, & *c*: ad inveniendas omnifarias illarum electiones, multiplico, ut supra, *a* per *a*, & fit *aa*. Tum *a* & *aa* per *b*, fiuntque *ab* & *aab*. Ac deinde *a*, *aa*, *b*, *ab*, & *aab* per *c*, fiuntque *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*. Et manifestum est, quæsitam electionum multitudinem, comprehendendo sub ea semper omnium summam, fore 11. Ac proinde, si *a* supponatur designare gallinam, *b* perdicem, & *c* anserem: electiones fieri poterunt, ut sequitur.

a.
a. aa.
b. ab. aab.
c. ac. aac. bc. abc. aabc.

Videlicet, sumendo 1mo. 1 gallinam
2. 2 gallinas
3. 1 perdicem
4. 1 gallinam & 1 perdicem
5. 2 gallinas & 1 perdicem
6. 1 anserem
7. 1 gallinam & 1 anserem
8. 2 gallinas & 1 anserem
9. 1 perdicem & 1 anserem
10. 1 gallinam, 1 perdicem, & 1 anserem
11. 2 gallinas, 1 perdicem, & 1 anserem.

Ubi, ut supra, liquet, post duas ipsius *aa* electiones, propter *b* ab iis diversam, in sequenti regula unam ampliùs inveniri electionem, utputa tres *b*, *ab*, & *aab*. Ac deinde in hanc rursum sequenti, propter *c* à præcedentibus iterum diversam, unam ampliùs quàm duarum simul præcedentium, videlicet sex *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*. Ita ut in toto sint 11 electiones, addendo nempe numeros 2, 3, & 6. Quod idem in aliis similibus electionibus colligendis observare licebit.

Idem de partibus aliquotis est intelligendum. Si enim quantitatis a^2bc partes aliquotæ quærantur, & in locum *aabc* sumatur tantùm unitas: erunt & ipsius a_2bc undecim partes: nimirum *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & 1; & 12 divisores, qui sunt 1, *a*, *aa*, *b*, *ab*, *aab*, *c*, *ac*, *aac*, *bc*, *abc*, & *aabc*.

Similiter si fuerint quinque res, designatæ per *a*, *a*, *a*, *b*, & *b*, ut inveniantur electiones omnes, juxta quas aliter atque aliter sunt sumendæ, multiplico, ut ante, *a* per *a*, & fit *aa*. Tum *aa* rursus per *a*, fit *aaa*. Deinde *a*, *aa*, & *aaa* per *b*, fiuntque *ab*, *aab*, & *aaab*. Ac denique *b*, *ab*, *aab*, & *aaab* per *b*, fiuntque *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Omnino ut hîc infra conspicere licet. Eruntque electiones quæsitæ *a*, *aa*, *aaa*, *b*, *ab*, *aab*, *aaab*, *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*.

a

a. aa

a. aaa

b. ab. aab. aaab.

b. bb. abb. aabb. aaabb.

Ubi rursus post 3 ipsius *aaa* electiones in sequenti regula, propter *b* ab iis diversam, reperiuntur quatuor *b*, *ab*, *aab*, & *aaab*, hoc est, una ampliùs quàm trium ipsius *aaa*, sive trium præcedentium regularum; at verò propter *b* cum præcedenti eandem idem quoque electionum numerus qui hujus præcedentis, nimirum quatuor *bb*, *abb*, *aabb*, & *aaabb*. Adeò ut antecedens cujusque regulæ litera, quæ ab antecedenti proximè præcedentis non differt, eundem quoque semper electionum atque illius regulæ numerum inferat; at verò cùm ab illa diversa est, tum unâ semper plures electiones suppeditet, quàm antecedentium simul regularum. Id quod in genere tam ad electionum quàm

quàm partium aliquotarum & diviſorum numerum inveniendum compendioſiſſimum eſt remedium. Sive enim ipſarum a, a, a, b, & b electionum numerum, ſive quantitatis $a^3 b^2$, ex iis compoſitæ, partium aliquotarum & diviſorum multitudinem invenire velimus: oportebit tantùm, propter 3 ipſius a^3 dimenſiones ſive a ter poſitam, notare 3 electiones aut partes; ac deinde propter b bis poſitam, (quæ ſemel poſita unam præcedentibus tribus ſuperaddit quatuorque tradit) notare 8 electiones aut partes. ita ut in toto ſint 11 electiones aut partes; at verò 12 diviſores.

Sic & ſi 6 res deſignatæ fuerint per a, a, a, b, b, & c, & numerus electionum, quæ ab ipſis fieri poſſunt, ſit inveſtigandus; ſive etiam quantitas $a^3 b^2 c$ data ſit, cujus tam partium quàm diviſorum multitudo quæratur: noto, propter a^3 ſeu a ter poſitam, 3 electiones aut partes. Deinde propter b^2 ſeu b bis poſitam (quæ ſemel poſita unam præcedentibus tribus ſuper addit & quatuor tradit) noto 8 electiones aut partes. Ac denique propter c, quæ unam rurſus præcedentibus 3 & 8 ſimul ſuper addit, noto 12 electiones aut partes. Unde colligendo in unam ſummam 3, 8, & 12, quæſitus electionum aut partium numerus fit 23, & diviſorum 24.

Haud ſecus ſi datæ fuerint a, a, a, a, a, b, b, b, b, c, c, c, d, & d, aut quantitas $a^5 b^4 c^3 d^2$, ex iiſdem compoſita, ad inveniendum tam electionum illarum quàm hujus partium numerum, noto propter a^5 ſeu a quinquies poſitam, 5 electiones aut partes. Deinde propter b^4 ſeu b quater poſitam (quæ ſemel poſita unam præcedentibus 5 ſuper addit & 6 tradit) noto 24 electiones aut partes. Porrò propter c^3 ſeu c ter poſitam (quæ ſemel poſita unam rurſus præcedentibus 5 & 24 ſimul ſuper addit & 30 tradit) noto 90 electiones aut partes. Ac denique propter d^2 ſeu d bis poſitam (quæ ſemel poſita rurſus unam præcedentibus 5, 24, & 90 ſimul ſuper addit & 120 tradit) noto 240 electiones aut partes. Unde addendo ſimul 5, 24, 90, & 240, concludo 359 quæſitam eſſe electionum aut partium multitudinem; at verò diviſorum numerum eſſe 360.

Simili modo invenire licet dati numeri partium & diviſorum multitudinem. Ut ad inveniendum quot partes & diviſores habeat 15876000:

15876000	7938000	3969000	1984500	992250	496125	165375	
2	2	2	2	2	3	3	

55125	18375	6125	1225	245	49	7	1
3	3	5	5	5	7	7	

Quæro primùm ex quibus primis numeris 15876000 producatur, dividendo eum in finem 15876000 per primos numeros 2, 3, 5, *&c.* donec perveniatur ad unitatem. Perinde ut hîc ſupra factum vides. Hinc cum reperiam ipſum multiplicatione produci 14 primorum numerorum 2. 2. 2. 2. 2. 3. 3. 3. 3. 5. 5. 5. 7. 7, eundemque notari poſſe, hoc modo: 2^5, 3^4, 5^3, 7^2, ita ut cum $a^5 b^4 c^3 d^2$ præcedentis exempli omnino conſentiat ſive utriuſque eadem ratio ſit, patet, ipſius pariter fore 359 partes aliquotas, & 360 diviſores. Atque ita de aliis.

SECTIO II.

Ratio inveniendi multitudinem rerum, earumque inter ſe habitudinem, quæ datis vicibus eligi poſſunt.

AD inveniendam multitudinem rerum, earumque inter ſe habitudinem, quæ datis vicibus eligi poſſunt, ſciendum eſt, illam non ſemper omnino determinatam eſſe ſed ſæpe numero variam inveniri, prout datæ vices ſeſe obtulerint. Quibus autem caſibus id contingat, ac quo pacto illa inveſtiganda ſit, ſequentia exempla edocebunt.

1mum *Exemplum.* Etenim ad inveniendum, quot res ſumendæ ſint, ac quænam inter eas habitudo exiſtat, quæ 15 diverſis modis eligi poſſint: addo ad 15 unitatem ſeu 1, & fit 16. Hic igitur numerus ſi reperiatur aliquis eorum, qui ab unitate in ratione dupla aſcendunt, hoc eſt, ut ipſe continuò per 2 dividi poſſit, donec ad unitatem perveniatur: indicabit diviſionum numerus, ſeu is qui oſtendit quotus poſt unitatem hic 16 ejuſdem Progreſſionis terminus obtingat, quot res diverſæ accipi debeant, quæ 15 modis aliter atque aliter eligi poſſint. Ac proinde cum 16 dictæ progreſſionis quartus terminus exiſtat ſive quatuor ejuſ-

16	8	4	2	1
2	2	2	2	

ejusmodi divisiones fieri queant: idcirco & quatuor diversas res assumi debere, utputa *a*, *b*, *c*, & *d*, quæ 15 diversis modis eligantur. Quemadmodum ex præcedenti sectione facilè est colligere.

Jam verò ut hinc porrò constet, num & plures paucioresvé res assumi queant, quę similiter 15 diversis modis eligantur: quæro utrum 16 per alios adhuc numeros dividi possit. Unde cum præter 2 etiam per 4, 8, & per se ipsum divisibilis sit, concludo ultra inventam multitudinem alias insuper rerum multitudines reperiri, quæ idem præstent.

Ad quas obtinendas ut & ad earum habitudinem indagandam, divido 16 per 4, & fit 4. Jam autem, dividendo ut supra 4 per 2, fit 2, ac rursus 2 per 2, fit 1. Hinc si à divisoribus 4, 2, & 2 unitas auferatur, & reliqua 3, 1, & 1 simul addantur: ostendet summa 5, quinque item res, quarum tres inter se æquales sint, assumi posse, utputa *a*, *a*, *a*, *b*, & *c*, quæ rursum 15 diversis modis eligi valeant.

Eodem modo, cum 16 diviso per 4, fiat 4, ac deinde 4 per 4, fiat 1; atque à divisoribus 4 & 4 unitate sublatâ reliqua 3 & 3 simul addita faciant 6: poterunt similiter 6 res assumi, quarum tres unæ inter se æquales sunt, sicut & tres aliæ, utputa *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, & *b*, quæ 15 iterum diversis modis eligentur.

Sic &, quia dividendo 16 per 8, fit 2, & 2 per 2, fit 1: Hinc à divisoribus 8 & 2 sublatâ unitate, si reliqua 7 & 1 simul addantur, indicabit 8 summa, posse quoque octo res, quarum 7 inter se æquales sint, assumi, utputa *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, & *b*, quas denuo 15 diversis eligere licet modis.

Denique cum 16 per 16 dividendo fiat 1, & à 16 auferendo 1 relinquatur 15, fit ut sumendo res 15 inter se æquales, earum quoque electiones omnes 15 numero existant.

Hinc cum 16 aliis quàm hisce 5 modis dividi non eveniat, colligere licet, quæsitam rerum multitudinem quintuplicem esse; earundemque habitudines, seu quales ipsæ res assumendæ sint, ex jam dictis constare. Quæ omnia, dum ex præcedenti sectione manant, diligenter inquirenti, perspecta evadent.

Deinde ad inveniendam multitudinem rerum, quæ, verbi gratiâ, 23 diversis modis eligi queant, ut & ad indagandum quales illæ assumendæ sint, addo ad 23 unitatem seu 1, & fit 24. Jam cum hic numerus non aliquis eorum existat, qui ab unitate in ratione dupla ascendunt, sive ipse continuò per 2 usque ad unitatem divisibilis sit: argu- *2dum Exemplum.*

mentum eſt, multitudinem inveniendam non ex rebus, quæ omnes diverſæ aut inæquales ſint, conſtare poſſe. Quocirca ut habitudo earum innoteſcat, ſimulque palàm fiat num multitudo illa varia inveniri poſſit: quæro utrum 24 per diverſos numeros dividi queat,

1.
24 | 8 | 4 | 2 | 1
3 | 2 | 2 | 2 |

2.
24 | 6 | 2 | 1
4 | 3 | 2 |

3.
24 | 4 | 2 | 1
6 | 2 | 2 |

4.
24 | 4 | 1
6 | 4 |

5.
24 | 3 | 1
8 | 3 |

6.
24 | 2 | 1
12 | 2 |

7.
24 | 1
24 |

priuſquam ad unitatem perveniatur, hoc eſt, utrum ex diverſis producatur numeris. Unde cum 24 ſeptuplicem admittere diviſionem deprehendam, ſeu eum 7 diverſis modis, hîc oblatis, ab aliis gigni: concludo quæſitam rerum multitudinem ſeptuplicem quoque inventum iri. Ad quas obtinendas, dum à diviſoribus ſigillatim auferendo unitatem, reliqua componunt 7 hoſce numeros 5, 6, 7, 8, 9, 12, & 23, qui ſinguli quæſitam rerum multitudinem demonſtrant: patet, res quæſitas (23 diverſis electionibus obnoxias) 7 ſequentibus modis eſſe ſumendas, nimirum, prout deſignantur

per *a, a, b, c, d.*
vel per *a, a, a, b, b, c.*
vel per *a, a, a, a, a, b, c.*
vel per *a, a, a, a, a, b, b, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, b, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, b.*
vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a.*

3tium Exemplum. Cæterùm ut inveniatur multitudo rerum, quæ 42 diverſas electiones ſubeant, ſimulque indagetur quales illæ accipiendæ ſint: addo, ut ſupra, ad 42 unitatem ſeu 1, & fit 43. Jam cum hic numerus primus exiſtat, ſeu per nullum niſi per ſe ipſum & unitatem dividi poſſit,

con-

concludo multitudinem quæſitam fore unicam: utpote ſumendo 42 res (prout datus numerus indicat), quæ omnes inter ſe æquales ſint. Atque ita de aliis.

SECTIO III.

Ratio inveniendi quantitates, datam habentes partium aliquotarum aut diviſorum multitudinem.

AD inveniendas quantitates, quæ datam habeant partium aliquotarum multitudinem: oportet per præcedentem ſectionem invenire quot qualeſque quantitates ceu res aſſumi debeant, quæ toties diverſimodè eligi poſſint, quoties indicat data partium multitudo. Eſt enim quantitas ex iis genita, illa quæ quæritur.

Unde ad inveniendas quantitates, datam diviſorum multitudinem habentes, nil aliud faciendum eſt, quàm ab eadem multitudine unitatem auferendo quærere quantitatem, ſicut jam dictum eſt, quæ tot partes habeat, quot reliquum continet unitates. Sed hæc exemplis clariora fient.

Ut ad inveniendam quantitatem, quæ 15 habeat partes aliquotas: quæro per præcedentem ſectionem quot quantitates accipiendæ ſint, qualiſque inter ipſas habitudo exiſtat, quæ 15 diverſis modis eligi queant. Jam cum multitudo earundem varia reperiatur, illæque quintupliciter ſumendæ occurrant, nimirum prout deſignantur per *a*, *b*, *c*, *d*, vel per *a*, *a*, *a*, *b*, *c*, vel per *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, vel per *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b*, vel per *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*: idcirco ex hiſce componendo quantitates $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, deſignabit quælibet ipſarum quantitatem, 15 partes aliquotas habentem, qualis requirebatur. *1mum Exemplum.*

Hinc ad inveniendam quantitatem, 16 diviſores habentem, quoniam quantitas quindecim partes habens ſedecim habet diviſores (ſiquidem diviſorum numerus ſemper unitate partium aut electionum numerum, ſicut 1mâ ſectione dictum fuit, excedit): fit ut inde quælibet inventarum $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, ſedecim quoque diviſores admittat.

Haud ſecus, ſi invenire velimus quantitatem, 23 partes aliquotas habentem; quæro per præced. ſect. quot qualeſque quantitates ceu *2dum Exemplum.*

res

res aſſumi debeant, quæ 23 diverſis modis eligi poſſint. Unde cum ipſarum multitudo ſeptuplex reperiatur, atque earum inter ſe habitudinem deſignari per *a, a, b, c, d*, vel per *a, a, a, b, b, c*, vel per *a, a, a, a, a, b, c*, vel per *a, a, a, a, a, b, b, b*, vel per *a, a, a, a, a, a, a, b, b*, vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, b*, vel per *a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a, a*: fit ut ex iis componendo quantitates a^2bcd, a^3bc, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, a^{23}, quælibet harum habeat 23 partes, & 24 diviſores.

3tium Exemplum. Sic & ad inveniendam quantitatem, habentem 42 partes aliquotas: quæro per præc. ſect. quot quantitates aſſumendæ ſint, qualiſque ipſarum habitudo exiſtat, quæ 42 diverſis modis eligi valeant. Cum autem jam illarum multitudo non niſi unica reperiatur, atque ad hoc 42 quantitates ſumendas eſſe, quæ omnes inter ſe æquales ſint: idcirco quantitas ex iiſdem conflata deſignabitur per a^{42}. Unde ſequitur, ad deſignandam quantitatem, 43 diviſores habentem, ſcribendum pariter fore a^{42}. Atque ita de aliis. Quorum omnium veritas ex 1ma ſectione perſpicua eſt.

Exercitationis causâ atque majoris illuſtrationis ergo eorum, quæ oſtenſa ſunt, ſubjungimus hîc quantitates, datã partium multitudinem habentes ab 1 uſque ad 100, modis omnibus quibus deſignari poſſunt.

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.	
a	habet	1	
a^2	habet	2	
ab, a^3	habent ſingulæ	3	
a^4	&c.	4	
a^2b, a^5		5	
a^6		6	
a^3b, abc, a^7		7	
a^2b^2, a^8		8	Partes aliquotas
a^4b, a^9		9	
a^{10}		10	
$a^2bc, a^3b^2, a^5b, a^{11}$		11	
a^{12}		12	
a^6b, a^{13}		13	
a^4b^2, a^{14}		14	
$a^3bc, abcd, a^3b^3, a^7b, a^{15}$		15	
a^{16}		16	

a^2b^2c,

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.
$a^2b^2c, a^5b^2, a^8b, a^{17}$	habent singulæ	17
a^{18}	habet	18
$a^4bc, a^4b^3, a^9b, a^{19}$	&c.	19
a^6b^2, a^{20}		20
$a^{10}b, a^{21}$		21
a^{22}		22
$a^3b^2c, a^2bcd, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, a^{11}b, a^{23}$		23
a^4b^4, a^{24}		24
$a^{12}b, a^{25}$		25
$a^2b^2c^2, a^8b^2, a^{26}$		26
$a^6bc, a^6b^3, a^{13}b, a^{27}$		27
a^{28}		28
$a^4b^2c, a^5b^4, a^9b^2, a^{14}b, a^{29}$		29
a^{30}		30
$a^3bcd, a^3b^3c, a^7bc, abcde, a^7b^3, a^{15}b, a^{31}$		31
$a^{10}b^2, a^{32}$		32
$a^{16}b, a^{33}$		33
a^6b^4, a^{34}		34
$a^2b^2cd, a^5b^2c, a^3b^2c^2, a^8bc, a^8b^3, a^5b^5, a^{11}b^2, a^{17}b, a^{35}$		35
a^{36}		36
$a^{18}b, a^{37}$		37
$a^{12}b^2, a^{38}$		38
$a^4bcd, a^4b^3c, a^9bc, a^7b^4, a^9b^3, a^{19}b, a^{39}$		39
a^{40}		40
$a^6b^2c, a^6b^5, a^{13}b^2, a^{20}b, a^{41}$		41
a^{42}		42
$a^{10}bc, a^{10}b^3, a^{21}b, a^{43}$		43
$a^4b^2c^2, a^8b^4, a^{14}b^2, a^{44}$		44
$a^{22}b, a^{45}$		45
a^{46}		46
$a^3b^2cd, a^5bcd, a^5b^3c, a^2bcde, a^3b^3c^2, a^7b^2c, a^{11}bc, a^7b^5, a^{11}b^3, a^{15}b^2, a^{23}b, a^{47}$		47
a^6b^6, a^{48}		48
$a^4b^4c, a^9b^4, a^{24}b, a^{49}$		49
$a^{16}b^2, a^{50}$		50
$a^{12}bc, a^{12}b^3, a^{25}b, a^{51}$		51
a^{52}		52
$a^2b^2c^2d, a^5b^2c^2, a^8b^2c, a^8b^5, a^{17}b^2, a^{26}b, a^{53}$		53
$a^{10}b^4, a^{54}$		54
$a^6bcd, a^6b^3c, a^7b^6, a^{13}bc, a^{13}b^3, a^{27}b, a^{55}$		55

Partes aliquotas

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.

Multitudines partium aliquotarum datæ.

$a^{18}b^2, a^{56}$ habent ſingulæ 56
$a^{28}b, a^{57}$ habent ſingulæ 57
a^{58} &c. 58
$a^4b^2cd, a^4b^3c^2, a^5b^4c, a^9b^2c, a^9b^5, a^{11}b^4, a^{14}bc, a^{14}b^3, a^{19}b^2, a^{29}b,$
a^{59} 59
a^{60} 60
$a^{30}b, a^{61}$ 61
$a^6b^2c^2, a^8b^6, a^{20}b^2, a^{62}$ 62
$a^3b^3cd, a^3bcde, a^7bcd, a^7b^3c, a^3b^3c^3, abcdef, a^7b^7, a^{15}bc, a^{15}b^3, a^{31}b,$
a^{63} 63
$a^{12}b^4, a^{64}$ 64
$a^{10}b^2c, a^{10}b^5, a^{21}b^2, a^{32}b, a^{65}$ 65
a^{66} 66
$a^{16}bc, a^{14}b^3, a^{33}b, a^{67}$ 67
$a^{22}b^2, a^{68}$ 68
$a^6b^4c, a^9b^6, a^{13}b^4, a^{34}b, a^{69}$ 69
a^{70} 70
$a^5b^2cd, a^3b^2c^2d, a^2b^2cde, a^5b^3c^2, a^8bcd, a^7b^2c^2, a^8b^3c, a^5b^5c, a^{11}b^2c,$
$a^{11}b^5, a^8b^7, a^{17}bc, a^{17}b^3, a^{23}b^2, a^{35}b, a^{71}$ 71
a^{72} 72 Partes aliquotas
$a^{36}b, a^{73}$ 73
$a^4b^4c^2, a^{14}b^4, a^{24}b^2, a^{74}$ 74
$a^{18}bc, a^{18}b^3, a^{37}b, a^{75}$ 75
$a^{10}b^6, a^{76}$ 76
$a^{12}b^2c, a^{12}b^5, a^{25}b^2, a^{38}b, a^{77}$ 77
a^{78} 78
$a^4b^3cd, a^4bcde, a^9bcd, a^4b^3c^3, a^7b^4c, a^9b^3c, a^9b^7, a^{15}b^4, a^{19}bc, a^{19}b^3,$
$a^{39}b, a^{79}$ 79
$a^2b^2c^2d^2, a^8b^2c^2, a^8b^8, a^{26}b^2, a^{80}$ 80
$a^{40}b, a^{81}$ 81
a^8 82
$a^6b^2cd, a^6b^3c^2, a^6b^5c, a^{13}b^2c, a^{11}b^6, a^{13}b^5, a^{20}bc, a^{20}b^3, a^{27}b^2, a^{41}b,$
a^{83} 83
$a^{16}b^4, a^{84}$ 84
$a^{42}b, a^{85}$ 85
$a^{28}b^2, a^{86}$ 86
$a^{10}bcd, a^{10}b^3c, a^{10}b^7, a^{21}bc, a^{21}b^3, a^{43}b, a^{87}$ 87
a^{88} 88
$a^4b^2c^2d, a^5b^4c^2, a^8b^4c, a^9b^2c^2, a^{14}b^2c, a^9b^8, a^{14}b^5, a^{17}b^4, a^{29}b^2,$
$a^{44}b, a^{89}$ 89
$a^{12}b^6,$

Quantitates datæ multitudinis partium aliquotarum.		Multitudines partium aliquotarum datæ.	
$a^{12}b^{6}$, a^{90}	habent singulæ	90	Partes aliquotas
$a^{22}bc$, $a^{22}b^{3}$, $a^{45}b$, a^{91}	habent singulæ	91	
$a^{30}b^{2}$, a^{92}	&c.	92	
$a^{46}b$, a^{93}		93	
$a^{18}b^{4}$, a^{94}		94	
$a^{3}b^{2}cde$, $a^{5}b^{3}cd$, $a^{5}bcde$, $a^{3}b^{3}c^{2}d$, $a^{7}b^{2}cd$, $a^{2}bcdef$, $a^{7}b^{3}c^{2}$, $a^{5}b^{3}c$, $a^{7}b^{5}c$, $a^{11}bcd$, $a^{11}b^{3}c$, $a^{15}b^{2}c$, $a^{11}b^{7}$, $a^{15}b^{5}$, $a^{23}bc$, $a^{23}b^{3}$, $a^{31}b^{2}$, $a^{47}b$, a^{95}		95	
a^{96}		96	
$a^{6}b^{6}c$, $a^{13}b^{6}$, $a^{48}b$, a^{97}		97	
$a^{10}b^{2}c^{2}$, $a^{10}b^{8}$, $a^{32}b^{2}$, a^{98}		98	
$a^{4}b^{4}cd$, $a^{4}b^{4}c^{3}$, $a^{9}b^{4}c$, $a^{9}b^{9}$, $a^{24}bc$, $a^{19}b^{4}$, $a^{24}b^{3}$, $a^{49}b$, a^{99}		99	
a^{100}.		100.	

SECTIO IV.

Ratio inveniendi minimos numeros, datam habentes partium aliquotarum aut diviſorum multitudinem.

INventis per proximè præcedentem Sectionem, quantitatibus omnibus, datam habentibus partium aut diviſorum multitudinem, oportet, aſſumendo pro quantitatibus, ex quibus producuntur, minimos primos numeros, & ex iis aſſignando omnium minimos quantitatibus, quæ plurimas habent dimenſiones, quærere quiſnam ex his pari modo productis omnium exiſtat minimus. Eſt enim hic eorum, qui ipſius datæ multitudinis inveniri poſſunt, minimus, qui quæritur.

1mum *Exemplum.*

Ut ad inveniendum minimum numerum, 15 partes aliquotas habentem, quoniam quantitates *abcd*, $a^{3}bc$, $a^{3}b^{3}$, $a^{7}b$, & a^{15} ſingulæ habent 15 partes, & tribuendo ipſis *a*, *b*, *c*, & *d* minimos primos numeros 2, 3, 5, 7, horum multiplicatione pro *abcd* invenitur 210; at verò ductu ipſarum *a*, *a*, *a*, *b*, *c* pro $a^{3}bc$ invenitur 120; & ductu ipſarum *a*, *a*, *a*, *b*, *b*, *b*, pro $a^{3}b^{3}$ invenitur 216; & ductu ipſarum *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *b* pro $a^{7}b$ invenitur 384; ac denique ductu ipſarum *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, *a*, pro a^{15} invenitur 32768: erit 120 eorum, qui inveniri poſſunt, ac 15 partes aliquotas habent, minimus quæſitus.

Ita & ſi quæratur minimus numerus, habens 16 diviſores, quoniam

niam ſimiliter quantitates 16 diviſores habentes ſunt $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15}; ſumendoque $a \propto 2$, $b \propto 3$, $c \propto 5$, & $d \propto 7$, pro iis, ut ſupra, reperiuntur numeri 210, 120, 216, 384, & 32768, inter quos 120 eſt minimus: erit pariter 120 eorum, qui 16 diviſores habent, omnium minimus.

2dum Exemplum. Eodem modo, ut inveniatur minimus numerus, habens 23 partes aliquotas, & 24 diviſores, quoniam a^2bcd, a^3b^2c, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, & a^{23} ſingulæ habent 23 partes & 24 diviſores, ac tribuendo ipſis a, b, c, d minimos primos numeros 2, 3, 5, 7 pro a^2bcd invenitur 420, pro a^3b^2c 360, pro a^2bc 480, pro a^5b^3 864, pro a^7b^2 1152, pro $a^{11}b$ 6144, & pro a^{23} 8388608: erit 360 eorum qui 23 partes habent & 24 diviſores omnium minimus.

Notandum autem eſt in hoc & præcedenti exemplo, cum diverſæ quantitates reperiantur, eandem partium aut diviſorum multitudinem admittentes, quòd iis ſingulis tanquam diverſis modis uti poſſimus ad infinitos numeros inveniendos, qui datam illam partium aut diviſorum multitudinem habeant.

Ita ſi infinitos invenire velimus numeros, qui ſinguli habeant 15 partes & 16 diviſores, uti poſſumus unaquâque quantitatum $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, & a^{15}, tribuendo tantùm quantitatibus a, b, c, & d, ex quibus producuntur, numeros primos, ut libet, eoſquē aliter atque aliter ſumendo, vel etiam pro iis accipiendo ſemper alios atque alios primos. Sic enim tribuendo a 2, b 3, c 5, invenietur pro a^3bc 120. At tribuendo a 3, b 2, c 5, invenietur pro a^3bc 270. Et tribuendo a 5, b 2, c 3, invenietur pro a^3bc 750. Vel etiam aſſumendo $a \propto 7$, $b \propto 11$, $c \propto 13$, fiet $a^3bc \propto 49049$. Aut ſumendo $a \propto 17$, $b \propto 19$, & $c \propto 23$, fiet $a^3bc \propto 2146981$. Atque ita porrò in infinitum. Idem intellige de qualibet reliquarum quantitatum $abcd$, a^3b^3, a^7b, a^{15}; ut & de ſingulis a^2bcd, a^3b^2c, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, $a^{11}b$, & a^{23}, ad infinitos numeros inveniendos, qui 23 habent partes, & 24 diviſores.

Ad hæc notatu dignum, quòd, licèt indifferenter per quamlibet harum quantitatum, æquè multas partes aut diviſores habentium, infiniti numeri reperiantur ejuſdem multitudinis, nihilominus tamen non ſemper per unamquamque ex illis abſque diſcrimine minimus numerus inveniri poſſit, qui totidem partes aut diviſores habeat. Nam tametſi, & ante, quâlibet uti poſſumus quantitatum $abcd$, a^3bc, a^3b^3, a^7b, a^{15}, & per eas ſingulas tanquam per diverſos modos invenire infinitos numeros, habentes 15 partes & 16 diviſores; tamen, cum ad

ad minimos obtinendos (tribuendo quantitatibus a, b, c, d minimos primos 2, 3, 5, 7) ipſarum beneficio nulli reperiantur minores quàm 210, 120, 216, 384, 32768, patet quantitatem a^3bc eſſe illam ſolam, per quam omnium reperire licet minimum 120.

Sic &, cùm per a^3b^2c inveniatur 360, atque hic numerus omnibus illis, qui per a^2bcd, a^5bc, a^5b^3, a^7b^2, a^{11}, a^{23} reperiri poſſunt, minor ſit: erit quantitas a^3b^2c illa, quæ ad minimum numerum inveniendum, habentem 23 partes & 24 diviſores, tantùm inſervit.

Adeò ut hinc conſtet, tunc demum datæ multitudinis partium aut diviſorum minimum obtineri numerum, cùm juxta omnes modos, qui extant, inventis minimis numeris eum inter hos eſſe minimum appareat.

Porrò ut in præcedenti tabula quantitates, quæ minimis numeris datæ multitudinis partium aut diviſorum inveniendis inſerviunt, ab aliis facilè dignoſcantur: conceſſimus illis priorem cujuſque regulæ locum, reliquis conſequenter poſteriores tribuentes, prout continuò majores minimos numeros ſuppeditant, indeque aliis poſthabendæ videntur.

Denique ad inveniendum minimum numerum, habentem 42 partes, & 43 diviſores, quoniam quantitas hanc habens partium & diviſorum multitudinem unico tantùm modo deſignari poteſt, utpote ſcribendo a^{42}: fit ut, ſi pro a minimus ſumatur primus numerus 2, iſque quadrageſies & bis ponatur, ac deinde multiplicetur, productus numerus 4398046511104 minimus ſit quæſitus, cum præter eum nullus alius minimus exiſtat. Atque ita de aliis. *3tium Exemplum.*

His ſubjungere viſum fuit ſequentem tabulam minimorum numerorum, datæ multitudinis partium & diviſorum ab 1 uſque ad 100.

Syllabus 100 *minimorum numerorum, datæ multitudinis partium & diviſorum, ab* 1 *uſque ad* 100.

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & diviſorum.		Multitudines partium aliquotarum datæ, iiſdem reſpondentes.		Multitudines diviſorum datæ, iiſdem reſpondentes.	
2	habet	1	part. aliquot. &	2	diviſores.
4		2		3	
6		3		4	
16		4		5	
12		5		6	
64		6		7	
24		7		8	
36		8		9	
48		9		10	
1024		10		11	
60		11		12	
4096		12		13	
192		13		14	
144		14		15	
120		15		16	
65536		16		17	
180		17		18	
262144		18		19	
240		19		20	
576		20		21	
3072		21		22	
4194304		22		23	
360		23		24	
1296		24		25	
12288		25		26	
900		26		27	
960		27		28	
268435456		28		29	
720		29		30	
1073741824		30		31	
840		31		32	

9216

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & diviſorum.	Multitudines partium aliquotarum datæ, iiſdem reſpondentes.	Multitudines diviſorum datæ, iiſdem reſpondentes.
9216 habet	32 part.aliquot.&	33 diviſo-
196608	33	34 res.
5184	34	35
1260	35	36
68719476736	36	37
786432	37	38
36864	38	39
1680	39	40
1099511627776	40	41
2880	41	42
4398046511104	42	43
15360	43	44
3600	44	45
12582912	45	46
70368744177664	46	47
2520	47	48
46656	48	49
6480	49	50
589824	50	51
61440	51	52
4503599627370496	52	53
6300	53	54
82944	54	55
6720	55	56
2359296	56	57
805306368	57	58
288230376151711744	58	59
5040	59	60
1152921504606846976	60	61
3221225472	61	62
14400	62	63
7560	63	64
331776	64	65
46080	65	66
73786976294838206464	66	67
		983040

Minimi numeri, datæ multitudinis partium aliquotarum & diviſorum.	Multitudines partium aliquotarum datæ, iiſdem reſpondentes.	Multitudines diviſorum datæ, iiſdem reſpondentes.
983040 habet	67 part.aliquot.&	68 diviſo-
37748736	68	69 res.
25920	69	70
1180591620717411303424	70	71
10080	71	72
4722366482869645213696	72	73
206158430208	73	74
32400	74	75
3932160	75	76
746496	76	77
184320	77	78
302231454903657293676544	78	79
15120	79	80
44100	80	81
3298534883328	81	82
4835703278458516698824704	82	83
20160	83	84
5308416	84	85
13194139533312	85	86
2415919104	86	87
107520	87	88
309485009821345068724781056	88	89
25200	89	90
2985984	90	91
62914560	91	92
9663676416	92	93
211106232532992	93	94
21233664	94	95
27720	95	96
79228162514264337593543950336	96	97
233280	97	98
230400	98	99
45360	99	100
126765060022822940149670320- -5376	100	101.

SE-

SECTIO V.

Syllabus numerorum primorum, qui continentur in decem prioribus chiliadibus.

CUM ad ſolutionem Quæſtionum de partibus aliquotis & diviſoribus primos numeros in promptu habere valde opportunum ſit, atque his illarum praxis omnino facilis reddatur: haud inconveniens fore duximus, ſi, in ipſis hîc, tanquam in abaco, exponendis, prout eos ab unitate uſque ad 10.000 ſummâ accuratione inveſtigavimus, Sectionem hanc inſumeremus. Quod eò, magis conſultum judicavimus, quò ipſorum uſum latiùs per haſce diſciplinas ſe diffundere deprehendimus. Cum enim operatio quælibet, quæ per numeros inſtituenda eſt, per primos numeros tanquam per omnium minimos ſeu ſimpliciſſimos procedat, ipſiſque ulteriùs ad Quæſtiones, quæ per numeros enodari debent, diſſolvendas, præſertim deſerviant: nullus (ut confido) futurus eſt, qui illorum uſum hac in re non ſit agniturus. Quippe conſtat, ad Quæſtionem aliquam per numeros illuſtrandam, ſi ipſi ad id abſque delectu aſſumantur, eandem interdum, licèt quæſtio aliàs per ſe facilis ſit, tam vaſtis ac tædioſis numeris involvi, ut à Quæſtionis inſpectione tyrones è veſtigio deterreantur. His adde, quòd hi numeri ad fractiones abbreviandas non parùm quoque ſubſidii conferant; & iidem in dividendis æquationibus, earumque inveſtigandis radicibus, ut & in componendis Logarithmis, ac in omni fermè calculo uſum ſuum præbeant.

Numeri primi
1. Chiliadis.

2
3
5
7
11
13
17
19
23
29
31
37
41
43
25. 47
53
59
61
67
71
73
79
83
89
97

101
103
107
109
113
127
131
137
139
149
151
157
21. 163
167
173
179
181
191
193
197
199

211
223
227
229
233
239
241
251
16. 257
263
269
271
277
281
283
293

307
311
313
317
331
337
347
349
353
16. 359
367
373
379
383
389
397

401
409
419
421
431
433
439
443
449
17. 457
461
463
467
479
487
491
499

503
509
521
523
541
547
557
14. 563
569
571
577
587
593
599

601
607
613
617
619
631
641
16. 643
647
653
659
661
673
677
683
691

701
709
719
727
733
739
743
14. 751
757
761
769
773
787
797

811
821
823
827
829
839
853
15. 857
859
863
877
881
883
887

907
911
919
929
937
941
947
14. 953
967
971
977
983
991
997

Numeri primi 2. Chiliadis.

	1009		1213		1433	15.	1619	12.	1867
	1013		1217		1439		1621		1871
	1019		1223		1447		1627		1873
	1021		1229		1451		1637		1877
	1031		1231	17.	1453		1657		1879
	1033	15.	1237		1459		1663		1889
	1039		1249		1471		1667		1901
	1049		1259		1481		1669		1907
16.	1051		1277		1483		1693		1913
	1061		1279		1487		1697		1931
	1063		1283		1489		1699		1933
	1069		1289		1493		1709		1949
	1087		1291		1499		1721	13.	1951
	1091		1297		1511		1723		1973
	1093		1301		1523		1733		1979
	1097		1303		1531		1741		1987
	1103		1307		1543	12.	1747		1993
	1109		1319		1549		1753		1997
	1117		1321	12.	1553		1759		1999
	1123	11.	1327		1559		1777		
	1129		1361		1567		1783		
	1151		1367		1571		1787		
12.	1153		1373		1579		1789		
	1163		1381		1583		1801		
	1171		1399		1597		1811		
	1181		1409		1601		1823		
	1187		1423		1607		1831		
	1193		1427		1609		1847		
	1201		1429		1613		1861		

Numeri primi
3. Chiliadis.

	2003		2213		2393		2633		2801
	2011		2221		2399		2647		2803
	2017		2237		2411		2657		2819
	2027		2239		2417		2659		2833
	2029		2243		2423		2663		2837
	2039		2251		2437		2671		2843
	2053	15.	2267		2441	15.	2677	12.	2851
14.	2063		2269	10.	2447		2683		2857
	2069		2273		2459		2687		2861
	2081		2281		2467		2689		2879
	2083		2287		2473		2693		2887
	2087		2293		2477		2699		2897
	2089		2297		2503		2707		2903
	2099		2309		2521		2711		2909
	2111		2311		2531		2713		2917
	2113		2333		2539		2719		2927
	2129		2339		2543		2729		2939
	2131		2341	11.	2549		2731	11.	2953
10.	2137		2347		2551	14.	2741		2957
	2141	15.	2351		2557		2749		2963
	2143		2357		2579		2753		2969
	2153		2371		2591		2767		2971
	2161		2377		2593		2777		2999
	2179		2381		2609		2789		
	2203		2383		2617		2791		
	2207		2389		2621		2797		

Nu-

Numeri primi 4. Chiliadis.

	3001		3221		3433		3623		3847
	3011		3219		3449		3631		3851
	3019		3251		3457		3637	11.	3853
	3023	11.	3253	11.	3461	13.	3643		3863
	3037		3257		3463		3659		3877
	3041		3259		3467		3671		3881
12.	3049		3271		3469		3673		3889
	3061		3299		3491		3677		—
	3067		—		3499		3691		3907
	3079		3301		—		3697		3911
	3083		3307		3511		—		3917
	3089		3313		3517		3701		3919
	—		3319		3527		3709		3923
	3109		3323		3529		3719		3929
	3119		3329		3533		3727	11.	3931
	3121		3331		3539		3733		3943
	3137		3343		3541		3739		3947
	3163	15.	3347	14.	3547	12.	3761		3967
10.	3167		3359		3557		3767		3989
	3169		3361		3559		3769		—
	3181		3371		3571		3779		
	3187		3373		3581		3793		
	3191		3389		3583		3797		
	—		3391		3593		—		
	3203		—		—		3803		
	3209		3407		3607		3821		
	3217		3413.		3613		3823		
					3617		3833		

Numeri primi
5. Chiliadis.

4001
4003
4007
4013
4019
4021
4027
15. 4049
4051
4057
4073
4079
4091
4093
4099
4111
4127
4129
4133
4139
9. 4153
4157
4159
4177
4201

4211
4217
4219
4229
16. 4231
4241
4243
4253
4259
4261
4271
4273
4283
4289
4297
4327
9. 4337
4339
4349
4357
4363
4373
4391
4397
4409

4421
4423
11. 4441
4447
4451
4457
4463
4481
4483
4493
4507
4513
4517
4519
4523
12. 4547
4549
4561
4567
4583
4591
4597
4603
4621
4637

4639
4643
12. 4649
4651
4657
4663
4673
4679
4691
4703
4721
4723
4729
4733
12. 4751
4759
4783
4787
4789
4793
4799
4801
4813
4817
4831

8. 4861
4871
4877
4889
4903
4909
4919
4931
4933
4937
15. 4943
4951
4957
4967
4969
4973
4987
4993
4999

Nu-

Numeri primi 6. Chiliadis.

	5003	10.	5233		5449		5659		5861
	5009		5237		5471		5669		5867
	5011		5261		5477		5683		5869
	5021		5273		5479		5689		5879
	5023		5279		5483		5693		5881
12.	5039		5281		5501		5701		5897
	5051		5297		5503		5711		5903
	5059		5303		5507		5717		5923
	5077		5309		5519		5737		5927
	5081		5323		5521		5741	7.	5939
	5087		5333	13.	5527	10.	5743		5953
	5099	10.	5347		5531		5749		5981
	5101		5351		5557		5779		5987
	5107		5381		5563		5783		
	5113		5387		5569		5791		
	5119		5393		5573		5801		
	5147		5399		5581		5807		
11.	5153		5407		5591		5813		
	5167		5413		5623		5821		
	5171		5417		5639		5827		
	5179		5419		5641		5839		
	5189		3431		5647		5843		
	5197	13.	5437		5651	16.	5849		
	5209		5441	12.	5653		5851		
	5227		5443		5657		5857		
	5231								

Nu-

Numeri primi
7. Chiliadis.

6007
6011
6029
6037
6043
12. 6047
6053
6067
6073
6079
6089
6091

6101
6113
6121
6131
6133
11. 6143
6151
6163
6173
6197
6199

6203
6211
6217
6221
6229
6247
6257
13. 6263
6269
6271
6277
6287
6299

6301
6311
6317
6323
6329
6337
6343
15. 6353
6359
6361
6367
6373
6379
6389
6397

6421
6427
6449
8. 6451
6469
6473
6481
6491

6521
6529
6547
6551
6553
11. 6563
6569
6571
6577
6581
6599

6607
6619
6637
6653
10. 6659
6661
6673
6679
6689
6691

6701
6703
6709
6719
6733
6737
12. 6761
6763
6779
6781
6791
6793

6803
6823
6827
6829
6833
12. 6841
6857
6863
6869
6871
6883
6899

6907
6911
6917
6947
6949
6959
13. 6961
6967
6971
6977
6983
6991
6997

Nu-

Numeri primi 8. Chiliadis.

7001
7013
7019
7027
9. 7039
7043
7057
7069
7079

7103
7109
7121
7127
10. 7129
7151
7159
7177
7187
7193

7207
7211
7213
7219
7229
11. 7237
7243
7247
7253
7283
7297

7307
7309
7321
7331
9. 7333
7349
7351
7369
7393

7411
7417
7433
7451
7457
11. 7459
7477
7481
7487
7489
7499

7507
7517
7523
7529
7537
7541
7547
15. 7549
7559
7561
7573
7577
7583
7589
7591

7603
7607
7621
7639
7643
12. 7649
7669
7673
7681
7687
7691
7699

7703
7717
7723
7727
10. 7741
7753
7757
7759
7789
7793

7817
7823
7829
7841
10. 7853
7867
7873
7877
7879
7883

7901
7907
7919
7927
10. 7933
7937
7949
7951
7963
7993

Numeri primi
9. Chiliadis.

8009
8011
8017
8039
8053
11. 8059
8069
8081
8087
8089
8093

8101
8111
8117
8123
8147
10. 8161
8167
8171
8179
8191

8209
8219
8221
8231
8233
8237
8243
14. 8263
8269
8273
8287
8291
8293
8297

8311
8317
8329
8353
9. 8363
8369
8377
8387
8389

8419
8423
8429
8. 8431
8443
8447
8461
8467

8501
8513
8521
8527
8537
12. 8539
8543
8563
8573
8581
8597
8599

8609
8623
8627
8629
8641
8647
13. 8663
8669
8677
8681
8689
8693
8699

8707
8713
8719
8731
8737
11. 8741
8747
8753
8761
8779
8783

8803
8807
8819
8821
8831
8837
13. 8839
8849
8861
8863
8867
8887
8893

8923
8929
8933
8941
9. 8951
8963
8969
8971
8999

Nu-

Numeri primi
10. Chiliadis.

	9001		9203		9413		9619		9811
	9007		9209		9419		9923		9871
	9011		9221		9421		9629		9829
	9013		9227		9431		9631		9833
	9029		6239		9433	13.	9643	12.	9839
11.	9041	11.	9241		9437		9649		9851
	9043		9257	15.	9439		9661		9857
	9049		9277		9461		9677		9859
	9059		9281		9463		9679		9871
	9067		9283		9467		9689		9883
	9091		9293		9473		9697		9887
	9103		9311		9479		9719		9901
	9109		9319		9491		9721		9907
	9127		9323		9497		9733		9923
	9133		9337		9511		9739		9929
	9137		9341		9521		9743	9.	9931
	9151	11.	9343		9533	11.	9749		9941
12.	9157		9349	7.	9539		9767		9949
	9161		9371		9547		9769		9967
	9173		9377		9551		9781		9973
	9181		9391		9587		9787		
	9187		9397		9601		9791		
	9199		9403		9613		9803		

SECTIO VI.

De Progressionibus, rectangula triangula constituentibus, quorum latera sint rationalia.

QUO pacto rectangula triangula inveniri possint, quorum latera per numeros rationales exprimantur, ostenditur inferiùs Sectione 24. Id autem cum in componendis variis Quæstionibus sive Problematîs Geometricis ad irrationalium calculum evitandum plurimùm inserviat, aut ad ea in numeris proponenda, quibus illustrari & facilè solvi possint, magnum usum habeat: non injucundum fuerit, si ex Stifelio exposuero duas Progressiones, quas in eundem finem adfert in Commentariis suis ad 1^mum caput Algebræ Christophori Rudolphi, Germanicè editæ. Quæ sunt hujusmodi:

$$1\tfrac{1}{3}.\ 2\tfrac{2}{5}.\ 3\tfrac{3}{7}.\ 4\tfrac{4}{9}.\ 5\tfrac{5}{11}.\ 6\tfrac{6}{13}.\ 7\tfrac{7}{15}.\ 8\tfrac{8}{17},\ \&c.$$

$$1\tfrac{7}{8}.\ 2\tfrac{11}{12}.\ 3\tfrac{15}{16}.\ 4\tfrac{19}{20}.\ 5\tfrac{23}{24}.\ 6\tfrac{27}{28}.\ 7\tfrac{31}{32}.\ 8\tfrac{35}{36},\ \&c.$$

In quarum utraque tres animadvertere licet Progressiones Arithmeticas distinctas: nimirum integrorum, tum numeratorum, ac deinde etiam denominatorum. Sunt autem omnes divisionum quotientes duorum numerorum, quorum quadrata, cùm adduntur, etiam quadratum efficiunt.

Hinc ad eos obtinendos, si integer multiplicetur per denominatorem & producto addatur numerator, fiet major quæsitus. Minor verò quæsitus semper est denominator.

Sic assumendo quotientem $2\frac{11}{12}$, quoniam 2 per 12 multiplicatus & producto 24 additus 11, fit 35: poterunt 35 & 12 assumi pro duobus lateribus circa rectum angulum trianguli rectanguli, cujus item 3^tium latus seu hypotenusa sit rationalis. Etenim additis illorum quadratis 1225 & 144, cum inde, per 47 Prop. 1^mi libri Elem. Euclidis, pro quadrato hypotenusæ reperiatur quadratus numerus 1369, cujus radix est 37: patet hypotenusam fore 37. Atque ita de aliis.

Porrò quoniam duabus hisce Stifelii Progressionibus Simon Jacobi Coburgensis in majori sua Arithmetica, Germanicè conscriptâ, pag. 240 sex alias superaddit, seque mille ejusmodi Progressiones exhibere posse scribit, non autem artem quâ inveniendæ sint tradens: haud afferre pigebit modum, quo infinitæ inveniri queant, qualem eum olim ab insigni Arithmetico D. Nicolao Huberti à Persijn didici. Ipsius autem modus talis est.

As-

Aſſumptis duobus rationis alicujus terminis, ut ex iis inveniatur numerator, oportet, uno termino per alterum multiplicato, obſervare utrum productum ſit par an impar. Si enim impar fuerit, deſignabit illud ipſum numeratorem; at verò pari exiſtente, ſi ejuſdem producti ſumatur duplum.

Deinde ad inveniendum denominatorem, addantur dicti rationis termini, & ſumma, ſi impar eſt, per terminorum differentiam multiplicata, dabit denominatorem; at verò pari exiſtente, ſi hujus producti ſumatur ſemiſſis.

Porrò ut 2^{dus} obtineatur numerator, multiplicetur terminorum differentia per 2, ſi par fuerit; aut per 4, ſi impar ſit, productoque ducto in majorem terminum, quod exſurgit addatur numeratori priùs invento, & fiet numerator 2^{dus}.

Denique ad habendum 2^{dum} denominatorem, addatur quadratum differentiæ terminorum, ſi id par fuerit, aut ejuſdem duplum, ſi impar, ad denominatorem priùs inventum, fietque denominator 2^{dus}.

Ex quibus inde facile eſt per ſupra dicta reliquos Progreſſionis terminos reperire in infinitum.

Ut ſi termini rationis ſint 1 & 2. quoniam hi in ſe invicem ducti faciunt 2, numerum parem, ideo 4, ipſius duplum, erit numerator.

Deinde quia additis 1 & 2, ſumma 3 eſt impar numerus, hinc multiplicato 3 per 1, differentiam terminorum, fiet 3, denominator.

Porrò quoniam 1, differentia terminorum, impar eſt, hinc ſi ipſa multiplicetur per 4, ac rurſus productum 4 per 2, majorem terminum: erit 12, ſumma hujus producti & prioris numeratoris, numerator 2^{dus}.

Denique quia 1, quadratum differentiæ terminorum impar eſt, ideo ſi duplum ejus 2 ad denominatorem inventum 3 addatur, fiet 5 denominator 2^{dus}. Adeò ut $\frac{4}{3}$ & $\frac{12}{5}$ ſinguli exhibeant duo trianguli latera, quæ ſunt circa rectum angulum, cujuſquè trianguli hypotenuſa item rationalis ſit.

Quibus ita conſtitutis, cùm numeratoribus per denominatores diviſis oriantur $1\frac{1}{3}$ & $2\frac{2}{5}$ qui priores ſunt duo termini $1^{mæ}$ ex duabus ſupra allatis Progreſſionibus Stifelii: patet, hanc eandem ex duplæ rationis terminis 1 & 2 originem ducere, ac reliquos ejuſdem Progreſſionis terminos ex iis nullo negotio inveniri, ſi modò integri, tum numeratores, ac deinde etiam denominatores ſinguli ſeparatim Arithmeticam Progreſſionem conſtituere fingantur.

Ubi notandum, quòd, ficut ex terminis rationis 1 ad 2, ope prioris partis hujus regulæ invenimus numeratorem & denominatorem primæ fractionis $\frac{4}{3}$, ac deinde ope posterioris partis numeratorem & denominatorem 2dæ fractionis $\frac{12}{5}$, & ex binis hisce postea cæteras omnes, ut dictum est, ita ope solius primæ partis numeratorem ac denominatorem invenire liceat 2dæ, utendo ad id terminis rationis 2 ad 3; at verò reliquarum omnium sequentium, utendo ad id terminis rationum 3 ad 4, 4 ad 5, 5 ad 6, &c.

Idem de sequentibus est intelligendum.

Ut si termini rationis fuerint 1 & 3, invenietur inde per priorem regulæ partem fractio $\frac{3}{4}$; sumendoque terminos rationis 3 ad 5, invenietur inde fractio $\frac{15}{8}$, atque ita porrò reliquæ $\frac{35}{12}$, $\frac{63}{16}$, $\frac{99}{20}$, $\frac{143}{24}$, $\frac{195}{28}$, $\frac{255}{32}$, $\frac{323}{36}$, assumendo terminos rationum 5 ad 7, 7 ad 9, 9 ad 11, 11 ad 13, 13 ad 15, 15 ad 17, 17 ad 19. Unde 2da Stifelii resultat Progressio $\frac{3}{4}$, $1\frac{7}{8}$, $2\frac{11}{12}$, $3\frac{15}{16}$, $4\frac{19}{20}$, $5\frac{23}{24}$, $6\frac{27}{28}$, $7\frac{31}{32}$, $8\frac{35}{36}$ &c.

Eodem modo invenitur, quòd termini Progressionis $\frac{8}{15}$, $1\frac{23}{33}$, $2\frac{38}{51}$, $3\frac{53}{69}$, $4\frac{68}{87}$, $5\frac{83}{105}$, &c. fiunt ab hisce rationum terminis 1—4, 4—7, 7—10, 10—13, 13—16, 16—19, &c.

Et Progressionis $\frac{5}{12}$, $1\frac{17}{28}$, $2\frac{29}{44}$, $3\frac{41}{60}$, $4\frac{53}{76}$, $5\frac{65}{92}$, &c. fiunt ab his 1—5, 5—9, 9—13, 13—17, 17—21, 21—25: &c.

Et Progressionis $\frac{12}{35}$, $1\frac{47}{85}$, $2\frac{82}{135}$, $3\frac{117}{185}$, $4\frac{152}{235}$, $5\frac{187}{285}$. &c. fiunt ab his 1—6, 6—11, 11—16, 16—21, 21—26, 26—31. &c.

Et Progressionis $\frac{7}{24}$, $1\frac{31}{60}$, $2\frac{55}{96}$, $3\frac{79}{132}$, $4\frac{103}{168}$, $5\frac{127}{204}$. &c. fiunt ab his 1—7, 7—13; 13—19, 19—25, 25—31, 31—37. &c.

Atque ita de aliis.

Haud secus termini Progressionis $\frac{20}{21}$, $2\frac{2}{39}$, $3\frac{5}{57}$, $4\frac{8}{75}$, $5\frac{11}{93}$, $6\frac{14}{111}$. &c. fiunt ab his 2—5, 5—8, 8—11, 11—14, 14—17, 17—20. &c.

Et Progressionis $1\frac{1}{20}$, $2\frac{5}{36}$, $3\frac{9}{52}$, $4\frac{13}{68}$, $5\frac{17}{84}$, $6\frac{21}{100}$. &c. fiunt ab his 3—7, 7—11, 11—15, 15—19, 19—23, 23—27. &c.

Et Progressionis $1\frac{7}{65}$, $2\frac{22}{115}$, $3\frac{37}{165}$, $4\frac{52}{215}$, $5\frac{67}{265}$, $6\frac{82}{315}$. &c. fiunt ab his 4—9, 9—14, 14—19, 19—24, 24—29, 29—34. &c.

Atque ita de aliis.

Cæterùm sciendum, quâlibet harum fractionum exhiberi semper triangulum in minimis numeris, eandem cum ipsis rationem habentibus: ac proinde si hæc triangula omnia similiter posita concipiantur, ipsa continuò fore dissimilia seu alterius atque alterius semper speciei. Adeò ut quis hâc arte nullo negotio centum & plura triangula intra horam reperire valeat, quæ à se invicem sint diversa.

SECTIO VII.

De modo inveniendi numeros, qui per datos divisi certos post divisionem relinquant.

QUò Sectio hæc ritè intelligatur, explicabimus eam per sequentes quæstiones.

1ma *Quæstio*:

Invenire numerum, qui per 2, 3, & 5 divisus in divisione relinquat 1; at si per 7 dividatur, ut nihil remaneat.

Ad hoc suppositâ $2 \propto a$, $3 \propto b$, $5 \propto c$, & $7 \propto d$, cum nulla hîc quotorum sit ratio habenda, patet, conditionibus requisitis satisfactum iri, si pro quæsito numero statuamus dz, vel $av + 1$, vel $bx + 1$, vel $cy + 1$; adeò ut habeatur hæc æqualitas: $dz \propto av + 1 \propto bx + 1 \propto cy + 1$, seu hæc $dz - 1 \propto av \propto bx \propto cy$.

E qua liquet, ad quæsitum numerum obtinendum, opùs tantùm esse quærere numerum, qui dividi possit per 2, 3, & 5, & si unitate augeatur, dividi queat per 7.

Quoniam autem ad id sumendo primùm 30, minimum communem dividuum numerorum 2, 3, & 5, eique addendo unitatem summa 31 absque reliquo per 7 dividi nequit: progrediendum erit ad duplum, triplum, quadruplum, aliudve multiplum ipsius 30. Hinc cum sumendo 30 ter, & producto addendo 1, summa 91 per 7 dividi possit, erit 91 numerus quæsitus.

Porrò ne quis in his multiplis sumendis divisionem pluries tentare opus habeat, illud operosum putans, poterit quæsitum numerum è priori divisione nullo negotio elicere. Nam cum 7 in 30 contineatur quater, & remaneat 2: fiet ut in 90, ejus triplo, contineatur 12^cies^, & 6 remaneat; adeoque 91 per 7 sine reliquo dividatur, oriaturque 13.

Cæterùm cum infiniti sint numeri, qui quæsito satisfaciant, poterimus invento jam primo seu omnium minimo 90 ex eo facilè reliquos sequentes invenire.

Etenim invento divisorum datorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi dividuo 210, cum ipse ad 91 additus faciat numerum 301, qui iisdem divisionum legibus est obnoxius cum invento 91: idcirco ipse erit alter quæsitus. Huic autem si rursus addas 210, fiet 511, tertius quæsitus.

situs. Atque ita in infinitum, addendo semper 210 ad ultimum inventum.

Notandum autem, ut quæstio proposita solvi queat, oportere unumquemque datorum numerorum 2, 3, & 5 cum 7 esse primum. Aliàs enim fieri nequit, ut ipsius 7 reperiatur aliquis multiplus, qui multiplum alterius cum eo non primi unitate excedat.

2da *Quæstio.*

Invenire numerum, qui divisus per 7 relinquat 2, per 11 divisus relinquat 1, & per 13 divisus relinquat 9.

Quoniam hæc Quæstio reducta, ut ante, ad æqualitatem, fit $7x + 2 \propto 11y + 1 \propto 13z + 9$, vel $7x + 1 \propto 11y \propto 13z + 8$, atque hæc ipsa, ad quæsitum numerum obtinendum, nos docet, sumendum esse numerum 11, aliumvé hujus multiplum, qui sit talis, ut ab eo ablatis 1 & 8 reliqui dividi possint per 7 & 13: patet, si ad id sumatur 99, noncuplum ipsius 11, & ab eo auferantur 1 & 8, reliquorum alterum 98 dividi per 7, & alterum 91 per 13. adeóque numerum inveniendum, qui per $7x + 2$, vel $11y + 1$, vel $13z + 9$ designatur, fore 100. Is enim per 7 divisus, relinquit 2, per 11 divisus relinquit 1, & per 13 divisus relinquit 9, sicut requirebatur.

Porrò ut infiniti ejusmodi numeri habeantur, opùs tantùm erit ad jam inventum 100 addere 1001, divisorum 7, 11, & 13 minimum communem dividuum, & fit 1101, alter quæsitus. Atque ita addendo continuò 1001 ad ultimò inventum invenientur semper alii ac alii in infinitum.

Cæterùm cum ad hujusmodi quæstiones solvendas modum ingeniosissimum excogitarit ante memoratus D. Nicolaus Huberti à Persijn, placuit eum, qualem ab ipso accepi, paucis hîc subjicere.

Ut ad solvendam 1mam Quæstionem, invento primùm divisorum 2, 3, 5, & 7 minimo communi dividuo 210, eóque per unumquemque ex ipsis bis diviso: considero quid in singulis secundis divisionibus relinquatur. Est autem reliquorum sequens habenda ratio:

```
       1̶
2̶1̶0̶|1̶0̶5̶|52.
  2|  2|
```

Quoniam in hac divisione relinquitur 1, erit 105 ut inferiùs pro multiplicatore sumendus.

```
      1̶1
2̶1̶0̶|7̶0̶|23.
  3| 3|
```

Similiter quia in hac divisione relinquitur 1, erit 70 eodem modo pro multiplicatore sumendus.

210

2
210 | 42 | 8.
5 | 5 |

Si in hac diviſione reliquum fuiſſet 1, debuiſſet pariter 42 pro multiplicatore accipi.

Sed jam 42 toties ſumi debet, ut, ſi per 5 dividatur, reliquum ſit 1, id eſt, ter ſumendus erit. Quod ut facili negotio exploretur, oportet tantùm inquirere, quoties reliquum 2 ſumendum ſit, ita ut ſi per 5 dividatur reliquum ſit 1. Et fit, ut ante, ter. Eodem modo fac in ſequentibus. Hinc ſumendo 42 ter fit 126, pro multiplicatore.

2
210 | 30 | 4.
7 | 7 |

Haud ſecus ſi reliquum in hac diviſione fuiſſet 1, debuiſſet itidem 30 pro multiplicatore aſſumi.

Nunc autem aſſumpto reliquo 2 toties, ita ut per 7 diviſo relinquatur 1, id eſt, quater, multiplico 30 per 4, & fit 120, pro multiplicatore.

Jam quo pacto ex inventis hiſce multiplicatoribus quæſitus numerus reperiatur, ſequens operatio indicabit.

Diviſores.	Reliqua.	Multiplicatores.	Producta.
2 .	1	105	105
3 .	1	70	70
5 .	1	126	126
7 .	0	120	0
		ſumma	301

9
Divid. 301 per min.com.div. 210 { 1. Reliquum 91 arguit quæſitum numerum.

Similiter ad ſolvendam 2^{dam} Quæſtionem, Invento diviſorum 7, 11, 13 minimo communi dividuo 1001, eoque bis per unumquemque ex ipſis diviſo, reliquorum cujuſque diviſionis ſequens habeatur ratio.

32
1001 | 14 (3 | 20.
7 | 7 |

Si in hac diviſione reliquum fuiſſet 1, debuiſſet 143 pro multiplicatore accipi.

Jam autem aſſumpto reliquo 3 toties, ita ut per 7 diviſo relinquatur 1, id eſt, quinquies: multiplico 143 per 5, & fit 715, pro multiplicatore.

1 13
1001 | 91 | 8. Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 91 pro
11 | 11 | multiplicatore accipi.

Jam autem assumpto reliquo 3 toties, ita ut per 11 diviso relinquatur 1, id est, quater: multiplico 91 per 4, & fit 364 pro multiplicatore.

9 12
1001 | 77 | 5. Si in hac divisione reliquum fuisset 1, debuisset 77 pro
13 | 13 | multiplicatore accipi.

Jam autem assumpto reliquo 12 toties, ita ut per 13 diviso relinquatur 1, id est, duodecies: multiplico 77 per 12, & fit 924 pro multiplicatore.

Ex multiplicatoribus inventis quæsitum numerum sic elicies.

Divisores.	Reliqua.	Multiplicatores.	Producta.
7 .	2 ——	715	1430
11 .	1 ——	364	364
13 .	9 ——	924	8316
		summa.	10110

Divide 10110 per min. com. div. 1001 { 10. Reliquum indicat quæsitū numerum.

Atque ita de aliis.

De his tradidit quoque celebris Arithmeticus Simon Jacobi Coburgensis in Arithmetica sua majori, sed multiplicatores invenire non docet.

SECTIO VIII.

Praxis ponderandi.

CUM utilis pariter atque jucunda speculatio sit censenda, quæ ponderandi praxin concernit, docens paucis ponderibus complures libras expendere: visum fuit præsentem de illâ sectionem instituere.

Quoniam autem dupliciter id fieri posse compertum est, vel scilicet additione solâ, vel additione & subtractione simul: explicabo subinde quæ ad utrumque modum pertinent.

Ad

Ad priorèm modum pertinet Progreſſionis duplæ conſideratio ſequens:

nimirum,

Si, ab unitate in ratione dupla acceptis quotlibet numeris, ſumantur pondera tot librarum, quot Progreſſionis hujus termini indicant: poterunt eorum beneficio per ſolam additionem libræ omnes obtineri, quas aliquis ad ponderandum propoſuerit:

Etenim, aſſumptis duobus primis 1 & 2, ſi 1 ℔ in lancem ponam pendet 1 libram; & ſi 2 ℔ in lancem ponam pendent 2 libras; ac deinde ſi 1 & 2 ℔ ſimul in lancem ponam pendent 3 libras. Quòd ſi verò ad hæc duo pondera 1 & 2 librarum tertium acceſſerit pondus 4 librarum, atque hoc pondus 4 librarum lanci committatur, habebo 4 libras; quibus ſi 1 ℔ addatur, habebo 5 libras; tollendo autem hanc 1 ℔ ejuſque loco 2 ℔ immittens, habebo unà cum prædictis 4 libris 6 libras; his ſi præterea apponatur 1 ℔, fient 7 libræ. Sicque 1, 2, & 4 libris ponderare potero libras omnes ab 1 uſque ad 7 ℔.

Similiter beneficio quatuor ponderum 1, 2, 4, & 8 librarum potero librare 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, & 15 libras; & ope 5 ponderum 1, 2, 4, 8, & 16 librarum libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 31 ℔. Pari ratione licebit cum ſex hiſce 1, 2, 4, 8, 16, & 32 librarum expendere libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 63 ℔; & ope horum ſeptem 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64 librarum libras omnes ab 1 ℔ uſque ad 127 libras. Atque ſic ulteriùs in infinitum.

Porrò ad inveſtigandum, quo pacto, aſſumptis compluribus horum ponderum, ipſa ſimul jungi debeant, ut ordine libræ omnes mediantibus iis ponderentur: deſigno 1, 2, 4, 8 &c. per *a*, *b*, *c*, *d*, &c. harumque quæro electiones omnes, ſicut 1^{mâ} ſectione oſtenſum fuit, & invenio electiones ſequentes:

1							
a							
2	3						
b.	*ab.*						
4	5	6	7				
c.	*ac.*	*bc.*	*abc.*				
8	9	10	11	12	13	14	15
d.	*ad.*	*bd.*	*abd.*	*cd.*	*acd.*	*bcd.*	*abcd.*

Indicantes ordine omnes libras, quæ datis quatuor ponderibus 1, 2, 4,

1, 2, 4, & 8 librarum appendi possunt, ut & quo pacto dicta pondera conjungi debeant.

Idem de aliis compluribus in infinitum intellige.

In posterioris modi explanationem lubet hoc loco in medium adducere, quæ à Stifelio afferuntur in commentariis suis ad 1mum caput Algebræ Christophori Rudolphi, ubi hæc de Progressione tripla scribit:

Progreßio 1. 3. 9. 27. 81. 243. 729 &c. singularem quoque suam habet proprietatem. Si enim pondera accipiantur totidem librarum quot hujus Progreßionis termini indicant: poterimus cum duobus primis, 1 & 3 librarum, ponderare 1, 2, 3, & 4 libras. Nam si 1 ℔ in lancem ponam, pendet unam libram; & si 3 ℔ ponam in alteram lancem, pendent hæ 3 ℔ non nisi 2 libras, propter 1 ℔ in priori lance positam: quam libram si tollam, ponderabo 3 ℔; at verò si unà simul jungam, habebo 4 libras.

Eodem modo ope trium priorum librarum 1, 3, & 9 ponderari poterunt libræ sequentes 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, & 13. Sic & 1, 3, 9, 27 libræ, facientes simul 40 libras, inservire poterunt ad quemvis librarum numerum ab 1 ℔ usque ad 40 ℔ ponderandum. Haud secus si quinque sumantur pondera, nimirum: 1, 3, 9, 27, & 81 librarum, poterunt eorum beneficio ponderari omnes libræ ab 1 ℔ usque ad 121 libras. Et per sex 1, 3, 9, 27, 81, & 243 omnes libræ ab 1 usque ad 364. Atque ita porrò in infinitum.

Quoniam igitur ex his constat, utendo numeris progressionis triplæ, ope pauciorum ponderum plures ponderari libras, quàm si in eundem finem uteremur ponderibus progressionis duplæ; non è re fore existimo, si hic deinceps, ut ante, quo pacto hæc pondera separatim utrique lanci imponenda sint, ad omnes ordine libras expendendas, ostendam: ad quod investigandum & evulgandum Clarissimus Vir-Juvenis D. Theodorus Cranen, L. A. M. ac Med. Doctor Mathematumque peritissimus, me incitavit.

Ut autem pateat, quæ ratiocinatio nos ad terminorum hujus Progressionis inventionem deduxerit, sequentem propono quæstionem:

Invenire duos, tres, pluresvé numeros, qui soli sumpti ut & modis omnibus additi ac subtracti, faciant numeros ab unitate in serie naturali excrescentes.

Primò ad inveniendos duos hujusmodi numeros, pono pro uno 1, & pro

& pro altero z. Restat igitur ut soli sumpti, ut & additi ac subtracti, faciant numeros ab unitate in serie naturali excrescentes. Unde, cum hinc fiant 1, $z-1$, z, & $z+1$, relinquitur, ut per eos designentur numeri 1, 2, 3, & 4.

E quibus elicitur, sumendo 1 pro 1mo, ad unam libram ponderandam, pro 2do z accipiendum esse 3, hisque binis ad quatuor libras nec ultra ascendi posse.

Deinde ad inveniendos tres, pono pro 1mo 1, pro 2do z, & pro 3^{tio} y. Et manifestum est, si à tertio seu majori y abstulero duos primos 1 & z, reliquum $y-z-1$ indicare debere librarum numerum, omnium minimum, qui à tribus ponderibus ponderari potest, hoc est, ipsum designare debere 5 libras. Unde ad $y-z-1$ addendo 1, designabit $y-z$ sex libras. Cui rursus unitate additâ, fit $y-z+1$ pro 7 libris. Huic verò si denuo addatur unitas, fiet $y-z+2$, pro 8 libris designandis. Sed cum nullum pondus 2 librarum habeam, at verò ejus loco assumere possim $z-1$, fit ut ad $y-z$ addendo $z-1$ summa $y-1$ designet 8 libras. Ad quem si iterum unitatem addam, habebo y ad 9 libras designandas.

Et liquet, si pro 1mo quæsitorum numerorum sumatur 1, & pro 2do z. 3, tunc pro 3^{tio} y accipiendum fore 9. Cui si ulteriùs addidero 1, tum $z-1$, tum z, tum $z+1$: habebo $y+1$, $y+z-1$, $y+z$, & $y+z+1$, ad ordine sequentium librarum numeros 10, 11, 12, & 13, nec ultra, per inventa hæc tria pondera expendendos.

Porrò ad inveniendos quatuor numeros, pono pro 1mo 1, pro 2do z, pro 3^{tio} y, & pro quarto x. Et evidens est, si ab hoc quarto seu majori x sustulero tres priores 1, z, & y, reliquum $x-y-z-1$ indicare librarum numerum, qui omnium minimus à quatuor ponderibus libretur; adeoque ipsum designare 14 libras. Unde quartus x facilè innotescit. Etenim cum $y+z+1$ & $x-y-z-1$, indicantes 13 & 14 libras, simul additi in unam summam cöalescant, quæ est x, designabit x. 27 libras. Quibus igitur quatuor ponderibus, si omnia simul sumantur, usque ad 40 libr. ascendetur. Similiterque si quinque numeri quærantur, & pro quinto ponatur v, designabit $v-x-y-z-1$ libras 41. Cui si addidero $x+y+z+1 \propto 40$, habebo $v \propto 81$. Atque ita ulteriùs in infinitum.

His igitur ita se habentibus, superest ut explicemus, quo pacto ad praxin referenda sint.

Quantùm itaque ad primum modum, quo libræ quotlibet beneficio ponderum duplæ Progressionis ordine ponderari possunt, perin-

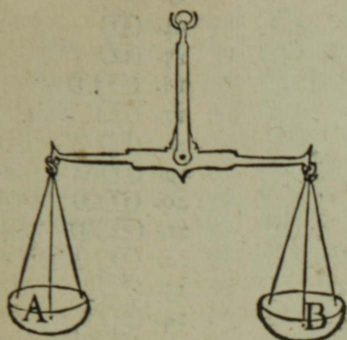
de atque per literas ***a, b, ab, c, ac, bc, abc, d, ad, bd, abd, cd, acd, bcd, abcd,*** &c. indicatur: oportet tantùm in locum ipſarum *a, b, c, d,* &c. quibus ad pondera 1, 2, 4, 8, &c. librarum deſignanda uſi ſumus, ſubrogare numeros 1, 2, 4, 8, &c. eoſque hiſce characteribus inſignire ①, ②, ④, ⑧, &c. Quæ porrò prout ſic inſignita ſeorſim vel junctim, ſicut præcedentes literæ indicant, in lancem A immiſſa fuerint, ordine pondera exhibebunt, ad quemlibet librarum numerum expendendum.

Quod ſecundum modum concernit, quo libræ quotvis ope ponderum progreſſionis triplæ ordine ponderantur, omnino ſicut literæ $1, z-1, z, z+1, y-z-1, y-z, y-z+1, y-1, y, y+1, y+z-1, y+z, y+z+1$ &c. demonſtrant: opus ſolummodò erit in locum ipſarum 1, *z, y, x, v,* &c., quæ pondera 1, 3, 9, 27, 81, &c. librarum deſignare inventa ſunt, ſubſtituere numeros 1, 3, 9, 27, 81, &c., tribuendo iis ſequentes characteres ①, ③, ⑨, (27), (81), &c.

Cum autem in his ponderibus deſignandis contingat ut aliis ſignum +, aliis verò ſignum — præfigatur: ſcire oportet eo caſu pondera utrique lanci eſſe committenda, nimirum illa, quæ abſque ſigno vel per + denotantur, debere lanci A imponi; at verò quæ per — deſignantur eſſe lanci B aſsignanda. Hæc enim, cum ſemper ab iis, quæ in A, præponderentur, faciunt, ut in ordine librandis quotcunque libris compenſatio juſta ad amuſsim ubique adhibeatur.

Cæterùm quoniam ponderandi praxis in omni fermè negotiatione uſu venit, placuit dilucidioris explicationis ergò eorum, quæ oſtenſa ſunt, duas hîc tabellas ſubjungere, quarum altera, ordine tradit libras omnes ab 1 uſque ad 127 ℔, quæ ope 7 ponderum 1, 2, 4, 8, 16, 32, & 64 librarum ſecundùm priorem modum expendi poſſunt; altera, omnes libras ab 1 uſque ad 121 ℔, quæ beneficio 5 ponderum 1, 3, 9, 27, & 81 librarum juxta poſteriorem modum librari queunt. Ubi præterea advertendum, utramque eodem modo de libræ partibus & minutiis eſſe intelligendam, ac proinde earundem uſum in onerum, merciumque traditione & receptione quàm maximè eſſe conſpicuum: ita ut in foris, lanienis, ac officinis denique quibuſvis, ubi ponderum ratio haberi ſolet, haud parvo cum emolumento uſurpentur.

A eſt



A } est lanx, in qua collocari debent { pondera.
B } { merces.

C. Sunt libræ mercium expendendæ.

D. Sunt pondera lanci A imponendæ.

E. Sunt pondera unà cum mercibus lanci B imponenda.

Tabella prior.

C.	D
1.	①
2.	②
3.	①②
4.	④
5.	①④
6.	②④
7.	①②④
8.	⑧
9.	①⑧
10.	②⑧
11.	①②⑧
12.	④⑧
13.	①④⑧

Tabella posterior.

C.	D	E
1.	①	
2.	③	①
3.	③	
4.	③①	
5.	⑨	③①
6.	⑨	③
7.	⑨①	③
8.	⑨	①
9.	⑨	
10.	⑨①	
11.	⑨③	①
12.	⑨③	
13.	⑨③①	

14. ②④⑧

Tabella prior. — Tabella posterior.

C.	D	C.	D	E
14.	②④⑧	14.	(27)	⑨③①
15.	①②④⑧	15.	(27)	⑨③
16.	(16)	16.	(27)①	⑨③
17.	①(16)	17.	(27)	⑨①
18.	②(16)	18.	(27)	⑨
19.	①②(16)	19.	(27)①	⑨
20.	④(16)	20.	(27)③	⑨①
21.	①④(16)	21.	(27)③	⑨
22.	②④(16)	22.	(27)③①	⑨
23.	①②④(16)	23.	(27)	③①
24.	⑧(16)	24.	(27)	③
25.	①⑧(16)	25.	(27)①	③
26.	②⑧(16)	26.	(27)	①
27.	①②⑧(16)	27.	(27)	
28.	④⑧(16)	28.	(27)①	
29.	①④⑧(16)	29.	(27)③	①
30.	②④⑧(16)	30.	(27)③	
31.	①②④⑧(16)	31.	(27)③①	
32.	(32)	32.	(27)⑨	③①
33.	①(32)	33.	(27)⑨	③
34.	②(32)	34.	(27)⑨①	③
35.	①②(32)	35.	(27)⑨	①
36.	④(32)	36.	(27)⑨	
37.	①④(32)	37.	(27)⑨①	
38.	②④(32)	38.	(27)⑨③	①
39.	①②④(32)	39.	(27)⑨③	
40.	⑧(32)	40.	(27)⑨③①	
41.	①⑧(32)	41.	(81)	(27)⑨③①
42.	②⑧(32)	42.	(81)	(27)⑨③
43.	①②⑧(32)	43.	(81)①	(27)⑨③
44.	④⑧(32)	44.	(81)	(27)⑨①
45.	①④⑧(32)	45.	(81)	(27)⑨
46.	②④⑧(32)	46.	(81)①	(27)⑨
47.	①②④⑧(32)	47.	(81)③	(27)⑨①
48.	(16)(32)	48.	(81)③	(27)⑨
49.	①(16)(32)	49.	(81)③①	(27)⑨

Tabella prior.

C.	D
50.	②(16)(32)
51.	①②(16)(32)
52.	④(16)(32)
53.	①④(16)(32)
54.	②④(16)(32)
55.	①②④(16)(32)
56.	⑧(16)(32)
57.	①⑧(16)(32)
58.	②⑧(16)(32)
59.	①②⑧(16)(32)
60.	④⑧(16)(32)
61.	①④⑧(16)(32)
62.	②④⑧(16)(32)
63.	①②④⑧(16)(32)
64.	(64)
65.	①(64)
66.	②(64)
67.	①②(64)
68.	④(64)
69.	①④(64)
70.	②④(64)
71.	①②④(64)
72.	⑧(64)
73.	①⑧(64)
74.	②⑧(64)
75.	①②⑧(64)
76.	④⑧(64)
77.	①④⑧(64)
78.	②④⑧(64)
79.	①②④⑧(64)
80.	(16)(64)
81.	①(16)(64)
82.	②(16)(64)
83.	①②(16)(64)
84.	④(16)(64)
85.	①④(16)(64)

Tabella posterior.

C.	D	E
50.	(81)	(27)③①
51.	(81)	(27)③
52.	(81)①	(27)③
53.	(81)	(27)①
54.	(81)	(27)
55.	(81)①	(27)
56.	(81)③	(27)①
57.	(81)③	(27)
58.	(81)③①	(27)
59.	(81)⑨	(27)③①
60.	(81)⑨	(27)③
61.	(81)⑨①	(27)③
62.	(81)⑨	(27)①
63.	(81)⑨	(27)
64.	(81)⑨①	(27)
65.	(81)⑨③	(27)①
66.	(81)⑨③	(27)
67.	(81)⑨③①	(27)
68.	(81)	⑨③①
69.	(81)	⑨③
70.	(81)①	⑨③
71.	(81)	⑨①
72.	(81)	⑨
73.	(81)①	⑨
74.	(81)③	⑨①
75.	(81)③	⑨
76.	(81)③①	⑨
77.	(81)	③①
78.	(81)	③
79.	(81)①	③
80.	(81)	①
81.	(81)	
82.	(81)①	
83.	(81)③	①
84.	(81)③	
85.	(81)③①	

Tabella prior.

C.	D
86.	②④(16)(64)
87.	①②④(16)(64)
88.	⑧(16)(64)
89.	①⑧(16)(64)
90.	②⑧(16)(64)
91.	①②⑧(16)(64)
92.	④⑧(16)(64)
93.	①④⑧(16)(64)
94.	②④⑧(16)(64)
95.	①②④⑧(16)(64)
96.	(32)(64)
97.	①(32)(64)
98.	②(32)(64)
99.	①②(32)(64)
100.	④(32)(64)
101.	①④(32)(64)
102.	②④(32)(64)
103.	①②④(32)(64)
104.	⑧(32)(64)
105.	①⑧(32)(64)
106.	②⑧(32)(64)
107.	①②⑧(32)(64)
108.	④⑧(32)(64)
109.	①④⑧(32)(64)
110.	②④⑧(32)(64)
111.	①②④⑧(32)(64)
112.	(16)(32)(64)
113.	①(16)(32)(64)
114.	②(16)(32)(64)
115.	①②(16)(32)(64)
116.	④(16)(32)(64)
117.	①④(16)(32)(64)
118.	②④(16)(32)(64)
119.	①②④(16)(32)(64)
120.	⑧(16)(32)(64)
121.	①⑧(16)(32)(64)

Tabella posterior.

C.	D	E
86.	(81)⑨	③①
87.	(81)⑨	③
88.	(81)⑨①	③
89.	(81)⑨	①
90.	(81)⑨	
91.	(81)⑨①	
92.	(81)⑨③	①
93.	(81)⑨③	
94.	(81)⑨③①	
95.	(81)(27)	⑨③①
96.	(81)(27)	⑨③
97.	(81)(27)①	⑨③
98.	(81)(27)	⑨①
99.	(81)(27)	⑨
100.	(81)(27)①	⑨
101.	(81)(27)③	⑨①
102.	(81)(27)③	⑨
103.	(81)(27)③①	⑨
104.	(81)(27)	③①
105.	(81)(27)	③
106.	(81)(27)①	③
107.	(81)(27)	①
108.	(81)(27)	
109.	(81)(27)①	
110.	(81)(27)③	①
111.	(81)(27)③	
112.	(81)(27)③①	
113.	(81)(27)⑨	③①
114.	(81)(27)⑨	③
115.	(81)(27)⑨①	③
116.	(81)(27)⑨	①
117.	(81)(27)⑨	
118.	(81)(27)⑨①	
119.	(81)(27)⑨③	①
120.	(81)(27)⑨③	
121.	(81)(27)⑨③①	

C. D.

122. ②⑧(16)(32)(64)
123. ①②⑧(16)(32)(64)
124. [4]⑧(16)(32)(64)
125. ①[4]⑧(16)(32)(64)
126. ②[4]⑧(16)(32)(64)
127. ①②[4]⑧(16)(32)(64)

SECTIO IX.

Ratio inveniendi numeros amicabiles, hoc eſt, duos numeros, quorum partes aliquotæ, cùm adduntur, eos ipſos vice verſâ componunt.

SUnt qui exiſtimant, plures operationes Arithmeticas reperiri, quæ Algebræ non ſubjiciantur, inter quos eſt Arithmeticus haud ignobilis Michaël Stifelius, qui in commentariis ſuis ſuper Algebra Chriſtophori Rudolphi, poſt reſolutionem quæſtionum, quæ ad Cubicam Æquationem aſcendunt, hæc ſcribit:

„ Wie wol aber ein jede Coß einen unaußſprechlichen begriff hat
„ in ſich allerley künſtlicher rechnung/ dennoch findet man viel ſeiner
„ rechnung welche der Coß nicht ſind underworffen / ſondern neben
„ der Coß flieſſen auß der Theorica / welchs ich wol wolte mit vielen
„ feynen Exempeln beweyſen / wil es aber hie bey einem oder zweyen
„ Exempeln beruhen laſſen.

Quorum ſenſus hic eſt:

At licet reſolutio æquationis cujuſque gradus ineffabilem uſum habeat expediendi quemlibet artificioſum calculum, nihilominus tamen multæ egregiæ ſupputationes reperiuntur, quæ Algebræ non ſunt obnoxiæ, ſed citra eam ex Theorica fluunt, quod multis utique elegantibus exemplis demonſtrare poſſem, niſi id uno aut altero exemplo oſtendiſſe ſufficeret.

Eſt autem primum, quod in eum finem adfert, hujuſmodi.

Quære duos numeros, ita ut partes omnes aliquotæ minoris ſimul additæ faciant majorem numerum, & partes omnes aliquotæ majoris ſimul additæ faciant minorem numerum.

Quapropter cum ego longè aliter ſtatuendum eſſe putem, oſtendam quo pacto Algebræ beneficio non tantùm duos hoſce numeros reperire in procinctu ſit; ſed etiam quiſnam ſit progreſſus in infini-

tum investigandi semper alios duos, qui idem præstent; siquidem hoc id ipsum est, quod præsens Sectio innuit.

Ad quos igitur inveniendos, pono pro uno numero $4x$, & pro altero $4yz$, hoc est, a^2x & a^2yz.

Unde cum per 1^{mam} Sectionem partes aliquotæ ipsius $4x$ sint 1, 2, 4, x, & $2x$: erit $7 + 3x \propto 4yz$

& fit $x \propto \frac{4yz-7}{3}$

adeoque $4x \propto \frac{16yz-28}{3}$.

Eodem modo, cum partes aliquotæ ipsius $4yz$ sint 1, 2, 4, y, $2y$, $4y$, z, $2z$, $4z$, yz, & $2yz$:

erit $4x$, hoc est, $\frac{16yz-28}{3} \propto 7 + 7y + 7z + 3yz$

Unde, reductâ æquatione, invenitur $y \propto \frac{3z+7}{z-3}$, seu $3 + \frac{16}{z-3}$,

Vel etiam $z \propto \frac{3y+7}{y-3}$, seu $3 + \frac{16}{y-3}$.

Hinc cum, pro y assumpto primo numero 5, pro z inveniatur primus 11, & pro x primus 71, è quibus $4x$ fit $\propto$ 284, & $4yz \propto 220$: patet, quæsitos numeros fore 284 & 220.

Jam verò ut constet num & minores duo numeri quàm 284 & 220 inveniri possint, qui idem præstent, pono pro uno numero ^2x, & pro altero $2yz$, hoc est, ax & ayz.

Vnde cum operando, ut supra, inveniatur $x \propto 2yz - 3$,

& $y \propto 1 + \frac{4}{z-1}$,

vel $z \propto 1 + \frac{4}{y-1}$:

patet, si pro y sumatur primus numerus 5, tunc pro z inveniri primum 2, & pro x primum 17. Verùm quia sic pro z idem fit numerus 2, qui hypothesium $2x$ & $2yz$, quique has easdem destruit, ac in locum ax & ayz substituit ax & aay: evidens fit inventis hisce numeris quæsito non satisfactum iri. Quare cum sumendo pro y alium primum numerum, ut 3, tunc pro z etiam inveniatur 3, quod perinde po-

poſitiones convertit, præterquam quod eo caſu x quoque non ſit primus; nec præter jam aſſumptos ullos alios aſſumere liceat (ſiquidem pro y, unde z & x ſunt inveniendæ, talis primus numerus aſſumi debet, ut, ab eo ſublatâ unitate, reliquum dividere poſſit 4): argumentum eſt, juxta præcedentem viam, minores duos numeros quàm ſupra inventos 284 & 220 non reperiri.

Sed dicet aliquis eos fortè aliâ viâ inventum iri, utpote pro iis ponendo $2x$ & yz, hoc eſt, ax & yz; vel etiam xy & xyz. Verùm cum juxta priorem hanc ſuppoſitionem inveniatur $z \propto \frac{y+7}{2y-1}$, & juxta poſteriorem $1+x+y+z+xy+xz+yz \propto xy$; illic autem pro y nullus primus numerus aſſumi poſſit, ut inde z & x reperiantur, quales requiruntur; hîc verò æquatio omnino ſit impoſſibilis, idemque hoc in quavis alia ſuppoſitione contingat: concludo 284 & 220 eſſe omnium eorum, qui inveniri poſſunt, minimos.

Porrò ut quærantur duo alii majores, pono pro uno numero $8x$ & pro altero $8yz$, hoc eſt, a^3x & a^3yz: invenieturque, operando ut ante, $x \propto \frac{8yz-15}{7}$

& $y \propto 7 + \frac{64}{z-7}$

vel $z \propto 7 + \frac{64}{y-7}$. Unde ſumendo $y \propto 11$, erit $z \propto 23$, & $x \propto 287$. qui numerus non eſt primus. Hinc ſumendo $y \propto 23$, cum pro z inveniatur 11, & pro x idem numerus, qui ante, nec pro y ullus alius primus numerus aſſumi poſſit, ita ut inde z & x reperiantur, ut requiritur: conſtat juxta hanc hypotheſin quæſitos numeros non inveniri.

Pergo itaque, ponendo pro uno numero $16x$, & pro altero $16yz$, hoc eſt, a^4x & a^4yz. Unde juxta ſuperiorem modum invenitur

$x \propto \frac{16yz-31}{15}$

& $y \propto 15 + \frac{256}{z-15}$

$$\text{vel } z = 15 + \frac{256}{y-15}.$$

Hinc quoniam ſemper eadem ratio eſt quærendi quantitatem y per quantitatem z, quæ quærendi z per y, & aſſumendo pro y primum numerum 47, pro z fiat primus 23, & pro x primus 1151: idem continget ſi pro z ſumatur 47, fiet enim tunc $y = 23$, & $x = 1151$, ut ante. E quibus alter quæſitus numerus $16\,x$ fit $= 18416$, & alter $16\,yz = 17296$. Qui ſunt duo alii amicabiles præter ſupra inventos 284 & 220.

Ut autem primi numeri, pro y vel z ſumendi, qui huc conducere poſſunt, nullo negotio offendantur, conſentaneum fuerit ad id quærere priùs numeri 256 omnes diviſores, atque ex ſummis, poſtquam ipſis ſingulis numerus 15 eſt additus, eligere primos numeros. In quem finem primos numeros Sectionis 5tæ inſpicere haud erit inopportunum.

Omnino ut hîc videre licet.

x 256	128	64	x 32	16	8	4	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	

Ad 1. 2. 4. 8. 16. 32. 64. 128. 256, diviſores numeri 256,
adde 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15. 15:
Et fit pro y. 16. 17. 19. 23. 31. 47. 79. 143. 271. Qui numeri omnes præter 16 & 143 primi ſunt.

Similiter, ut quærantur rurſus alii duo, pono pro uno numero $32\,x$ & pro altero $32\,yz$, hoc eſt, a^5x & a^5yz: invenioque, ſicut ſuperiùs factum fuit, $x = \frac{32yz-63}{31}$

$$\& \; z = 31 + \frac{1024}{y-31}.$$

Sed cum hîc nullus primus pro y ſumi queat, è quo etiam z & x primi reperiantur, ſicut requiritur, progredior, ponendo pro uno $64\,x$ & pro altero $64\,y\,z$, hoc eſt, a^6x & a^6yz. At verò cum & hic non magis quàm juxta præcedentem hypotheſin primi obtingant, progrediendo rurſus ſuppono unum numerum eſſe $128\,x$ & alterum $128\,yz$, hoc eſt, a^6x & a^6yz.

Cum

Cum autem hîc operando, ut supra, x fiat $= \frac{128yz-255}{127}$, & $z = 127 + \frac{16384}{y-127}$; & assumpto pro y primo numero 191, pro z reperiatur primus 383, & pro x primus 73727: hinc alter quæsitus $128x$ erit 9437056, & alter $128yz = 9363584$. Qui sunt duo adhuc alii amicabiles præter supra inventos 284 & 220, & 18416 & 17296. Eodem modo procedere licet in infinitum ad inveniendos semper alios atque alios duos.

Rationem verò primos numeros eligendi, pro y sumendos, poteris ex adjuncta operatione non aliter ac supra colligere.

1	1	1			1	1			1					
16384	8192	4096	2048	1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	

Ad numeri 16384 divisores:

	1.	2.	4.	8.	16.	32.	64.	128.	256.	512.	1024.	2048.	4096.	8192.	16384.
adde	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.	127.
& fit pro y.	128.	129.	131.	135.	143.	159.	191.	255.	383.	6 9.	1151.	2175.	4223.	8319.	16511.

Qui numeri omnes, præter 131, 191, 383, & 1151, sunt compositi.

Cæterùm ut iis, qui Algebræ ignari sunt, ratio quoque amicabiles numeros inveniendi constet, in medium adducturus sum Regulam, quam olim ab illustri Viro Renato des-Cartes didici, qui Algebræ peritiâ doctissimorum consensu non modò summas in hisce Disciplinis difficultates superare novit, ipsiusque beneficio Regulas & Theoremata, earundem resolutioni inservientia, invenire; sed etiam, quicquid demum circa illas ab humano ingenio cognosci potuit determinare. Quam excolendo, tandem illam sibi efformavit Methodum, quâ obvia quælibet, ipsis etiam Perspicacissimis (id quod pluries expertus loquor) Ingeniis remoram injicientia, uno quasi obtutu penetrare potis fuit; ac, quidcunque certi in reliquis Scientiis lumine naturali sciri potuit, ex Indubitatis Principiis deducere valuit.

Dicta autem ipsius regula est hujusmodi:

Si sumatur binarius vel quilibet alius numerus ex solius binarii multiplicatione productus, modò sit talis, ut si tollatur unitas ab ejus triplo fiat numerus primus: Itemque si tollatur unitas ab ejus sextuplo, fiat numerus primus: Et denique si tollatur ab ejus quadrati octodecuplo, ducaturque hic ultimus

mus numerus primus per duplum numeri aſſumpti, Fiet numerus, cujus partes aliquotæ dabunt alium numerum, qui vice versâ partes aliquotas habebit æquales primo numero præcedenti.

1. *Exemplum.*

Sic aſſumendo binarium

2 binarius	2	2
per 3	per 6	2
6 ejus triplum.	12 ejus ſextuplum.	4 ejus quadratum
tollatur 1 unitas.	toll. 1 unitas	per 18
5 num. primus.	11 num. primus.	72 ejus octodecuplum
		tollatur 1 unitas
		71 numerus primus.
		per 4 duplũ numeri aſſumpti
		284 unus numerus quęſitus.

Alius autem numerus quæſitus producetur multiplicando duos primos inventos numeros primos unum per alterum, & productum per duplum aſſumpti.

Ergo. 5 numerus primus prior.
per 11 numerus primus alter.
55 productum
per 4 duplum aſſumpti
220 alter numerus quæſitus.

2. Ex-

Assumatur numerus 2. *Exemplum.*

8	8	8
per 3	per 6	8
24 ejus triplum.	48 ejus sextuplum.	64 ejus quadratum
tollatur 1 unitas.	tollatur 1 unitas	per 18
23 numerus primus prior.	47 numerus primus alter.	512
	23	64
	141	1152 ejus octodecuplum
	94	tollatur 1 unitas
	1081 productum.	1151 numerus primus 3tius
	per 16 duplum assumpti.	per 16 duplum assumpti
	6486	6906
	1081	1151
	17296 alter numerus quęsitus.	18416 unus numerus quæsitus.

3. *Exemplum.*

Et sumendo 64, quia 191, 383, & 73727 sunt numeri primi, habebo numeros 9437056 & 9363584. Et sic de cæteris.

Ecce sequentem operationem.

64 Assumptus num.	64	64
per 3	per 6	64
192 ejus triplum.	384 ejus sextuplũ.	256
tollatur 1 unitas	tollatur 1 unitas	384
191 numerus primus prior.	383 num. primus alter.	4096 ejus quadratum.
	191	per 18
	383	32768
	3447	4096
	383	73728 ejus octodecuplum.
		tollatur 1 unitas
	73153 productum.	73727 num. prim. tert.
	per 128 duplum assumpti.	per 128 duplũ assũpti.
	585224	589816
	146306	147454
	73153	73727
	9363584 alter num. quæsitus.	9437056 unus num. quæsitus.

Cum plures de partibus aliquotis quæſtiones per Algebram enodare, perfectorumque numerorum naturam auxilio ejus exponere hîc decreviſſem, ne tamen aliorum operam, quam ea in re collocaſſe poſt deprehendi, fruſtrare viderer, prætermittere id æquum duxi. Cum enim, ſicut Mercennus refert in Reflexionibus ſuis Phyſico-Mathematicis, Vir Eximius D. Freniclius de numeris figuratis, primis, compoſitis, &c. tria volumina conſcripſerit, quæ nondum (quod ſciam) in lucem prodiêre: præſtolari illa ſatiùs mihi viſum eſt, quàm plura afferendo mea ipſius inventis anteponere. His adde quòd inter Carteſii monumenta, de quo ſupra memini, tractatus etiam extet, qui de partibus aliquotis inſcribitur, cujus item editionem ut & reliquorum ipſius ſcriptorum à munificentia Viri Excellentiſſimi, D. PETRI CHANUT, harum Scientiarum peritiſſimi, penes quem illa religiosè aſſervantur, exſpectamus, quàm primùm graviora ejus munera id permittent. Quocirca ne tantorum Virorum inventis invidere, propriam quærendo gloriam, quin potiùs in iiſdem promovendis operam conferre cenſear: placuit ea pauca, quæ de partibus aliquotis ac diviſoribus tradidi (tanquam aditum ad illa) præmittere, donec illorum ſcripta impetremus.

SECTIO X.

De modo inveniendi triangula, quorum ſingula latera, ſegmenta baſis & perpendicularis exprimantur per numeros rationales abſolutos.

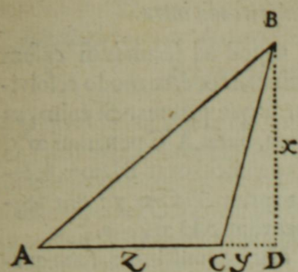
HOc Problema duos caſus habet, perpendicularis enim aut cadit extra, aut intra triangulum.

1. *caſus, in quo perpendicularis cadit extra.*

Igitur ad ſolvendum primum caſum, pro baſi A C pono z, pro perpendiculari B D x, & pro ſegmento externo C D y: unde ſegmentum AD fit $z+y$.

Quibus ita poſitis, cum quadratum ex C B ſit æquale binis quadratis ex C D, D B, erit $xx+yy$ æquale □^{to}. Eſto quadrato à latere $y+b$: eritque $xx+yy \propto yy+2by+bb$. Hoc eſt, dempto utrinque yy, & ordinatâ æquatione ita ut y reperiatur ſola, fiet $y \propto \frac{xx-bb}{2b}$.

Simi-



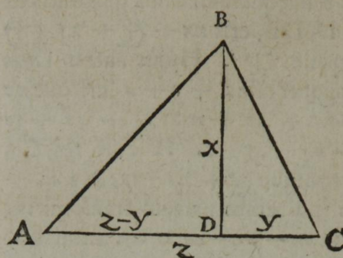
Similiter, quoniam quadratum ex AB æquale eſt binis quadratis ex A D, DB, erit $xx + zz + {}^{2}zy + yy$ æquale □^{to}. Hujus autem latus fingatur eſſe $z + y + a$, eritque $xx + zz + {}^{2}zy + yy \propto zz + {}^{2}zy + yy + {}^{2}az + {}^{2}ay + aa$. Hoc eſt, rejectis utrobique $zz + {}^{2}zy + yy$, & $2\,az + aa$ in alteram partem tranſpoſitis, erit $xx - {}^{2}az - aa \propto {}^{2}ay$. Subſtituatur jam in locum y valor ejus inventus, & fit $xx - {}^{2}az - aa \propto \frac{axx - abb}{b}$. Tum multiplicato utrinque per b, & tranſlatis terminis, ita ut quantitas z unam obtineat æquationis partem: habebitur $z \propto \frac{bxx - axx + abb - aab}{2ab}$.

Ubi patet, ſumendo x, b, & a ad libitum, quo pacto inveniantur y & z. Unde porrò facile eſt invenire A B & BC. Cum enim pro latere quadrati, cui quadratum ex CB adæquatum eſt, ſtatuerimus $y + b$: erit ipſa C B $\propto \frac{xx + bb}{2b}$; & AB, cujus quadratum quadrato ex $z + y + a$ æquiparatum eſt, $\propto \frac{xx + aa}{2a}$. Quibus omnibus ad communem denominatorem ${}^{2}ab$ reductis, ſi ipſe deinde omittatur, fiet pro B D $2abx$, pro C D $axx - abb$, pro A D $bxx - baa$, pro C B $axx + abb$, pro A B $bxx + baa$, & pro A C $bxx - axx + abb - aab$.

Hinc, aſſumptis pro x, b, & a quantitatibus utcunque, ita tamen ut b & a ſingulæ ipſâ x ſint minores, liquet, quâ ratione quis tot triangula conſtituere poſſit, quot voluerit, quorum ſingula latera, & perpendicularis cadens extra, nec non baſis ſegmenta per rationales numeros abſolutos exprimantur.

Etenim ſi pro x ſumatur 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis B D $\propto 2abx \propto 12$, ſegmentum C D $\propto axx - abb \propto 5$, ſegmentum AD $\propto bxx - baa \propto 16$, unde baſis AC fit 11; latus autem CB $\propto axx + abb \propto 13$, & latus AB $\propto bxx + baa \propto 20$. Et ſic de aliis.

2^{dus}. *casus, in quo perpendicularis cadit intra.*



Quod ad ſecundum caſum attinet, is eodem modo reſolvitur atque primus. Si enim, ut ſupra, baſin A C ponamus $\propto z$, perpendicularem BD $\propto x$, & ſegmentum D C $\propto y$: erit ſegmentum AD $\propto z - y$.

His ita conſtitutis, cum quadratum ex C B æquetur duobus quadratis ex C D, D B: erit $xx + yy$ æquale $\square^{to}$. Hinc ponendo pro ejus latere $y + b$, habebitur $xx + yy \propto yy + {}^2by + bb$. Et fit, ut ante, $y \propto \frac{xx - bb}{2b}$.

Eodem modo, quia quadratum ex AB tantundem valet atque duo quadrata ex AD & DB: erit $xx + zz - {}^2zy + yy$ æquale $\square^{to}$. Pro cujus radice ſi ponamus $z - y + a$, habebitur $xx + zz - {}^2zy + yy \propto zz - {}^2zy + yy + {}^2az - {}^2ay + aa$. Et fit $2ay \propto aa + {}^2az - xx$. Unde ſubrogando valorem ipſius y invenietur $z \propto \frac{bxx + axx - abb - aab}{2ab}$.

Ubi, ut ſupra, patet, ſumendo x, b, & a pro lubitu, quâ ratione inveniri poſſint y & z. E quibus porrò nullo negotio inveniuntur A B & B C. Nam cum pro latere quadrati, cui quadratum ex CB æquale ſuppoſitum eſt, ſtatuerimus $y + b$: erit ipſa CB $\propto \frac{xx + bb}{2b}$, & AB, cujus quadratum quadrato à radice $z - y + a$ adæquatum eſt, $\propto \frac{xx + aa}{2a}$. Quibus omnibus ſub eodem denominatore $2ab$ reductis, fiet, ipſo deinde rejecto, pro BD $2abx$, pro CD $axx - abb$, pro AD $bxx - baa$, pro CB $axx + abb$, pro AB $bxx + baa$, & pro AC $bxx + axx - abb - baa$.

Unde, aſſumptis utcunque quantitatibus x, b, & a, ita tamen ut b & a ſingulæ minores ſint quàm x, liquet, quo pacto ex iis triangula conſtitui poſſint, quorũ latera ſingula, & perpendicularis cadens intra, nec non baſis ſegmenta per num. rationales abſolutos exprimantur.

Si enim pro x accipiatur 3, pro b 2, & pro a 1: erit perpendicularis BD $\propto {}^2abx \propto 12$, ſegmentum CD $\propto axx - abb \propto 5$, ſegmentum AD $\propto bxx - baa \propto 16$, unde baſis A C fit 21, latus autem C B $\propto axx + abb \propto 13$, & latus AB $\propto bxx + baa \propto 20$. Et ſic de aliis.

Idem

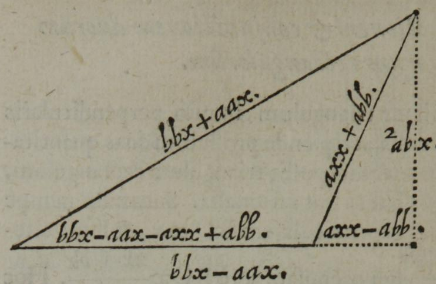
Idem aliter per disjunctionem & conjunctionem duorum triangulorum rectangulorum.

PRimò igitur, ut inveniatur triangulum, in quo perpendicularis cadit extra, patet ex ostensis, accipiendo pro lubitu duas quantitates x & b, quâ ratione ex iis inveniri possit triangulum rectangulum, quale superius CBD, cujus latera sint rationalia. Sumendo nempe latus unum circa rectum seu perpendicularem BD ∞ x, & latus alterum seu basin DC ∞ $\frac{xx - bb}{2b}$, hypotenusam verò BC ∞ $\frac{xx + bb}{2b}$. Hoc est, in integris, multiplicando ubique per denominatorem $2b$, fiet, ipso deinde rejecto, perpendicularis ∞ $2bx$, basis ∞ $xx - bb$, & hypotenusa ∞ $xx + bb$.

Haud secus assumptis ad libitum duabus quantitatibus b & a, invenietur ex iis alterum triangulum, cujus perpendicularis est ∞ $2ab$, & basis ∞ $bb - aa$, hypotenusa verò ∞ $bb + aa$.

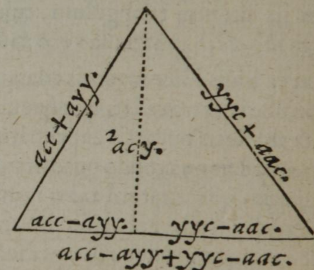
Jam ut ex binis hisce inventis triangulis tertium efformetur, cujus perpendicularis extra cadat, quæque ut & singula ipsius latera & basis segmenta absolutis numeris exprimatur, reduco ipsa ad eandem altitudinem. quod fit quærendo quantitatibus $2bx$ & $2ab$, perpendicularibus assignatis, quantitatem $2abx$, minimam scilicet, quæ per eas sine reliquo dividi potest. Hâc enim inventâ, si $2abx$ per $2bx$ & $2ab$ dividatur, & ortæ quantitates a & x per suas bases & hypotenusas multiplicentur: invenietur $axx - abb$ pro base, & $axx + abb$ pro hypotenusa unius trianguli; at $bbx - aax$ pro basi, & $bbx + aax$ pro hypotenusa alterius trianguli, quorum utriusque altitudo seu perpendicularis est $2abx$. Quæ duo triangula si ab eadem porrò perpendicularis parte constituta intelligantur, mutuâ suâ disjunctione triangulum referent, quod quæritur. Ipsum autem est quale sequitur.

Deinde, ad inveniendum triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quoniam sumendo pro lubitu duas quantitates c & y, per eas obtinetur triangulum rectangulum, cujus perpendicularis est $2cy$, basis $cc - yy$, & hypotenusa $cc + yy$; similiterque assumptis y & a per eas alterum invenitur, cujus perpendicularis est $2ay$, basis $yy - aa$, & hypotenusa $yy + aa$: fit, ut si hæc ipsa ad eandem postea altitudinem reducta fuerint, quæsitum triangulum ex iis constituatur.



Quocirca cum minima quantitas, quæ per $2cy$ & $2ay$ divisibilis est, sit $2acy$; & dividendo $2acy$ per $2cy$ fiat a; at $2acy$ per $2ay$ fiat c: ideo multiplicando $cc - yy$ & $cc + yy$ per a, fiet $acc - ayy$ pro base, & $acc + ayy$ pro hypotenusa unius trianguli; at verò $yy-aa$ & $yy + aa$ per c, fiet $yyc - aac$ pro base, & $yyc + aac$ pro hypotenusa alterius trianguli. Quorum itaque communis altitudo seu perpendicularis est $2acy$.

Hinc si bina hæc triangula conjunctim posita intelligantur, hoc est, ut unum ab una parte perpendicularis, & alterum ab altera parte reperiatur, component triangulum, in quo perpendicularis cadit intra, quæ haud aliter atque singula ipsius latera ac basis segmenta per absolutos numeros rationales exprimetur. Ipsum autem tale est.



Sectio XI.

Modus inveniendi duo triangula ejusdem basis & altitudinis, quorum singula latera, basis segmenta, & perpendiculares exprimantur per numeros rationales integros.

PRoblema hoc per antecedens resolvitur, ad id nempe binis huc revocatis præcedentibus triangulis, cum quantitatibus adscriptis.

Primò enim, quia invenienda hæc triangula ejusdem altitudinis requi-

requiruntur, habebitur æquatio inter $2abx$ & $2acy$. Unde pro x invenitur $\frac{cy}{b}$, & pro xx. $\frac{ccyy}{bb}$.

Deinde cum ipsa ejusdem quoque basis existere debeant, erit similiter $bbx - aax - axx + abb$ æquale $acc - ayy + yyc - aac$. Unde subrogatis valoribus ipsius x & xx, fit $\frac{bbcy - aacy}{b} - \frac{accyy}{bb} + abb \propto acc - ayy + yyc - aac$. Multiplicetur ubique per bb, & æquatio ritè ordinetur, fietque:

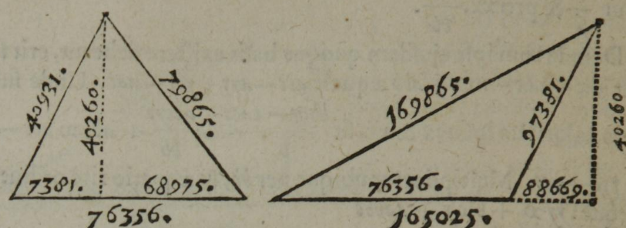
$$yy \propto \frac{+ b^3cy + aabbc - aabc + ab^4 - abbcc}{bbc + acc - abb}.$$

Jam ut in hac æquatione evitetur radicis extractio, supponatur $aabbc + ab^4 \propto abbcc$: invenieturque $a \propto c - \frac{bb}{c}$. Quoniam autem sumendo c & b ad libitum, per eas invenimus reliquas quantitates a, y, & x, statuendo nempe c majorem quàm b: fiet, ut, si accipiamus $c \propto 3$, & $b \propto 2$, pro a reperiatur $\frac{5}{3}$, pro y. $\frac{22}{61}$, & pro x. $\frac{33}{61}$. E quibus inde facile est singula utriusque trianguli latera reperire, quemadmodum etiam basis segmenta, & perpendicularem. In priori namque triangulo fiet $2abx \propto \frac{180}{183}$, $axx - abb \propto - \frac{68975}{11163}$, $axx + abb \propto \frac{79865}{11163}$, $bbx - aax \propto \frac{121}{183}$, & $bbx + aax \propto \frac{671}{183}$. In posteriori verò triangulo, fiet $2acy$, ut ante, $\propto \frac{660}{183}$, $acc - ayy \propto \frac{165025}{11163}$, $acc + ayy \propto \frac{169865}{11163}$, $yyc - aac \propto - \frac{88669}{11163}$, & $yyc + aac \propto \frac{97381}{11163}$.

Porrò ne quem moveat, quòd lineæ hîc repertæ sint, quæ nihilo sunt minores, perinde ac si solutio illegitima aut absurda foret, advertendum est, ipsas tantùm hoc casu in plus convertendas esse, easdemque ad alteram partem perpendicularis sumendas; ita ut in priori triangulo perpendicularis intra cadat, & in posteriori extra, commutando videlicet unum triangulum in alterum: siquidem sic inventa triangula quæsito omnino respondent.

Cæterùm si velimus, ut lineæ hæ omnes inventæ absolutis numeris exprimantur: oportet duntaxat illas sub communi denominatore reducere, qui est 6 .61.3 seu 11163 & eundem postea ubique rejicere. Unde bina hæc emergunt triangula:

Eodem



Eodem modo infinita alia triangulorum paria invenire licet.

Ad hæc notatu dignum, ex allatis facile esse invenire trapezium, cujus duo latera sint parallela, & in quo utraque diagonalis & perpendiculares, ex angulis in opposita latera demissæ, perinde atque singula ipsius latera, eorumque ac diagonalium segmenta, rationales existant.

SECTIO XII.

Solutio Problematis, quod anno 1633 Parisiis palàm fuit propositum, qualem illam adinvenit Vir illustris R. des CARTES.

Est autem tale.

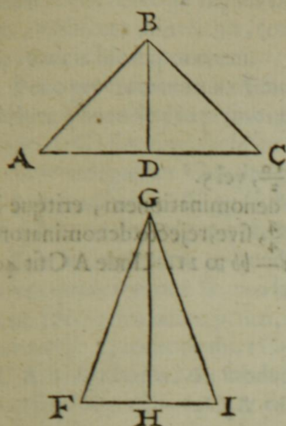
Invenire duo triangula æquicrura ejusdem areæ & ambitus, quorumque singula latera & perpendiculares sint inter se ut numerus ad numerum.

Sequitur solutio.

Primò quia latera debent exprimi numeris absolutis, pro latere AB pono $aa + bb$, & $2ab$ pro AD. Unde DB erit $aa - bb$, & ambitus $2aa + {}^{2}bb + {}^{4}ab$.

In secundo autem triangulo, si ponatur eodem modo FG $= kk + dd$, FB $= 2kd$, & HG $= kk - dd$; erit ambitus trianguli FGI $= 2kk + {}^{2}dd + {}^{4}kd$.

Unde



Unde patet $k+d$ & $a+b$ radices quantitatum $kk+dd+2kd$ & $aa+bb+2ab$ esse æquales.

Ac proinde in secundo triangulo, quia k ignoratur, ut & d, ponatur $a+x$ pro k, & $b-x$ pro d: eritque FH $\propto 2ab-2ax+2bx-2xx$, & HG $\propto aa-bb+2ax+2bx$. quæ in se invicem ducta producunt aream trianguli FGI $\propto 2a^3b-2a^3x+6aabx-6aaxx-2ab^3+6abbx-2b^3x+6bbxx-4ax^3-4bx^3$. Quæ summa æquatur areæ prioris trianguli, quæ est $2a^3b-2ab^3$.

Itaque demptis utrinque æqualibus $+2a^3b$, & additis $-2ab^3$, & ponendo singula sub contrario signo: erit $4ax^3+4bx^3+6aaxx-6bbxx+2a^3x+2b^3x-6aabx-6abbx \propto 0$.

Quod totum dividi potest per $4ax+4bx$.

Eritque $xx+\frac{3a}{2}x-\frac{3b}{2}x+\frac{1}{2}aa-2ab+\frac{1}{2}bb \propto 0$.

Sive $xx \propto -\frac{3a}{2}x+\frac{3b}{2}x-\frac{1}{2}aa+2ab-\frac{1}{2}bb$.

Unde $x \propto \frac{-3a+3b}{4}+\sqrt{\frac{aa+14ab+bb}{16}}$.

Quia verò x numerus rationalis esse debet, necessum est, ut $aa+14ab+bb$, rejecto denominatore, sit numerus quadratus. Igitur ponimus radicem ejus esse $a+b+c$. ubi c & b cognitæ præsupponuntur, a verò ignoratur.

Proinde $aa+2ab+2ac+bb+2bc+cc \propto aa+14ab+bb$.

Et fit $a \propto \frac{2bc+cc}{12b-2c}$.

Quilibet ergo numerus pro b & c sumi potest, modò a exurgat major quàm b: quia superiùs erat $aa-bb$.

Ut si faciam $b \propto 1$, & $c \propto 3$: habebo $a \propto \frac{5}{2}$.

Ut verò eliciatur x, respiciendum est ad æquationem : $x \propto - \frac{3a+3b}{4} + \sqrt{\frac{aa+14ab+bb}{16}}$.

Eritque $x \propto \frac{1}{2}$

$a \propto \frac{5}{2}$. ergo $aa \propto \frac{25}{4}$

$b \propto 1$. ergo $bb \propto 1$

& $ab \propto \frac{5}{2}$. unde $2ab \propto \frac{10}{2}$, vel 5.

Reducantur fractiones ad eandem denominationem, eritque in priori triangulo AB $\propto aa+bb \propto \frac{25}{4} + \frac{4}{4}$, sive, rejecto denominatore, $\propto 29$; & AD $\propto 2ab \propto 20$; & DB $\propto aa - bb \propto 21$. Unde AC fit 40, & ambitus 98, & area 420.

In posteriori verò triangulo

$k \propto a + x \propto 3$
$d \propto b - x \propto \frac{1}{2}$

$kk \propto 9$
$dd \propto \frac{1}{4}$. Unde $kk + dd \propto \frac{37}{4}$
$kk - dd \propto \frac{35}{4}$
& ${}^2kd \propto \frac{12}{4}$.

Et rejectis denominatoribus :

Erit FG $\propto kk + dd \propto 37$
HG $\propto kk - dd \propto 35$
& FH $\propto {}^2kd \propto 12$. Unde FI erit $\propto 24$.

Ambitus ergo erit 98, & area 420. ut ante.

SECTIO XIII.

Quæstio XIX, *libri* V *Arithmeticorum Diophanti.*

Invenire tres numeros, ut cubus summæ eorum, quovis ipsorum detracto, faciat cubum.

Quæstionis hujus solutio à Diophanto perplexè tradita, cum ab acutissimo Arithmetico, Ludolpho à Collen, Matheseos olim in alma hac Universitate Professore ac prædecessore meo, aliter inventa fuerit : haud ingratum aut è re fore judicavi, si eam qualem ex ipsius literis,

literis, benevolentiâ ſæpius laudati Viri, D. Nicolaï Huberti à Perſijn, addiſcere mihi licuit, (cui cum illo magna interceſſit familiaritas) paucis hîc exponerem.

Pono pro numerorum ſumma 4 N, eritque cubus ſummæ 64C. Dehinc ponendo pro primo numero 56 C, pro ſecundo 37 C, & pro tertio 63 C: fiet, ſingulis hiſce ex 64 C ſublatis, pro 1mo reliquo 8 C, pro 2do reliquo 27 C, & pro 3^{tio} reliquo 1 C. Qui omnes cubi ſunt.

Porrò additis 56 C, 37 C, & 63 C, erit ſumma 156 C æqualis 4 N. Dividatur utrinque per 4 N, & fit 39 Q æquale 1.

Jam ſi hic numerus 39 quadratus fuiſſet, ſoluta eſſet quæſtio. Cum autem quadratus non ſit, pro lateribus cuborum, qui relinqui debent, pono 1N—1 pro latere primi, 4—1N pro latere ſecundi, & 2 pro latere tertii. Quorum cubi, 1 C—3 Q+3 N—1, 64—48 N+12Q—1C, & 8, ſigillatim à 64 ſubducti, relinquunt numeros 65+3Q—1C—3N, 48N+1C—12Q, & 56.

Quoniam verò trium horum numerorum ſumma eſt 121+45 N—9 Q: erit 121+45 N—9 Q æquale 4. & fit $\frac{121+45N-9Q}{4}$ æquale 1. Reſtat itaque ut $\frac{121+45N\ 9Q}{4}$ ſit quadratus. Pono pro ejus latere $\frac{11+1N.}{2}$ Eritque $\frac{121+22N+1Q}{4} \propto \frac{121+45N-9Q.}{4}$

Et fit 1N. $\frac{23}{10}$. Poſueram autem 1N—1 pro latere 1^{mi} cubi, 4—1N pro latere 2^{di}, & 2 pro latere 3^{tii}. Erunt igitur ipſa latera $\frac{13}{10}$, $\frac{17}{10}$, & 2. Horum cubi ſunt $\frac{2197}{1000}$, $\frac{4913}{1000}$. & 8. Qui ſinguli ex 64 ſubducti, relinquunt numeros $\frac{61803}{1000}$, $\frac{59087}{1000}$, & 56.

Inventi itaque ſunt tres numeri, qui ſinguli ex 64 detracti relinquunt cubos, & in unam ſummam collecti faciunt quadratum.

Hinc ſuppoſitâ, ut ſupra, pro ſumma quæſitorum numerorum 4N, & pro ejus cubo 64 C, pono jam pro 1mo numero $\frac{61803}{1000}$ C, $\frac{59087}{1000}$ C pro 2do, & 56C pro 3^{tio}, fit eorum ſumma $\frac{176890}{1000}$ C æqualis 4N. Hoc eſt, $\frac{17683}{400}$ æquale 1. Unde IN fit $\frac{20}{133}$, ac proinde 1C $\frac{8000}{2352637}$. Id quod ductum in $\frac{61803}{1000}$, dat $\frac{494424}{2352637}$ pro 1mo numero, & ductum in $\frac{59087}{1000}$, dat $\frac{472696}{2352637}$ pro 2do numero, ac denique ductum in 56, dat $\frac{448000}{2352637}$ pro 3^{tio} numero. Et manifeſtum eſt, his additis, ſummam fore $\frac{1415120}{2352637}$ ſeu $\frac{80}{133}$. æqualem 4 N. A cujus cubo $\frac{512000}{2352637}$ ſi auferas $\frac{494424}{2352637}$, $\frac{472696}{2352637}$, & $\frac{448000}{2352637}$, relinquentur cubi $\frac{17576}{2352637}$, $\frac{39304}{2352637}$, & $\frac{64000}{2352637}$. Quorum latera ſunt $\frac{26}{133}$, $\frac{34}{133}$, & $\frac{240}{133}$. Con-

ſtat ergo, numeros ritè eſſe inventos. Cujus rei ſoli Deo debetur gloria.

Cæterùm ſciendum, quæſtionem hanc convenire cum quæſtione 68, quæ una ex centum illis exiſtit, quas ſupra dictus Arithmeticus Ludolphus à Collen ad ſolvendum propoſuit in libro ſuo de Circulo, Belgicè edito, quarum ſequens 69 ejuſdem eſt argumenti, nempe:

Invenire quatuor numeros, ita ut, ſi à cubo eorum ſummæ ipſi ſigillatim auferantur, reliqui ſint cubi.

Cujus enodatio cum eâdem arte atque præcedentis obtineri queat, ſatis duxi numeros duntaxat, quales à Nicolao Huberti inventi ſunt, hîc aſcribere.

Sunt autem tales: $\frac{867160}{4657463}$, $\frac{787400}{4657463}$, $\frac{13527640}{125751501}$, & $\frac{14087528}{125751501}$; aut $\frac{12172736}{64481201}$, $\frac{11296152}{64481201}$, $\frac{9112168}{64481201}$, & $\frac{4724776}{64481201}$. Alios verò tres, quos preter tres Ludolphi numeros invenit, ſunt $\frac{1581781 5000}{865268349 67}$, $\frac{9568152000}{86526834967}$, & $\frac{8925120000}{86526834967}$. Qui quoque quæſtione de duobus tantùm numeris propoſitâ, hoſce adinvenit numeros $\frac{37}{125}$, & $\frac{63}{125}$; aut $\frac{175608}{493039}$, & $\frac{173888}{493039}$; aut etiã $\frac{105045092893}{692214679736}$, & $\frac{14854859747}{692214679736}$. Et ſic de aliis.

SECTIO XIV.

De Progreſſionibus Arithmeticis.

QUoniam in his Progreſſionibus termini eodem continuè exceſſu ſe mutuò excipiunt, fit, ut in iis quinq; præcipuè ſpectanda veniant: nimirum, vel minor terminus, vel major, vel exceſſus Progreſſionis, vel multitudo terminorum, vel eorundem denique aggregatum. Quocirca, ut earum doctrina ritè pertractetur, viſum fit earundem conſtitutionem ex origine ſua deducere, atque rem omnem paucis ob oculos ponere.

Hunc in finem inſpiciatur ſequens Progreſſio $\overset{1}{a}.\ \overset{2}{a+b}.\ \overset{3}{a+2b}.\ \overset{4}{a+3b}.\ \overset{5}{a+4b}$, in qua quinque ſunt termini, quorum minor deſignatur per a, major per $a+4b$, & in qua b Progreſſionis exceſſus exiſtit.

Quibus poſitis, patet majorem terminum $a+4b$ componi ex minori a, & ex $4b$, Progreſſionis exceſſu toties ſumpto, quot ſunt ter-

mini minus 1. Quod idem de quotcunque terminis intelligendum eſt.

Hinc, datis minore extremo, Progreſſionis exceſſu, & multitudine terminorum, invenietur major extremus, ſi multitudo terminorum multata unitate ducatur in Progreſſionis exceſſum, & productum addatur minori.

Datis autem majori extremo, Progreſſionis exceſſu, & multitudine terminorum, invenietur minor extremus, auferendo idem productum à majori.

Deinde datis extremis, & multitudine terminorum, invenietur Progreſſionis exceſſus, ſi extremorum differentia per multitudinem terminorum minus 1 dividatur.

Datis verò extremis, & Progreſſionis exceſſu, invenietur multitudo terminorum, ſi divisâ hâc extremorum differentiâ per Progreſſionis exceſſum, ei quod oritur addatur unitas. Quæ quidem omnia ex diligenti Progreſſionis inſpectione manifeſta fiunt.

Poſtea, quoniam in omnibus terminis ejuſdem Progreſſionis reperitur a, & b in ſingulis poſt primum deinceps ſemel ampliùs conſpicitur quàm in proximè antecedentibus, fit ut, ſi extremi a & $a+4b$ ſimul addantur, tantundem fiat atque ſi addantur $a+b$ & $a+3b$, ab extremis æq è remoti; aut etiam atque medius $a+2b$ bis ſumptus, ſi multitudo terminorum (ut hîc) impar fuerit. Id quod ſimiliter de quotcunque aliis terminis eſt accipiendum. Unde conſtat, ſi extremis datis, & multitudine terminorum, horum omnium aggregatum ſit inveniendum: opus tantùm eſſe extremorum ſummam multiplicare per ſemiſſem multitudinis terminorum.

Hinc ſi extremi fuerint a & e, & multitudo terminorum i, quæraturque eorundem aggregatum y: erit $y \infty \frac{ai+ei}{2}$.

Datis autem extremis a, e, & aggregato terminorum y, ad inveniendam multitudinem terminorum i, quoniam y æquatur $\frac{ai+ei}{2}$, hoc eſt, multiplicando utrinque per 2, $2y$ æquatur $ai+ei$, hinc ſi utrobique dividatur per $a+e$, fiet $i \infty \frac{2y}{a+e}$.

At verò datis uno extremorum a, multitudine terminorum i, & eorundem aggregato y, ut inveniatur alter extremorum

e, quoniam $2y$ æquatur $ai+ei$, transferendo ai in alteram partem, fiet $2y-ai \propto ei$. Unde, dividendo utrinque per i, invenietur $e \propto \frac{2y}{i}-a$. Haud ſecus, datis e, i, & y: erit $a \propto \frac{2y}{i}-e$.

Iiſdem poſitis, ſi exceſſus Progreſſionis ſit u, & ex eo & binis extremis a, e, quorum a minor & e major intelligatur, quærendum ſit terminorum adgregatum y: oportet, invento $y \propto \frac{ai+ei}{2}$, in locum i ex ſuperioribus ſubſtituere $\frac{e-a}{u}+1$, fietque $y \propto \frac{ee-aa}{2u}+\frac{a+e}{2}$.

Eodem modo, datis uno extremo a, Progreſſionis exceſſu u, & multitudine terminorum i, ad inveniendum eorundem aggregatum y, quoniam y æquatur $\frac{ee-aa}{2u}+\frac{a+e}{2}$, oportet tantùm in locum e ſubſtituere valorem inventum $\frac{2y}{i}-a$, & in locum ee ejuſdem quadratum $\frac{4yy}{ii}-\frac{4ay}{i}+aa$, fietque $y \propto \frac{2yy}{uii}-\frac{2ay}{ui}+\frac{y}{i}$. Unde ordinatâ æqualitate invenitur $y \propto \frac{1}{2}uii+ai-\frac{1}{2}ui$. Haud ſecus datis e, u, & i, erit $y \propto -\frac{1}{2}uii+ei+\frac{1}{2}ui$.

Rurſus datis extremis a, e, & aggregato terminorum y, ut inveniatur Progreſſionis exceſſus u, quoniam y æquatur $\frac{ee-aa}{2u}+\frac{a+e}{2}$, hoc eſt, multiplicando ubique per $2u$, $2uy$ æquatur $ee-aa+au+eu$, transferendo au & eu in alteram partem, fiet $2uy-au-eu \propto ee-aa$. Unde dividendo utrinque per $2y-a-e$ invenietur $u \propto \frac{ee-aa}{2y-a-e}$.

Similiter dato uno extremo a, Progreſſionis exceſſu u, & adgregato terminorum y, ad inveniendum alterum extremum e, quoniam $2uy$ æquatur $ee-aa+au+eu$, transferendo $-aa+au+eu$ in alteram partem, fiet $ee \propto -ue+2uy+aa-au$: eritque extractâ radice $e \propto -\frac{1}{2}u+\sqrt{\frac{1}{4}uu+2uy+aa-au}$. Datis autem e, u, & y, ſi quæratur a: erit $a \propto +\frac{1}{2}u$ 8 $\sqrt{\frac{1}{4}uu-2uy+ee+eu}$.

Haud ſecus datis exceſſu Progreſſionis u, multitudine terminorum i, & eorundem aggregato y, ut inveniantur extremi a & e, quoniam rurſus $2uy$ æquatur $ee-aa+au+eu$, oportet tantùm in locum e & a ſub-

ſubſtituere valores inventos $\frac{2y}{i} - a$, & $\frac{2y}{i} - e$, & in locum ee & aa horum valorum quadrata, habebiturque $2uy \propto \frac{4yy}{ii} - \frac{4ay}{i} + \frac{2uy}{i}$, & $2uy \propto -\frac{4yy}{ii} + \frac{4ey}{i} + \frac{2uy}{i}$. Unde ordinatâ æqualitate invenietur $a \propto \frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, & $e \propto \frac{y}{i} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ui$.

Denique dato uno extremo a, Progreſſionis exceſſu u, & aggregato terminorum y, ad inveniendam eorum multitudinem i, quoniam a æquatur $\frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui$, multiplicando ubique per $2i$, fiet $2ai \propto 2y + ui - uii$. Unde ordinatâ æqualitate invenitur $ii \propto \frac{+ui + 2y - 2ai}{u}$. Et fit, extractâ radice, $i \propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + 2uy}$. Pari ratione datis e, u, & y, invenietur $i \propto \frac{1}{2} + \frac{e}{u} \pm \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu + eu + ee - 2uy}$.

In quorum, ſi lubet, illuſtrationem ac uſum addantur ſequentes quæſtiones.

1. Aliquis ſolvere debet primâ ſeptimana 1 fl. ſecundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. & ſic deinceps uſque ad 28 ſeptimanas, ſolvendo nempe ſingulis ſeptimanis ſequẽtibus ſemper 3 fl. plus quàm in proximè antecedentibus. Quæritur quantum ad finem hujus temporis perſolvere teneatur? *Facit* 82 *florenos.*

Ad quæſtionis hujus enodationem concipiatur Progreſſio Arithmetica 28 *terminorum, in qua primus terminus eſt* 1, *& exceſſus* Progreſſionis 3, *cujuſque ultimus terminus eſt inveniendus. Is autem hoc modo invenitur.* Ex 28 *terminorum multitudine ſublatâ unitate, ducatur reliquum* 27 *in* Progreſſionis *exceſſum* 3, *& ad productum* 81 *addatur primus terminus* 1, *fietque ultimus* 82, *deſignans florenos, quos ad finem* 28 *ſeptimanæ perſolvere tenetur.*

2. Si quis finitis 28 ſeptimanis 82 fl. perſolvere tenetur, & ſingulis ſeptimanis retrò numerandis 3 fl. minus ſolvere debeat quàm in proximè ſequentibus: Quæritur quantum ad finem primæ ſeptimanæ ſolvendum habeat?

Ex

Ex 82 fl. ſubductis 81 fl. reſtabit 1 fl. Quantum ſcilicet ad finem 1mæ ſeptimanæ ſolvendum reſtat.

3. Si quis per 28 ſeptimanas ad ſingularum finem inæqualem pecuniæ ſummam erogare debeat, eodem ſemper excreſcentem pretio, & ad primæ quidem finem ſolvere teneatur 1 fl.; at ad ultimæ finem 82. fl. Quæritur in quantum pretium continuè augendum ſit?

Sublato 1 fl. de 82 fl. ſi reliquum 81 fl. dividatur per 27, orietur 3, pretium florenorum, quibus ſequens pecuniæ ſumma deinceps proximè antecedentem excedere debet.

4. Aliquis debet primâ ſeptimanâ 1 fl. ſecundâ 4 fl. tertiâ 7 fl. atque ita deinceps, ſequenti ſeptimanâ 3 fl. amplius quàm in proximè præcedenti. Quæritur, ſi ultima ſolutio fuerit 82 florenorum, per quot ſeptimanas dictam ſolutionem præſtare teneatur.

Sublato 1 fl. de 82 fl., reliquum 81 fl. dividatur per 3 fl., orieturque 27. Cui additâ unitate habebitur 28, numerus ſeptimanarum quæſitus.

5. Eſt Progreſſio Arithmetica 28 terminorum, cujus primus terminus eſt 1, & ultimus 82. Quæritur ſumma omnium? *Facit* 1162.

a eſt 1, e eſt 82, & i eſt 28. Quæritur y. Hinc cum y ſit $\infty \frac{ai + ei}{2}$, *erit* $y \infty 1162$.

6. Aliquis debet 1162 florenos, quos perſolvere tenetur diverſis temporibus, erogando ſingulis ſeptimanis certam pecuniæ ſummam. Quæritur, ſi primâ ſeptimanâ ſolvat 1 fl. & reliquis ſeptimanis continuè pretium æqualiter augeat, ſic ut in ultima ipſi numerandi ſint 82 floreni, quot ſeptimanis dicta ſumma perſolvetur? *Facit* $i \infty \frac{2y}{a+e}$ ∞ 28 *ſeptimanis.*

7. Si 1162 fl. ſolvendi ſint intra 28 ſeptimanas, & in prima quidem dari debeat 1 fl.; at in ſingulis ſequentibus pretium continuè uſque ad ultimam ſeptimanam æqualiter augendum ſit: Quæritur quantum in ultima ſolvere oporteat? *Facit* $e \infty \frac{2y}{i} - a \infty 82$ *fl.* Eodem modo, ſi 1162 fl. ſolvi debeant ſpacio 28 ſeptimanarum, dando in fine hujus temporis 82. fl., & ſingulis ſeptimanis pretium retrò æqualiter ſit diminuendum, invenietur ad finem primæ ſeptimanæ ſolvendum eſſe $a \infty \frac{2y}{i} - e \infty 1$ fl.

8. Progreſſionis Arithmeticæ primus terminus eſt 1, & ultimus 82. Quæri

82. Quæritur aggregatum terminorum, si excessus Progressionis u sit $\propto 3$. *Facit* $y \propto \frac{ee-aa}{2u} + \frac{a+e}{2} \propto 1162$.

9. Si quis primâ septimanâ solvere debeat 1 fl. & singulis sequentibus septimanis deinceps 3 fl. amplius quàm in proximè antecedentibus, idque per 28 septimanas continuare teneatur: Quæritur quid in toto solvere oporteat? *Facit* $y \propto \frac{1}{2}uii + ai - \frac{1}{2}ui \propto 1162$ fl. Eodem modo, si finitis 28 septimanis solvendi sint 82 fl, & singulis præcedentibus 3 floreni minus solvi debeant quàm in proximè sequentibus, donec ad primæ finem perventum fuerit, invenietur similiter pecuniam omnem erogatam fore $y \propto -\frac{1}{2}uii + ei + \frac{1}{2}ui \propto 1162$ fl.

10. Si quis solvere debeat 1162 fl. per septimanas, ita ut in prima numerare teneatur 1 fl. & in ultima 82 fl. augendo perpetuò pretium à prima usque ad ultimam æqualiter: Quæritur quantum singulis sequentibus septimanis plus solvere teneatur quàm in proximè præcedentibus? *Facit* $u \propto \frac{ee-aa}{2y-a-e} \propto 3$.

11. Aliquis solvere debet 1162 fl. hâc conditione, ut ad finem 1^{mæ} septimanæ eorum 1 fl. solvat, & ad finem singularum sequentium continuè 3 plus quàm ad proximè præcedentium, donec omnes 1162 fl. soluti fuerint. Quæritur quanta ultima solutio futura sit? *Facit* $e \propto -\frac{1}{2}u + \sqrt{\frac{1}{2}uu + {}^{2}uy + aa - au} \propto 82$ fl. Eodem modo, si 1162 fl. solvi debeant, ita ut ultima solutio sit 82 florenorum, eademque continuè 3 florenis sit diminuenda, donec tota summa 1162 soluta fuerit, invenietur primam solutionem a esse $\propto + \frac{1}{2}u - \sqrt{\frac{1}{4}uu - {}^{2}uy + ee + eu} \propto 1$ fl.

12. Si 1162 floreni solvendi sint intra 28 septimanas, ita ut singulis sequentibus semper 3 fl. ampliùs numerandi sint quàm in proximè antecentibus: Quæritur quot floreni in prima & quot in ultima erogari debeant? *Facit* $a \propto \frac{y}{i} + \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}ui \propto 1$ fl. *in prima septimana*, & $e \propto \frac{y}{i} - \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}ui \propto 82$ fl. *in ultima.*

13. Progressionis Arithmeticæ primus terminus est 1, excessus Progressionis 3, & aggregatum terminorum 1162. Quæritur multitudo terminorum. *Facit* $i \propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu - au + aa + {}^{2}uy} \propto 28$. Haud

ſecus, datis ultimo termino 82, exceſſu Progreſſionis 3, & aggregato terminorum 1162, erit $i \propto \frac{1}{2} + \frac{e}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu + eu + ee - 2uy} \propto 28$.

SECTIO XV.

De numeris Multangulis ſeu Polygonalibus.

NUmeris Arithmeticè proportionalibus proximè ſuccedunt illi, qui vulgò Multanguli ſeu Polygonales appellantur, & ex iiſdem originem ſuam ducunt.

Sunt autem ipſi omnes ſummæ numerorum Progreſſionis Arithmeticæ ab unitate, quorum numerus angulorum binario ſemper excedit Progreſſionis exceſſum, & latus multitudinem terminorum deſignat.

Ut ſi Progreſſio fuerit numerorum ab unitate in ſerie naturali, id eſt, per 1 excreſcentium, utputa 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8, &c. cujus termini ab initio continuè addantur, fient inde trianguli 1. 3. 6. 10. 15. 21. 28. 36, &c. utpote qui ſecundùm ſuas unitates in trianguli formam diſponi poſſunt, hoc modo: &c.

Sic & ſi Progreſſio fuerit numerorum ab unitate deinceps per 2 progredientium, id eſt, ſub qua omnes impares numeri comprehendantur, nimirum: 1. 3. 5. 7. 9. 11. 13. 15, &c. & termini hujus ab initio continuè addantur, fient inde quadrati numeri 1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64, &c. quorum quippe unitates in quadrati formam collocari queunt, hoc pacto: , &c. Unde inferre licet, quadratum quemlibet duplicem originem ſortiri, hoc eſt, vel numeri ali-

alicujus in se ipsum ductu procreari, vel etiam ex tot imparium ab unitate in unam summam collectione, quot unitates continet ejus latus, constare.

Haud secus si numeri ab unitate deinceps per 3 ascendant, id est, Progressio illa fuerit 1. 4. 7. 10. 13. 16. 19. 22, &c. atque termini hujus ab initio continuè accumulentur, fient inde pentagoni 1.5 12.22. 35.51.70.92, &c.

Pari ratione Progressione ab unitate deinceps per 4 excrescente, utputa 1.5.9.13.17.21.25.29, &c. dabunt hujus termini ab initio in unam summam continuè collecti hexagonos 1. 6.15.28.45.66.91. 120, &c. Atque ita porrò in infinitum.

Hinc dato angulorum numero, si ab eo binarius auferatur, reliquum erit excessus Progressionis, è qua Polygonus componitur.

Porrò, quoniam, quæ ad horum numerorum tractationem spectant, ad duo præcipua capita revocari queunt, quę sunt, ut è dato latere inveniatur polygonus, & contra ut è dato polygono eruatur latus, locus exigit, ut de his in genere scripturi, quò ad omnes simul polygonos referri possint, funditùs ipsa repetamus atque ex origine sua derivemus.

Quocirca ut ex dato latere investigetur polygonus, supposito latere ∞ i, & polygono ∞ y, concipiatur Progressio Arithmetica, in qua primus terminus est 1, excessus Progresſionis u, & multitudo terminorum i, quorumque aggregatum y est inveniendum.

Hunc in finem, cum, primo termino existente a, per antecedentem Sectionem, y æquetur $\frac{1}{2}uii + ai - \frac{1}{2}ui$, erit, substituto 1 in locum a, y ∞ $\frac{1}{2}uii + i - \frac{1}{2}ui$. Designans in genere, quo pacto ex dato latere quilibet inveniatur polygonus. Ubi advertendum, quantitatem u datam intelligi, quippe illa (uti dictum) binarii sublatione à polygoni angulorum numero, qui ex cognomine ejus semper notus est, innotescit.

Quòd si verò ad Progresſionis hunc excessum u respicere non lubeat, sed ex solo latere i, & angulorum numero, quem n vocamus, ipse polygonus y inveniendus sit: oportet tantùm in locum u subrogare $n - 2$, fietque y ∞ $\frac{1}{2}nii - \frac{1}{2}ni - ii + 2i$ seu $\overline{\frac{1}{2}ni - \frac{1}{2}n - i + 2}$ in i.

His igitur ita se habentibus, ut pateat, quâ ratione inde speciales regulæ deducendæ sint, quibus ex quovis latere multangulus certi angulorum numeri obtineatur: opùs tantùm erit in locum u vel n in triangulis subrogare 1 vel 3, in quadratis 2 vel 4, in pentagonis 3 vel 5,

in hexagonis 4 vel 6, in heptagonis 5 vel 7, &c. relinquendo i indeminatam. Unde ſequentes regulæ reſultant:

$$y \propto \frac{{}^{1}ii + 1i}{2}$$, pro triangulis

$$y \propto \frac{{}^{2}ii \; 8 \; 0i}{2}$$, pro quadratis

$$y \propto \frac{{}^{3}ii - 1i}{2}$$, pro pentagonis

$$y \propto \frac{{}^{4}ii - {}^{2}i}{2}$$, pro hexagonis

$$y \propto \frac{{}^{5}ii - 3i}{2}$$, pro heptagonis. Atque ſic ulteriùs in infinitum.

Quibus reſpondent ea, quæ Bacchetus affert in Commentariis ſuis ſuper Diophantum, ubi in eundem finem has depromit regulas ſeu canones.

Sume quadratum dati lateris, hunc ducito in numerum binario minorem multitudine angulorum, à producto aufer quod fit ex dato latere in numerum quaternario minorem multitudine angulorum, reſidui ſemiſsis erit quæſitus polygonus.

vel,

Ducito datum latus in numerum angulorum binario multatum, à producto aufer numerum angulorum multatum quaternario, reſiduum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni.

vel etiam,

Ducito datum latus unitate multatum in numerum angulorum binario multatum, & productum binario auctum ducito in datum latus, fiet duplum polygoni. Vel alios denique canones, quos recenſere omnes nimis longum foret.

Hinc ſi i ſeu latus datum ſit 12, & quæratur ejuſdem triangulus, erit $y \propto \frac{1ii + 1i}{2} \propto 78$. Ac proinde cum numerus punctorum, in quibus plures rectæ indefinitæ, quarum nullæ parallelæ ſunt, ſe invicem ſecant, ſemper triangulus exiſtat: liquet 13 lineas in 78 punctis nec pluribus ſe mutuò interſecare.

Non ſecus latere exiſtente 12 quinquangulus erit 210, hexangulus 276, heptangulus 342, atque ita de aliis.

De-

Denique dato polygono ut inveniatur latus, oportet, inventâ $y \propto \frac{1}{2}uii + i - \frac{1}{2}ui$, æqualitatem secundùm artem de i ordinare, sumendo i esse quantitatem incognitam, at verò u & y esse cognitas. Fietque $ii \propto +ui + 2y$. Unde extractâ radice invenitur

$$\frac{-2}{u}$$

$$i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u} + \sqrt{\frac{uu-4u+4+8uy}{4uu}}, \text{ vel } i \propto \frac{u-2+\sqrt{uu-4u+4+8uy}}{2u}.$$

Designans in genere quâ ratione ex dato quolibet polygono latus investigari possit.

Idem obtinere licet, si, ut in præcedenti Sectione Progressionis Arithmeticæ, cujus primus terminus est a, excessus Progressionis u, & aggregatum terminorum y, quæratur multitudo terminorum i. Hæc enim cum sit $\propto \frac{1}{2} - \frac{a}{u} + \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu-au+aa+{}^{2}uy}$, subrogato 1 in locum a, erit $i \propto \frac{1}{2} - \frac{1}{u}\sqrt{\frac{1}{4}uu-u+1+{}^{2}uy}$ seu $\frac{u-2+\sqrt{uu-4u+4+8uy}}{2u}$, ut ante. Aut etiam substituendo $n-2$ pro u, erit $i \propto \frac{n-4}{2n-4} + \frac{1}{2n-4}\sqrt{nn-8n+16+8ny-16y}$ seu $\frac{n-4+\sqrt{nn-8n+16+8ny-16y}}{2n-4}$.

Ex quibus jam facile est speciales regulas pro singulis polygonis conficere.

Etenim, si, ut supra, quum y relinquitur indeterminata, pro u vel n in triangulis subrogemus 1 vel 3, in quadrangulis 2 vel 4, in quinquangulis 3 vel 5, atque ita porrò, emergent inde regulæ sequentes, nimirum: $i \propto \frac{-1+\sqrt{1+8y}}{2}$, pro triangulis

$i \propto \frac{\text{A}\ 0+\sqrt{0+16y}}{4}$, pro quadrangulis

$i \propto \frac{+1+\sqrt{1+24y}}{6}$, pro quinquangulis

$i \propto \frac{+2+\sqrt{4+32y}}{8}$, pro sexangulis

$i \propto \frac{+3+\sqrt{9+40y}}{10}$, pro septangulis. Atque sic ulteriùs in infinitum.

Quibus similia sunt ea, quæ à Bacheto afferunrur in inventionem lateris, quando polygonus est datus, ubi sic scribit:

Datum polygonum ducito in octuplum numeri multitudinis angulorum binario multati, producto adde quadratum numeri multitudinis angulorum quaternario multati, summæ cape latus, huic adde numerum quaternario minorem multitudine angulorum, summam divide per duplum numeri angulorum binario multati, quotiens erit quæsitum latus.

Hinc si datus multangulus y sit triangulus 21, & quæratur ejus latus i, ponendum tantummodò erit $\frac{1ii+1i}{2} \propto 21$, hoc est, $ii \propto -1i+42$. Et fit, extractâ radice, $i \propto 6$. Vel etiam, quia i æquatur $\frac{-1+\sqrt{1+8y}}{2}$, & y valet 21, erit $i \propto 6$. ut ante.

Haud secus, si 21 fuerit octangulus, invenietur latus ejus fore 3. At verò 21 existente numero 21 angulorum, latus ipsius erit 2.

Pari ratione, dato numero 1225, eoque existente triangulo, quadrangulo, sexangulo, ac 1225gulo, latera erunt 49, 35, 25, & 2. Atque ita de aliis.

Cæterùm antequam horum numerorum tractationi finem imponamus, breviter nobis adhuc dicendum sit, quot modis datus numerus polygonus dici queat. Ut si datus numerus sit 36.

Primò itaque, quia numerus quilibet à ternario multangulus est, habens tot angulos quot ipse continet unitates, cujus latus est 2, numerus ab unitate proximus, constat 36 esse polygonum 36 angulorum, quo igitur nomine triginta-sexangulus dici poterit.

Deinde, quia ex 36 elici potest radix quadrata, quæ est 6, evidens est 36 esse quoque quadratum.

Denique quia 36 octies sumptus ac unitate inde auctus facit quadratum 289, cujus latus 17 unitate multatum ac deinde per 2 divisum dat 8, integrum numerum: patet 36 esse pariter triangulum, cujus latus est 8. Quoniam verò multiplicato 36 per 24 ac producto addito 1, aut per 32 ac producto addito 4, aut per 40 ac producto addito 9, & sic deinceps, nunquam fit quadratus: convincitur 36 tribus duntaxat prædictis modis esse multangulus. Atque ita de aliis.

SE-

SECTIO XVI.

De Progreſſionibus Geometricis.

PRogreſsionum harum naturam cum definiat terminorum ſecundùm eandem rationem continuatio, ſuffecerit, ſi, innixi huic fundamento, ea, ex quibus reliqua, doctrinam ipſarum concernentia, facili negotio deducuntur, levi penicillo adumbremus.

Hinc ſi Progreſſio fuerit trium terminorum, utputa a, b, & c, quoniam propter eandem rationem primi termini ad ſecundum atque ſecundi ac tertium, $\frac{a}{b}$ eſt $\propto \frac{b}{c}$, vel etiam $\frac{b}{a} \propto \frac{c}{b}$, fiet, multiplicando per crucem, $ac \propto bb$. Id quod oſtendit, ſi tres quantitates ſint proportionales, productum extremarum a & c eſſe æquale ei, quod fit ex media b in ſe ducta. Ac proinde datis duobus primis terminis a & b, ut ex iis inveniatur tertius c, opùs tantùm eſſe dividere productum utrumque per a, fietque tertius $c \propto \frac{bb}{a}$.

Similiter primo termino exiſtente a, & ſecundo b, ſi progreſſio ulteriùs in quatuor terminis continuari debeat, quoniam tertius terminus eſt $\frac{bb}{a}$, atque hujus rurſus quadratum æquetur ei quod fit ex ſecundo in quartum, fiet, ſtatuendo quartum terminum eſſe d, $\frac{b4}{aa} \propto bd$. Unde diviſo utrinque per b, fit $d \propto \frac{b3}{aa}$. adeò ut a, b, $\frac{bb}{a}$, & $\frac{b3}{aa}$ quatuor continuè proportionales exiſtant.

Haud ſecus, ſi in eadem ratione quinque continuè proportionales inveniendi ſint, & quintus terminus vocetur e, erit $\frac{bbe}{a} \propto \frac{b^6}{a^4}$. Unde multiplicando utrinque per a & dividendo per bb, invenitur $e \propto \frac{b^4}{a^3}$. Eruntque a, b, $\frac{bb}{a}$, $\frac{b3}{aa}$, & $\frac{b4}{a3}$ quinque continuè proportionales in ratione a ad b. Atque ſic ulteriùs in infinitum.

Quoniam autem ſic datis duobus primis terminis a & b reliqui omnes ſequentes ſunt fractiones, hinc ut integri evadant ac ſimul ad tot

tot, quot quis voluerit, continuè proportionales in data ratione inveniendos inſerviant, oportet tantùm eos omnes per denominatorem ultimi termini multiplicare.

Ut, quia a, b, & $\frac{bb}{a}$ tres proportionales referunt, quorum duo primi termini dantur a & b, hinc multiplicando omnes tres per a, inveniemus illorum loco aa, ab, & bb, qui in eadem ratione tres quæſitos proportionales in integris deſignant.

Sic ſi quatuor in ratione a ad b continui requirantur, quoniam prò illis invenimus a, b, $\frac{bb}{ae}$ & $\frac{b3}{aa}$, ideo multiplicando eos omnes per aa, erunt ipſi in integris a^3, aab, abb, & b^3.

Pari ratione a^4, a^3b, $aabb$, ab^3, & b^4 in integris quinque deſignabunt continuè proportionales in ratione a ad b; & a^5, a^4b, a^3bb, aab^3, ab^4, & b^5 ſex; & a^6, a^5b, a^4bb, a^3b^3, aab^4, ab^5, & b^6 ſeptem. Atque ita porrò in infinitum.

Hinc ſi a ſit ∞ 3, & b ∞ 2, ſex proportionales continuè in ratione 3 ad 2 erunt 243, 162, 108, 72, 48, & 32. At verò a exiſtente 2, & b ∞ 3 ſeptem continuè proportionales in ratione 2 ad 3 in integris erunt 64, 96, 144, 216, 324, 486, & 729. Et ſic de aliis.

Ubi advertendum, quòd, ſicut in Arithmeticè proportionalibus extremi termini ſimul additi tantundem faciunt atque ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius bis ſumptus, ſi multitudo terminorum impar fuerit, ita in hiſce Geometricè proportionalibus extremi a & $\frac{b^4}{a3}$ in ſe invicem ducti tantundem producant, atque b & $\frac{b^3}{aa}$ ab extremis æquè remoti, aut etiam atque medius $\frac{bb}{a}$ in ſe ductus. Fit enim ubique $\frac{b^4}{aa}$. Quod idem de quotcunque terminis eſt intelligendum.

Deinde apparet, primo termino a exiſtente 1, progreſſionem fore 1. b. bb. b^3. b^4, &c. adeò ut ad quemlibet ſequentium terminorum inveniendum opùs tantùm ſit ſecundum terminum b toties ponere & multiplicare, quotus quiſque ex illis eſt poſt primum.

Ut ad inveniendum centeſimum terminum, poſito b nonagies & novies & multiplicato, centeſimus erit b^{99}. Quòd ſi autem primus ter-

terminus ſit a, centeſimus erit $\frac{b^{99}}{a^{98}}$, dividendo nempe b^{99}, productum antecedens ſecundi termini, per a^{98}, productum primi a, ſemel minùs poſiti & multiplicati. Atque ita de aliis.

Porrò Progreſſione exiſtente $1, b, bb, b^3, b^4$, &c. quoniam terminorum ultimum antecedentium aggregatum eſt $1 + b + bb + b^3$, at verò primum ſequentium aggregatum ſit $b + bb + b^3 + b^4$, quorum unius ad alterum ratio eadem eſt, quæ primi termini 1 ad ſecundum b, atque idem etiam in proportionalibus $a, b, \frac{bb}{a}, \frac{b3}{aa}, \frac{b4}{a3}$, &c. vel in proportionalibus $a^4, a^3b, aabb, ab^3, b^4$, &c. locum habeat, nec referat ad quotcunque proportionales hoc reſtringatur: liquet Progreſſionis cujuſlibet Geometricæ primum terminum ad ſecundum eſſe, ſicut aggregatum terminorum excepto ultimo ad aggregatum terminorum excepto primo.

Hinc datis primo, ſecundo, & ultimo termino, facile eſt invenire aggregatum terminorum.

Etenim ſi primus terminus ſtatuatur $\propto a$, ſecundus $\propto b$, & ultimus $\propto c$, & quæratur aggregatum terminorum $\propto z$: erit ut a ad b, ſic $z - c$ ad $z - a$. Unde multiplicando tum extremos in ſe invicem, tum medios, fiet $az - aa \propto bz - bc$. Hoc eſt, ordinatâ æqualitate, erit $z \propto \frac{aa == bc}{a == b}$.

Signum == ſignificat differentiam inter duas pluresvè quantitates, cum non exprimitur aut cognoſcitur, penes quas ſit exceſſus.

Hinc ſi a ſit $\propto 243$, $b \propto 162$, & $c \propto 32$, erit $z \propto \frac{aa - bc}{a - b} \propto 665$. At a exiſtente $\propto 64$, $b \propto 96$, & $c \propto 729$, erit $z \propto \frac{bc - aa}{b - a} \propto 2059$.

Denique a exiſtente majore quàm b, ſi proportionales in infinitum decreſcant, fiet $c \propto 0$. Ideoque deſtruendo bc, erit $z \propto \frac{aa}{a - b}$.

Hinc ſi a ſit 1, & $b \propto \frac{1}{2}$, atque cæteræ omnes ſequentes proportionales deinceps in infinitum in dupla hac ratione deſcendant, erit z, aggregatum omnium terminorum hujus Progreſſionis infinitæ, $\propto \frac{aa}{a - b} \propto 2$, hoc eſt, duplum maximi termini a.

Eodem modo, ſi maximus terminus a ſit 2, & reliqui omnes ter-

mini ab hoc maximo a in tripla ratione continuè uſque ad nihilum decreſcant, erit z, ſumma omnium terminorum hujus infinitæ ſeriei, $\infty \frac{aa}{a-b} \infty 3$, hoc eſt, erit ipſa maximi termini a ſeſquialtera.

Similiter a exiſtente 3, ſi reliquorum ſequentium terminorum unus alterius ſubquadruplus ſumatur, idque ſemper fiat: erit z, ſumma omnium, $\infty \frac{aa}{a-b} \infty 4$, hoc eſt, maximi termini a ſeſquitertia. Atque ita de aliis.

Cætera huc ſpectantia, ex his perinde ut in Arithmeticis Progreſſionibus factum eſt collige.

SECTIO XVII.

Quadratura Parabolæ.

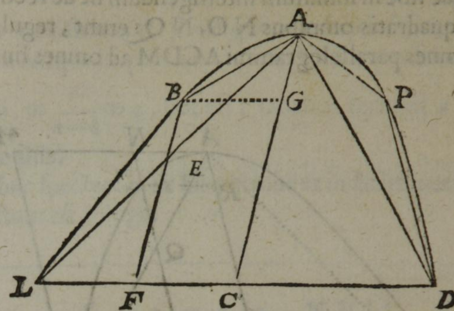
Ad indagandam Parabolæ quadraturam inveſtigetur ratio linearum NO, NQ, & NP, ductâ ſcilicet inter AC, MD rectâ NO alterutri ex ipſis parallelâ. Ponendo ad id latus rectum ∞r
AC vel NO ∞x
NQ ∞y
& AR vel NP ∞z.

Unde cum ex proprietate Parabolæ ▭lum ſub latere recto r, & ſegmento diametri AC, per 11 Prop. 1mi libri Conic. Apollonii, ſit æquale □to ordinatim adplicatæ CD: erit □ CD vel AM ∞rx, adeoque AM $\infty \sqrt{rx}$. Eâdem ratione RP vel AN erit $\infty \sqrt{rz}$. Hinc cum propter ſimilitudinem triangulorum AMD, ANQ, AM $\infty \sqrt{rx}$ ſit ad MD vel AC ∞x, ut AN $\infty \sqrt{rz}$ ad NQ ∞y: erit $y\sqrt{rx}$, rectangulum ſub extremis, per 16. 6, æquale $x\sqrt{rz}$, rectangulo ſub mediis. Hoc eſt, quadratis ſingulis partibus, erit $yy, rx \infty xx, rz$. Et dividendo utrinque per rx, fit $yy \infty xz$. Hoc eſt, quadratum rectæ NQ æquale eſt rectangulo ſub NO & NP, ſeu quod idem eſt, ON eſt ad NQ, ſicut QN ad NP. Idem intelligendum eſt de recta quavis NO, ductâ inter AC, MD, ubi libuerit, alterutri ex ipſis parallelâ.

Hinc concipiendo conum & cylindrum ejuſdem baſis & altitudinis, quorum ſcilicet utriuſque baſis ſit circulus ſemidiametri MD, & axis com-

1 2 3
communis recta AM, cum propter proportionales NO, NQ, & NP, 1ma NO ſit ad 3^{tiam} NP, ſicut quadratum $1^{mæ}$ NO ad quadratum $2^{dæ}$ NQ, atque hoc in infinitum intelligendum ſit de rectis omnibus NO, NP & quadratis omnibus NO, NQ: erunt, regulâ exiſtente DM, lineæ omnes parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei APDM, ſicut omnia quadrata cylindri ad omnia quadrata coni, ſeu quod idem eſt, per 2.12, ſicut omnes circuli cylindri ad omnes circulos coni. Sed ut ſe habent omnes lineæ parallelogrammi ACDM ad omnes lineas trilinei APDM, ita per Methodum Indiviſibilium Cavallerii ſe habet parallelogrammum ad trilineum. Similiterque ſicut omnia quadrata cylindri ſe habent ad omnia quadrata coni, ita quoque ſe habet cylindrus ad conum. Quare parallelogrammum ACDM ad trilineum APDM erit, ut cylindrus ad conum. Unde cum, per 10.12, cylindrus ipſius coni ſit triplus: erit itidem parallelogrammum ACDM trilinei APDM triplum. Adeoque qualium partium parallelogrammum ACDM ſive triangulum LAD eſt 3, talium trilineum APDM erit 1, & ſemi-parabola CAPD 2, ac proinde tota LAPD 4. Conſtat idcirco Parabolam LAPD trianguli LAD in ea deſcripti maximi eſſe ſeſquitertiam. Quod erat propoſitum.

ALITER, *investigando rationem linearum* A C, BE.



Esto LC $\infty\ a$, eritque LF ∞ FC $\infty\ \frac{1}{2}a$.
CA $\infty\ b$
& EB $\infty\ z$.

Quibus positis, quoniam FB existente parallelâ diametro CA, & ipsa diameter est, ac, propter similitudinem triangulorum LCA, LFE, LC est ad CA, hoc est, a ad b, sicut LF, hoc est, $\frac{1}{2}a$, ad FE: erit FE $\infty\ \frac{1}{2}b$. Cui additâ EB $\infty\ z$, si tota FB seu CG $\infty\ \frac{1}{2}b + z$ ex CA $\infty\ b$ auferatur, relinquetur GA $\infty\ \frac{1}{2}b - z$.

Deinde, quia, ex natura Parabolæ, CA est ad GA, hoc est, b ad $\frac{1}{2}b - z$, sicut $\square$ LC ad $\square$ BG seu FC, hoc est, aa ad $\frac{1}{4}aa$, vel 4 ad 1: erit $b \infty 2b - 4z$. Unde resolutâ æquatione fit $z \infty \frac{1}{4}b$. Quod ipsum docet, rectam CA ipsius EB quadruplam esse.

E quibus porrò facile est invenire rationem trianguli EBA ad triangulum LAC. Cum enim propter parallelas EB, AC angulos ad E & A æquales habeant, ac proinde ipsa inter se sint sicut ▭ BEA ad ▭ LAC: erit, assumptâ LE vel EA $\infty\ c$, unum ad alterum, sicut $\frac{1}{4}bc$ ad $2bc$, hoc est, ut 1 ad 8; ideoque $\triangle$ LBA ad $\triangle$ LAC, ut 1 ad 4.

Eodem modo, triangulo APD trianguli CAD subquadruplo existente, erunt & bina $\triangle^{la}$ LBA & APD simul sumpta binorum triangulorum LAC & CAD simul sumptorum, hoc est, totius LAD, subquadrupla. Id quod eâdem ratione de cæteris triangulis, quæ dein-

deinceps in reliquis sequentibus portionibus in infinitum describuntur, est intelligendum.

Quocirca cum pateat triangulum Parabolæ inscriptum maximum ad triangula in reliquis portionibus maxima esse ut 4 ad 1; & hæc rursus ad illa in reliquis inde sequentibus maxima ut 4 ad 1, atque hoc ita in infinitum contingere: manifestum est, si illorum maximum LAD statuatur esse 3, summam omnium, hoc est, ipsam Parabolam LBAPD, per 16. Sect. fore 4: adeoque hanc eandem trianguli LAD esse sesquitertiam. Ut supra. Atque hic ipsissimus modus est, quo eam quadravit Archimedes.

Haud dissimili ratione aliarum curvarum superiorum generum quadraturæ investigari possunt.

SECTIO XVIII.

De modo investigandi relationem, quæ inter Sphæram, Cylindrum, & Conum existit.

Quam inter se rationem Sphæra, Cylindrus, atque Conus habeant, demonstravit Archimedes Propositione 32 primi libri de Sphæra & Cylindro; verùm quo pacto illam investigare liceat, præsenti Sectione exponere visum fuit.

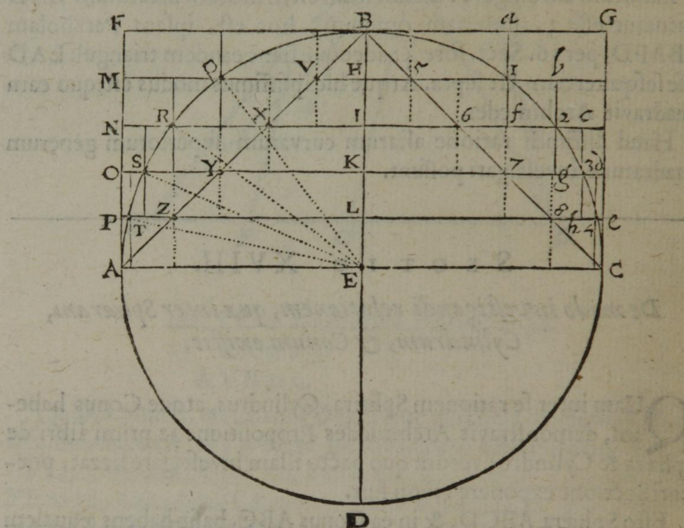
Esto Sphæra ABCD, & in ea Conus ABC, basin habens æqualem circulo in Sphæra maximo, altitudinem verò BE æqualem semidiametro Sphæræ. Dein circa hemisphærium ABC intelligatur Cylindrus AFGC, cujus similiter basis circulo in Sphæra maximo sit æqualis, & altitudo BE æqualis semidiametro Sphæræ.

Quibus positis, oporteat investigare quam inter se habeant rationem, sphæra, cylindrus, atque conus.

Ad hoc autem dividatur BE in partes quotcunque æquales, & per divisionum puncta H, I, K, L ducantur plana basi coni vel cylindri parallela.

Quoniam igitur, per 35 Tertii Elementorum, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB quadratis QH, RI, SK, TL, AE sunt æqualia, atque hæc quidem quadrata, per 2 Duodecimi Elementorum, ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE sint sicut circuli ab his semidiametris descripti, sive etiam ut cylindri æquè alti super hisce

circulis conſtituti: patet, rectangula DHB, DIB, DKB, DLB, DEB ſeu quadrata QH, RI, SK, TL, AE ad quadrata MH, NI, OK, PL, AE eſſe, ut figura hemiſphærio ABC circumſcripta ad cylindrum AFGC.



Quod ut magis fiat perſpicuum, ſupponatur partium quælibet, in quas EB diſſecta eſt, eſſe 1, eritque divisâ EB in 5 æquales partes, ratio quam figura hemiſphærio ABC circumſcripta habet ad cylindrum AFGC,

DH 9 — HB 1	▭ DHB ſeu □ QH 9	MH 5 — MH 5	□ MH 25
DI 8 — IB 2	▭ DIB ſeu □ RI 16	NI 5 — NI 5	□ NI 25
DK 7 — KB 3	▭ DKB ſeu □ SK 21	OK 5 — OK 5	□ OK 25
DL 6 — LB 4	▭ DLB ſeu □ TL 24	PL 5 — PL 5	□ PL 25
DE 5 — EB 5	▭ DEB ſeu □ AE 25	AE 5 — AE 5	□ AE 25
	ut 95	ad	125

Cum autem loco quadratorum QH, RI, SK, TL, AE, per 47. Primi Elementorum, ſubſtituere liceat exceſſus, quibus quadrata

EQ,

EQ, ER, ES, ET, EA ſuperant quadrata ex EH, EI, EK, EL, & o: erit ratio figuræ hemiſphærio A B C circumſcriptæ ad cylindrum AFGC,

□ EQ 25 — □ EH	16	□ MH 25
□ ER 25 — □ E I	9	□ N I 25
□ E S 25 — □ E K	4	□ OK 25
□ ET 25 — □ E L	1	□ P L 25
□ E A 25 —	0	□ A E 25
ut 125 ———	30 ... ad	125.

Hoc eſt, figura hemiſphærio A B C circumſcripta, conſtans ex cylindris æque-altis inæqualibus erit ad cylindrum A F G C, ex totidem cylindris ejuſdem altitudinis, maximoque præcedentium æqualibus, compoſita; ut quadratum ſemidiametri ſphæræ A E toties ſumptum quot ſunt cylindri lineævé E B partes minus totidem quadratis rectarum à puncto vel o inchoatarum, ac juxta numeros 0.1.2.3. &c. in ſerie naturali uſque ad radium continuè creſcentium, ad totidem radii quadrata.

Quod ut generaliter percipiatur, rectâ EB in quotcunque partes æquales diviſâ, ſupponamus cum Clariſſimo ac undequaque Doctiſſimo Virō D^no^ Johanne Walliſio * numerum terminorum ſeu multitudinem partium, in quas E B diſſecta fuerit, eſſe a: eritque, quærendo ſummam quadratorum hujuſce Progreſsionis juxta Bacheti aliorumvé regulas, ratio, quam figura hemiſphærio A B C circumſcripta habet ad Cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3 + 3aa - a}{6}$ ad a^3, ſeu $4a^3 + 3aa - a$ ad $6a^3$, hoc eſt, dividendo ubique per a, ut $4aa + 3a - 1$ ad $6aa$. Et manifeſtum eſt, ſi ratio inventa fuiſſet ut $4aa$ ad $6aa$, quòd tunc quidem figura hemiſphærio A B C circumſcripta ipſius cylindri A F G C fuiſſet ſubſeſquialtera. Quoniam verò ipſi $4aa$ jam accedit $3a - 1$, in quo $3a$ ſemper majus eſt quàm 1, liquet, rationem, quam figura hemiſphærio ABC circumſcripta habet ad cylindrum AFGC, eſſe majorem quàm ſubſeſquialteram.

* *Vide ejus Arithmeticam Infinitorum ſive novam Methodum Inquirendi in Curvilineorum Quadraturam, aliaque difficiliora Matheſeos Problemata.*

Hinc, ſi EB in 2 æquales partes diviſa fuerit, ratio erit, ut 21 ad 24 ſeu $\frac{21}{24}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{5}{24}$; ſi in 3, ut 44 ad 54 ſeu $\frac{44}{54}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{8}{54}$; ſi in 4, ut 75 ad 96 ſeu $\frac{75}{96}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{11}{96}$; ſi in 5, ut 114 ad 150 ſeu $\frac{114}{150}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{14}{150}$; ſi in 6, ut 161 ad 216 ſeu $\frac{161}{216}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} + \frac{17}{216}$. Et ſic deinceps. Hoc eſt, ratio proveniens ubique major eſt quàm $\frac{2}{3}$, exceſſuſque perpetuò decreſcit, ut patet per $\frac{5}{24}, \frac{8}{54}, \frac{11}{96}, \frac{14}{150}, \frac{161}{216}$ &c.

prout

prout nimirum EB continuè in plures partes dividi ſupponitur. Omnino videlicet ut per $\frac{4aa + 3a - 1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3} + \frac{3a - 1}{6aa}$ indicatur.

Atque hæc quidem de figuræ hemiſphærio A B C circumſcriptæ cum cylindro AFGC comparatione. Sequitur comparatio figuræ eidem hemiſphærio ABC inſcriptæ cum cylindro AFGC.

Ad hanc autem inveniendam, opùs tantùm eſt inveſtigare rationem, quam habent rectangula DHB, DIB, DKB, DLB ſeu quadrata QH, RI, SK, T L ſive etiam exceſſus, quibus □ta E Q, ER, E S, E T ſuperant □ta ex EH, EI, EK, E L, ad quadrata MH, NI, OK, P L, A E.

	□MH 25
□EQ 25 — □EH 16	□N I 25
□ER 25 — □E I 9	□OK 25
□E S 25 — □EK 4	□P L 25
□ET 25 — □ E L 1	□A E 25

Et invenietur rationem quęſitam fore, ut 100 ——— 30 ... ad ... 125.

Quod ut in genere de quavis figura hemiſphærio ABC inſcriptâ intelligatur, lineâ E B in quotlibet æquales partes ſectâ, ſuppono partium harum numerum eſſe a: eritque ratio figuræ hemiſphærio ABC inſcriptæ ad cylindrum AFGC, ut $\frac{4a^3 - 3aa - a}{6}$ ad a^3, ſeu $4aa - 3a - 1$ ad $6\,aa$. Et manifeſtum eſt, ſi ratio hæc fuiſſet ut $4\,aa$ ad $6\,aa$, quòd figura hemiſphærio ABC inſcripta ipſius cylindri AFGC tunc fuiſſet ſubſeſquialtera. Quia autem ipſi $4aa$ jam decedit $3a + 1$, conſtat, rationem figuræ hemiſphærio A B C inſcriptæ ad cylindrum A F G C eſſe minorem quàm ſubſeſquialteram.

Hinc, ſi E B in 2 æquales partes ſit diviſa, erit ratio ut 9 ad 24 ſeu $\frac{9}{24}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{7}{24}$; ſi in 3, ut 26 ad 54 ſeu $\frac{26}{54}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{10}{54}$; ſi in 4, ut 51 ad 96 ſeu $\frac{51}{96}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{13}{96}$; ſi in 5, ut 84 ad 150 ſeu $\frac{84}{150}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{16}{150}$; ſi in 6, ut 125 ad 216 ſeu $\frac{125}{216}$, hoc eſt, $\frac{2}{3} - \frac{19}{216}$. Et ſic deinceps. Hoc eſt, ratio proveniens ubique minor eſt quàm $\frac{2}{3}$, defectuſque perpetuò decreſcit, ut liquet per $\frac{7}{24}, \frac{10}{54}, \frac{13}{96}, \frac{16}{150}, \frac{19}{216}$, &c. prout nimirum EB continuè in plures partes dividi ſupponitur. Omnino videlicet ut per $\frac{4aa - 3a - 1}{6aa}$ vel $\frac{2}{3} - \frac{3a - 1}{6aa}$ indicatur.

Porrò, quoniam cylindro AFGC exiſtente ∞ $6aa$, figura circumſcripta

ſcripta eſt ∞ $4aa + 3a - 1$, & inſcripta ∞ $4aa - 3a - 1$, atque harum duarum differentia ∞ $6a$: erit ratio hujus differentiæ ad cylindrum AFGC, ut $6a$ ad $6aa$ ſeu ut 1 ad a, hoc eſt, ut unitas ad multitudinem partium ipſius EB. Ut autem unitas ad multitudinem partium ipſius EB, ita quoque eſt cylindrus APeC ad cylindrum AFGC. Quocirca ſuperabit circumſcripta figura ipſam inſcriptam differentiâ APeC. Id quod etiam patet, conſiderando ſuper unoquoque circulorum Q1, R2, S3, T4 duos cylindros eſſe conſtitutos, quorum alter quidem versùs B, alter autem versùs E reſpiciat, quorumque illi omnes, qui versùs E conſtituti ſunt, ſimul æquales ſint illis omnibus ſimul, qui versùs B reperiuntur; adeò ut, ſi omnibus illis qui versùs B habentur cylindrus Ae addatur, tota figura circa hemiſphærium ABC deſcripta ſuperet figuram eidem ABC inſcriptam cylindro Ae.

Ubi demum liquet, cum EB in continuum in æquales partes dividi poſſit, ita ut hinc tandem cylindrus Ae dato quolibet ſolido minor evadat, ſic etiam hemiſphærio ABC poſſe hâc ratione figuram circumſcribi alteramque eidem inſcribi, utramque ex cylindris æquè-altis conſtantem; ut deſcriptarum differentia ſit quocunque dato ſolido minor. Ac proinde, ſi partium numerus ipſius EB ſtatuatur eſſe infinitè magnus, hoc eſt, ut hemiſphærium ABC & cylindrus AFGC ex æquè multis ac infinitis quaſi circulis conflari intelligatur aut etiam ex cylindris altitudinis infinitè exiguæ: erit differentia inter circumſcriptam & inſcriptam figuram ∞ 0, adeoque ratio cylindri AFGC ad hemiſphærium ABC, ut 3 ad 2, hoc eſt, ſeſquialtera. Hinc cum idem eodem modo de eorum duplis ſit intelligendum, concluditur, cylindrum, habentem baſin æqualem circulo in ſphæra maximo & altitudinem diametro ſphæræ æqualem, ipſius ſphæræ ſeſquialterum haberi. Quod erat propoſitum.

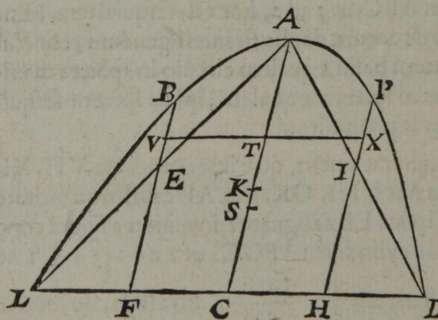
Eodem modo, quærendo rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL, AE & quadrata MH, NI, OK, PL, AE exiſtit, quantitate a multitudinem partium ipſius EB deſignante, invenietur figura cono ABC circumſcripta eſſe ad cylindrum AFGC, ut $2aa + 3a + 1$ ad $6aa$, hoc eſt, rationem illam eſſe $\frac{1}{3} + \frac{3a + 1}{6aa}$. Inveſtigando autem rationem, quæ inter quadrata VH, XI, YK, ZL & quadrata MH, NI, OK, PL, AE reperitur, invenietur figura cono ABC inſcripta eſſe ad cylindrum AFGC, ut $2aa - 3a + 1$ ad $6aa$, hoc eſt, rationem

illam esse $\frac{1}{3} - \frac{3a+1}{6aa}$. Quocirca cum duarum harum figurarum illa, quæ cono ABC circumscribitur, ubique triente cylindri AFGC major sit; at verò hæc, quæ eidem cono ABC inscribitur, ubique triente cylindri AFGC minor existat, & quidem tam illius excessus $\frac{3a+1}{6aa}$, quàm hujus defectus $\frac{-3a+1}{6aa}$, dividendo continuè EB in plures atque plures partes, tandem usque ad nihilum decrescat: sequitur, conum ABC ipsius cylindri AFGC subtriplum esse habendum. Quod erat propositum.

Hinc, qualium partium conus ABC statuitur esse 1, talium cylindrus AFGC erit 3, & totus cylindrus, qui nempe integræ sphæræ ABCD circumscribitur, 6. Quo quidem ipsius sphæræ ABCD sesquialtero ostenso, hoc est, ut, cylindro hoc existente 6, sphæra ABCD sit 4: perspicuum fit, sphæram ABCD dicti coni ABC, huic sphæræ inscripti, esse quadruplam. Quod erat propositum.

SECTIO XIX.

Ratio investigandi centrum gravitatis Parabolæ.



Explicaturus quâ ratione centrũ gravitatis figuræ investigari possit, supponemus illud cum Archimede aliisq; authoribus in unaquaque figura esse tantũ unicum punctum, quod in respectu ad illam eundem semper situm observat; sicut etiam duo aut plura gravia juxta lineas parallelas, per centra hæc tendentes, deorsum ferri.

Quo-

Quocirca ſtatuendo K eſſe centrum gravitatis Parabolæ LBAPD, & S centrum gravitatis trianguli L A D, puncta verò V & X centra duarum portionum LBA & APD: erit, ductâ V X, punctum T centrum gravitatis, magnitudinis ex utriſque compoſitæ.

Hinc ſi ponatur C A $\propto a$, erit E B vel I P, per antec. Sect., $\propto \frac{1}{4}a$, & AS $\propto \frac{2}{3}a$. Dein poſitâ AK $\propto z$, erit CK $\propto a - z$. Quibus ita conſtitutis, cum C A ſit ad A K, hoc eſt, a ad z, ſicut E B vel IP, hoc eſt, $\frac{1}{4}a$ ad B V vel PX: erit B V vel P X $\propto \frac{1}{4}z$. Quâ ſubductâ ex E B vel IP, relinquitur EV vel IX $\propto \frac{a - z}{4}$. Huic autem additâ F E vel H I $\propto \frac{1}{2}a$, fit F V vel H X, ſeu C T $\propto \frac{3a - z}{4}$.

Porrò quoniam ablatâ CK $\propto a - z$ ex CT $\propto \frac{3a - z}{4}$, remanet KT $\propto \frac{3z - a}{4}$, at AK $\propto z$ ablatâ ex AS $\propto \frac{2}{3}a$, relinquitur KS $\propto \frac{2}{3}a - z$; & quidem KT ad K S ſit, ſicut triangulum L A D ad duas ſimul portiones LBA & APD, quorum unius ad alterum ratio, per præc. Sect., eſt, ut 3 ad 1: erit ut $\frac{3z - a}{4}$ ad $\frac{2}{3}a - z$, ſic 3 ad 1. Fietque, multiplicando tum extremos in ſe invicem tum medios, $\frac{3z - a}{4} \propto 2a - 3z$. Unde reſolutâ æquatione invenitur $z \propto \frac{3}{5}a$. Quod ipſum docet, ad obtinendum quæſitum centrum K, dividendam eſſe AC in 5 æquales partes, atque earundem pro AK ſumendas eſſe tres; conveniens cum eo, quod ab Archimede oſtenſum eſt Prop^{ne} 8. lib. 2. de Æquiponderantibus: nimirum, diametrum C A à gravitatis centro K ſemper ſic dividi, ut pars KA, quæ ad verticem eſt, ſit ad partem KC, quæ terminatur ad baſin, in ratione ſeſquialtera, ſeu ut 3 ad 2.

Eodem modo aliarum figurarum, quæ à curvis ſuperiorum generum comprehenduntur, centra gravitatum inveſtigari poſſunt.

SECTIO XX.

De circuli projectione in planum, quæ item circulus exiſtat.

QUo pacto, datis poſitione circulo & plano tabulæ, locus inveniri poſſit, ad quem oculo adhibito circulus in circulum projiciatur,

ciatur, ostendit mihi per literas paucis abhinc annis ingeniosissimus atque exercitatissimus D. Claudius Mylon, J.C, qui super hanc rem sequentia excogitavit.

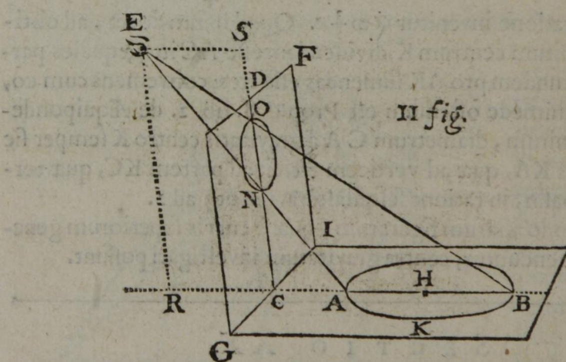
Esto planum tabulæ G F, circulus autem datus A K B, oporteatque punctum invenire E, ita ut N O, projectio ipsius A K B in dato plano G F, sit etiam circulus.

Primò, si planum tabulæ G F & circuli A K B sunt parallela, manifestum est [a], quòd, ubicunque oculus E in spacio solido indefinito extra planum tabulæ constitutus fuerit, projectio N O ipsius A K B in plano G F semper item circulus sit futura.

a p 4 Prop. Primi Conicorum Apollonii.

Secundò verò, si planum tabulæ G F & circuli A K B non sint parallela, dico punctum oculi E ubique sumi posse in Hyperbolâ, positione datâ.

Etenim G I existente utriusque plani communi sectione, & rectâ C A H B, super ipsam perpendiculari, in plano circuli A K B transeunte



per ejus centrum H, si ex C super G I in plano tabulæ G F excitetur perpendicularis C D : erit angulus B C D aut ejus complementum

[b] in-

b inclinatio horum duorum planorum, & planum, quod per duas hasce lineas CB, CD transit, ad utrumque ex illis c perpendiculare.

Dein, puncto E existente in plano BCD, quò NO, sectio coni scaleni EAKB per planum tabulæ GF, circulus existat, requiritur ut triangulum ENO, ad verticem E abscissum, sit ipsi EBA, triangulo per axem d, simile ac subcontrariè positum, hoc est, ut EO sit ad EN, sicut EA ad EB.

b p 6 def. Vndecimi Elementorum.
c p 18 Prop. Vndecimi Elem.
d p 5 Prop. Primi Conic. Apollonii.

III fig.

Hinc in 3tia figura rectis CB, CD, unà cum punctis A, H, B, & E iisdem existentibus, quæ in 2da figura, si, ductâ AG æquali AB ac parallelâ CD, jungatur BG, & ex H huic agatur parallela HI, cui perpendicularis sit HK, atque Asymptotis HI, HK per puncta A & B describantur e Hyperbolæ oppositæ AL, BM: dico punctum oculi E ubilibet sumi posse in Hyperbola AL vel BM, hoc est, si ex quocunque in ea puncto E agantur EA, EB secantes CD in N & O, quòd triangula ENO & EBA futura sint similia ac subcontrariè posita.

e p 4 Prop. Secundi Conic. Apollonii.

Ad quod demonstrandum ducatur AP parallela HI. Hinc cum BE occurrat ipsi BG, occurret etiam BE ipsis HI, AP, quæ cum BG sunt parallelæ. Esto ipsarum BE, AP concursus P. Et quoniam BE secat Hyperbolas oppositas AL, BM, secabit & ipsa earundem Asymptotos HI, HK. quod sit in I & K. Porrò divisâ IK bifariam in Q, descri-

ſcribatur ex Q intervallo IQ vel Q K ſemicirculus IHK, qui tranſibit per H, propter angulum rectum IHK, jungaturque QH.

His igitur ſic poſitis, quoniam IQ eſt æqualis QK, atque etiam IE [f] æqualis KB, erit & tota EQ toti QB æqualis. Atqui æqualis quoque eſt AH ipſi HB. Parallela igitur eſt [g] AE ipſi HQ. Eſt autem per conſtr. etiam AP ipſi HI parallela. Quocirca triangulum AEP ſimile exiſtens triangulo iſoſceli HQI, & ipſum iſoſceles eſt, ejuſque angulus ad A æqualis angulo ad P ſeu huic alterno EBG. Sed in triangulo iſoſceli ABG angulus totalis ABG eſt æqualis angulo G, hoc eſt, totali GAP, ipſi alterno: è quibus æqualibus angulis ABG & GAP quum auferuntur æquales EBG & EAP, remanent æquales ABE & EAG vel ENO. Hinc cum in triangulis EBA & ENO anguli ABE & ENO ſint æquales, & angulus ad E utrique triangulo ſit communis, erit & 3tius EAB 3tio EON [h] æqualis, ac proinde triangulum ENO [i] ſimile triangulo EBA. Quæ cum ſubcontrariè ſint poſita, patet ſectionem NO [k] eſſe circulum. Quod erat faciendum. Eadem eſt ratio de omni alio puncto, in Hyperbola AL aſſumpto, aut etiam in oppoſita Hyperbola BM, tranſpoſitis ſolummodo literis A & B, unâ pro alia.

Cæterùm notandum, demonſtrationem allatam triplici datorum poſitioni convenire, nimirum, ſive tabula CD inter oculum E & objectum AB, ſive oculus E inter tabulam CD & objectum AB, ſive etiam objectum AB inter oculum E & tabulam CD ſumatur; ſimiliterque facile eſſe demonſtrare per abſurdum, punctum oculi E non poſſe ſumi extra Hyperbolas AL, BM; ac idcirco id ipſum non cadere in Hyperbolas conjugatas.

Verùm enimverò quoniam his intellectis perſpicere jucundum eſt, quonam pacto in haſce cogitationes aliquis incidere queat, ut punctum oculi E ubicunque in alterutra Hyperbolarum AL vel BM pro lubitu ſumi poſſe autumet: non è re me facturum judicavi, ſi calculum analyticum, è quo totum hoc innoteſcit, paucis hîc ſubjecero. Ponatur itaque factum, quod quæritur, ſitque

CA ∞ a
AB ∞ b
AN ∞ c
AR ∞ x
RE ∞ y
EB ∞ z.

Ex ſimilitudine △rum RBE & CBO

RB BE CB

$x+b$ — z — $a+b$ | ad BO. $\frac{az+bz}{x+b}$. Quę ſubducta ex BE ∞ z, relinquit $\frac{xz-az}{x+b}$, pro EO.

Ex

[f] ꝑ 8 Prop. Secundi Conic. Apollonii.
[g] ꝑ 2 Prop. Sexti Elem.
[h] ꝑ 32 Primi Elem.
[i] ꝑ 4 Prop. & 1 Def. Sexti Elem.
[k] ꝑ 5 Prop. Primi Conic. Apollonii.

Ex similitudine △rum CAN & RAE

CA AN RA

a —— c —— x | ad AE. $\frac{cx}{a}$

Ex suppositione quæsiti, tanquam facti

subtr. AN. c

EO EA EB

$\frac{xz - az}{x + b}$ ——— EN. $\frac{cx - ca}{a}$ — $\frac{cx}{a}$ | z

Vide figuram 11.

$$\frac{xzz - azz}{x + b} \propto \frac{ccxx - ccax}{aa}$$

$$\frac{zz}{x + b} \propto \frac{ccx}{aa}$$

$$zz \propto \frac{ccxx + ccbx}{aa}.$$

Ex similitudine △lorum REB & SEN

EB ER EN ES vel RC

z —— y ——— $\frac{cx - ca}{a}$ | $x - a$

$$xz - az \propto \frac{cxy - cay}{a}$$

$$z \propto \frac{cy}{a}$$

$$\& \; zz \propto \frac{ccyy}{aa} \propto \frac{ccxx + ccbx}{aa} \propto zz$$

fit $yy \propto bx + xx$

$\& \; y \propto \sqrt{bx + xx}.$

Ubi patet, cum in æquatione inventa $yy \propto bx + xx$ alterutra ex incognitis quantitatibus x vel y ad duas dimensiones ascendat, & quidem xx signo + adficiatur, punctumquæsitum E cadere in Hyperbolam.

Ad cujus latus rectum & transversum inveniendum, quoniam, quantitate mm nullâ existente, per ea quæ pag. 31 Geometriæ docentur,

tur, latus rectum eſt $\frac{oz}{a}$, & quidem quantitas ox hîc pro eadem haberi debeat quâ bx, hoc eſt, o pro eadem quâ b, atque hîc non habeantur z & a: erit latus rectum $\infty\ b$.

Vide novam Geometriæ editionem.

Deinde, quoniam ratio lateris recti ad tranſverſum latus eſt ut pzz ad aam, & quidem p ipſi m ſit æqualis, propterea quòd nulla ipſi xx fractio adhæreat, atque z & a, (ſicut dictum) in inventa æquatione non reperiantur vel ſibi invicem ſint æquales: erit ſimiliter latus tranſverſum AB $\infty\ b$.

Porrò ut inveniatur centrum, quoniam terminus illud indicans eſt $\frac{aom}{2pz}$, oportet facere AH $\infty\ \frac{o}{2}$ ſeu $\frac{1}{2}b$: eritque H, medium ipſius AB, centrum Sectionum.

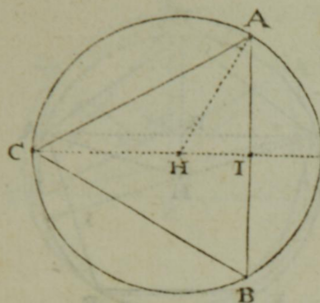
Denique ER $\infty\ y\ \infty\ \sqrt{bx+xx}$ erit ordinatim adplicata ad diametrum AR. Quæ quidem, ſi RC vocetur x, erit $\infty\ \sqrt{aa+ab+2ax+bx+xx}$. Unde cætera huc ſpectantia facilia ſunt.

SECTIO XXI.

De figuris ordinatis, circulo inſcriptis; ac angulorum vel arcuum in partes æquales ſectione.

QUoniam figurarum regularium in circulo deſcriptio non indifferenter uno eodemque modo procedit, ſed pro angulorum numero una longè aliter atque alia ei inſcribatur, illiuſque deſcriptionis diverſitas à diverſa ſuorum laterum ad radium relatione dependeat: haud inutile fuerit, ſi, pro radio aſſumptâ unitate, paucis hîc oſtendam, quâ ratione in ſimpliciſſimis terminis æquationes inveniri poſſint, quarum radices dictam hanc laterum ad radium relationem exhibeant, ipſorumque quantitatem exactè determinent. Id quod uno aut altero exemplo oſtendiſſe ſuffecerit.

In triangulo.



Esto CH vel HA $\propto 1$

& AB $\propto x$, eritque AI vel IB $\propto \frac{1}{2}x$.

$$\text{E}\,\square^{to}\ \text{HA}.\ 1$$

$$\text{subtr.}\ \square\ \text{AI}.\ \tfrac{1}{4}xx.$$

$$*\ \square\,\text{HI}.\ 1-\tfrac{1}{4}xx$$

$$\text{HI}.\ \sqrt{1-\tfrac{1}{4}xx}$$

$$\text{add.}\ \text{CH}.\ 1$$

$$\text{CI}.\ 1+\sqrt{1-\tfrac{1}{4}xx}$$

$$\text{add.}\begin{cases}\square\ \text{CI}.\ 2-\tfrac{1}{4}xx+\sqrt{4-xx}\\ \square\ \text{AI}.\ \tfrac{1}{4}xx\end{cases}\quad \square\ \text{CA vel AB.}$$

$$\dagger\ \text{fit}\ \square\,\text{CA}.\ 2+\sqrt{4-xx}\propto xx$$

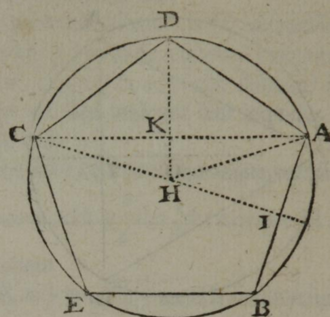
$$\sqrt{4-xx}\propto xx-2$$

$$4-xx\propto x^4-{}^4xx+4$$

$$3xx\propto x^4$$

$3\propto xx$, vel $xx-3\propto 0$. Æquatio trian-
guli.

In pentagono.



Ex ſimilitudine △rum HAI & CDK

□HA   * □HI   □CD   □CK

$1 \text{ --- } 1 - \frac{1}{4}xx \text{ --- } xx \mid \text{ad } xx - \frac{1}{4}x^4$

per $\underline{\;4\;}$ † □CA

† fit □CA. $4xx - x^4 \propto 2 \dagger \sqrt{4 - xx}$

$-2 + 4xx - x^4 \propto \sqrt{4 - xx}$

$4 - 16xx + 20x^4 - 8x^6 + x^8 \propto 4 - xx$

$x^6 - 8x^4 + 20xx - 15 \propto 0$

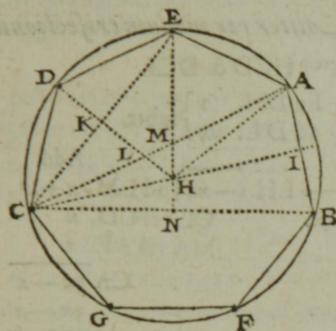
div. per $xx - 3 \propto 0$

$x^4 - 5xx + 5 \propto 0.$

Æquatio pentagoni.

In

In heptagono.



Ex similitudine $\triangle^{rum}$ HAI & CDK

HA AI CD DH. 1 } subtr.
$1 - \frac{1}{2}x - x$ | ad DK. $\frac{1}{2}xx$

Ex similitudine $\triangle^{rum}$ CKH & ENC

□CH KH. $\overline{1 - \frac{1}{2}xx}$ † □CE □CN

1 —— □KH. $1 - xx + \frac{1}{4}x^4$ - —$4xx - x^4$ | ad $4xx - 5x^4 + 2x^6 - \frac{1}{4}x^8$

† □CA □CB vel CA 4

fit $2 + \sqrt{4 - xx} \propto 16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8$

$\sqrt{4 - xx} \propto -2 + 16xx - 20x^4 + 8x^6 - x^8$

$4 - xx \propto 4 - 64xx + 336x^4 - 672x^6 + 660x^8 - 352x^{10} + 104x^{12} - 16x^{14} + x^{16}$

$x^{14} - 16x^{12} + 104x^{10} - 352x^8 + 660x^6 - 672x^4 + 336xx - 63 \propto 0$. Æquatio hæc dividi poteſt per $xx - 3 \propto 0$.

Et fit

$$x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0.$$

Hæc verò æquatio ulteriùs dividi nequit per binomium, quod conſtat ex quantitate incognita xx, + vel — aliquo numero, ultimum terminum 21 abſque fractione dividente; ſed per aliam ſummam, ut poſt patebit.

Notandum autem, tam æquationem inventam Pentagoni, quàm hanc priorem Heptagoni per idem binomium, utpote $xx - 3 \propto 0$, quæ eſt æquatio Trianguli, & non per aliud quodvis binomium eſſe diviſibilem.

Aliter per modum triſectionis.

Ex ſimilitudine △rum HCD & DCL

HC CD CD Ex DH. 1 } ſubtr.
$1 - x - x$ | ad DL. xx }

HD DE Add.

Ex ſimilitudine triangulorum HDE & HLM. $1 — x —$ LH. $\overline{1 - xx}$ | ad LM. $x + x^3$

CL vel CD. x

MA vel AE. x

CA. $\overline{3x - x^3}$

$3x - x^3$

$\overline{-3x^4 + x^6}$

$9xx - 3x^4$ † □CA

fit □CA. $\overline{9xx - 6x^4 + x^6} \propto 2 + \sqrt{4 - xx}$

$\overline{-2 + 9xx - 6x^4 + x^6} \propto \sqrt{4 - xx}$

$\overline{x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + 4} \propto 4 - xx$

$\overline{x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35} \propto 0.$

Hæc æquatio per binomium eſt indiviſibilis. Quòd ſi verò ipſa dividatur per æquationem inventam Pentagoni $x^4 - 5xx + 5 \propto 0$, prodibit $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$, æquatio Heptagoni, in ſimpliciſſimis terminis. Quæ etiam obtinebitur dividendo æquationem ante inventam $x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$ per hanc ſummam $x^6 - 6x^4 + 9xx - 3 \propto 0$. Oritur enim rurſus $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$. Quæ & hoc inſuper modo inveniri poteſt: nimirum, comparando quadratum ex CA, biſectionis modo quæſitum, cum eodem quadrato CA, per triſectionis modum inveſtigato, omittendo ejuſdem quadrati valorem $\propto$ † $2 + \sqrt{4 - xx}$.

Hoc eſt, ponendo $16xx - 20x^4 + {}^{8}x^{6} - x^8 \propto 9xx - 6x^4 + x^6$

& fit $\overline{x^8 - 7x^6 + 14x^4 - 7xx \propto 0}$

vel $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$. Æquatio heptagoni, ut ante.

His

His adde reductionis modum à D^no Huddenio inventum, quo ex binis inventis æquationibus $x^{12} + 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$ & $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$ æquationem simplicissimam sic investigat, attollendo scilicet inferiorem, ut ad æque-multas cum superiore dimensiones ascendat, ac deinde operando, ut sequitur.

$$x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 35xx \propto 0$$
$$x^{12} - 13x^{10} + 65x^8 - 157x^6 + 189x^4 - 105xx + 21 \propto 0$$
$$x^{10} - 11x^8 + 45x^6 - 84x^4 + 70xx - 21 \propto 0$$
$$x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$$
$$\text{div. per } xx - 2.\ \ x^8 - 9x^6 + 28x^4 - 35xx + 14 \propto 0$$
$$\text{\& fit } x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0. \text{ Ut supra.}$$

Porrò quoniam circulo inscriptis Hexagono, Decagono, & Tetradecagono, radio, ut supra, existente $\propto 1$, & latere Polygoni $\propto x$, æquationes inveniuntur $x - 1 \propto 0$, $xx + x - 1 \propto 0$, & $x^3 - xx - 2x + 1 \propto 0$, quæ præcedentibus Trianguli, Pentagoni, & Heptagoni sunt simpliciores (id quod similiter de sequentibus Polygonis, dupli angulorum numeri, intelligendum est): consultiùs fuerit ut in eorum descriptionem æquationes, quæ Polygonis hisce dupli angulorum numeri respondeant, investigemus.

Quoniam autem ad æquationes hasce, sicut & ad superiores, compendiosè inveniendas plurimùm deserviunt æquationes, quibus datum angulum seu arcum in partes aliquot æquales dividere licet, subjungam eas, quæ ab eodem Huddenio hunc in finem sunt inventæ, qui ipsas tantâ cum facilitate unam ex alia elicere novit, ut unius circiter horæ quadrantis spacio sequentes mihi suppeditaverit,

Æquationes, ad dividendum angulum seu arcum in partes æquales, numero impares.

Æquatio		Partes
$x^3 - 3x \pm q \propto 0$	æquatio, ad dividendum angulum seu arcum in	3 æquales partes.
$x^5 - 5x^3 \pm 5x - q \propto 0$		5
$x^7 - 7x^5 \pm 14x^3 - 7x \pm q \propto 0$		7
$x^9 - 9x^7 \pm 27x^5 - 30x^3 \pm 9x - q \propto 0$		9
$x^{11} - 11x^9 \pm 44x^7 - 77x^5 \pm 55x^3 - 11x \pm q \propto 0$		11
$x^{13} - 13x^{11} + 65x^9 - 156x^7 + 182x^5 - 91x^3 + 13x - q \propto 0$		13

Ratio autem, quâ eas invenit, eſt talis:

Suppoſito radio circuli ꝏ 1, & ſubtenſa arcus dati ꝏ q, ponatur ſubtenſa quæſitæ partis ꝏ x. Dein operatio ad triſectionem ita inſtituatur

	x	. 1
Mult. per	x	. 2
ſubtr.	xx	. 3
ex unitate ſeu	1	. 4
	$1 - xx$	. V
Mult. per	x	. 2
	$x - x3$	. 6
add.	x	. 1
	$^2x - x3$	. VII
add.	x	. 1
Eritque	q ꝏ $3x - x3$	. 8. Æquatio triſectionis.

Ad quinque ſectionem, ſicut & ad omnes ulteriores ſectiones impares, idem fermè eſt proceſſus, modò pro primo termino nunc ſumatur ille, qui ante notabatur VII, & tertii termini ſubtractio non ampliùs jam ex unitate ſed ex eo, qui per V in immediatè antecedenti operatione denotabatur, deinceps in aliis omnibus fiat.

Quemadmodum hîc videre licet.

(VII)	$2x - x^3$	. 1
Mult. per	x	. 2
ſubtr.	$2xx - x^4$	. 3
ex (V)	$1 - xx$	. 4
	$1 - 3xx + x^4$	. V
Mult. per	x	. 2
	$x - 3x^3 + x^5$	. 6
add.	$2x - x^3$	. 1
	$3x - 4x^3 + x^5$	. VII
add.	$2x - x^3$	. 1
& fit	q ꝏ $5x - 5x^3 + x^5$	. 8. Æquatio quinque ſectionis.

Ope-

Operatio autem ſeptuſectionis eſt hujuſmodi:

(VII) $3x - 4x^3 + x^5$. 1
Mult. per x . 2
ſubtr. $3xx - 4x^4 + x^6$. 3
ex (V) $1 - 3xx + x^4$. 4
$1 - 6xx + 5x^4 - x^6$. V
Mult. per x . 2
$x - 6x^3 + 5x^5 - x^7$. 6
add. $3x - 4x^3 + x^5$. 1
$4x - 10x^3 + 6x^5 - x^7$. VII
add. $3x - 4x^3 + x^5$. 1

Et habebitur $q \propto 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$. 8. Æquatio ſeptuſectionis.
Et ſic de aliis in infinitum.

Deinde ut pateat, quo pacto æquationes, quibus datus angulus ſeu arcus in partes numero pares dividi poteſt, inveniendæ ſint, oportet tantùm in æquatione, quâ datus angulus ſeu arcus in æquales partes dividitur, loco quantitatis incognitæ x, ubique $\sqrt{4xx - x^4}$ ſubſtituere, & loco xx hujus quadratum, hoc eſt, $4xx - x^4$, atque ita porrò: habebiturque alia æquatio, per quam idem angulus ſeu arcus in duplo plures partes ſecabitur.

Sic, cum, exempli gratiâ, æquatio, quâ angulus in 2 æquales partes dividitur, ſit $x^4 - 4xx + qq \propto 0$, aſſumpto $4xx - x^4$ locum xx

ſcribo $16x^4 - 8x^6 + x^8$ pro x^4
& $-16xx + 4x^4$ pro $-4xx$
nec non $+qq$ pro $+qq$,

& invenietur $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + qq \propto 0$. Æquatio ſectionis anguli ſeu arcus in 4 æquales partes.

Sic &, æquatione, quâ angulus in 3 æquales partes dividitur, exiſtente $x^3 - 3x + q \propto 0$

ſcribo $\overline{4xx - x^4}\sqrt{4xx - x^4}$ pro x^3
& $-3\sqrt{4xx - x^4}$ pro $-3x$
ut & $+q$ pro $+q$

& habebo $q + 4xx - x^4 - 3\sqrt{4xx - x^4} \propto 0$
hoc eſt, $-4xx + x^4 + 3\sqrt{4xx - x^4} \propto q$

& ſit,

& fit, ductâ utrâque parte in se quadratè, ordinataque æqualitate, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + qq \propto 0$. Æquatio dividendi angulum seu arcum in 6 æquales partes.

Similiterque, cum $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + qq \propto 0$ sit æquatio, quâ angulus in 4 æquales partes secatur, invenietur, operando ut ante, $x^{16} - 16x^{14} + 104x^{12} - 352x^{10} + 660x^8 - 672x^6 + 336x^4 - 64xx + qq \propto 0$. Quæ est æquatio dividendi angulum seu arcum in 8 æquales partes. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, æquationes hasce inventas, quibus angulus seu arcus in æquales partes sive pares sive impares dividitur, non semper esse simplicissimas, nisi tantùm cùm partium illorum numerus est primus. At verò reliquas quod attinet, quamvis ad præcedentes referri possint, ipsas tamen nihilominus sic ad Polygonorum æquationes, quales illas invenire intendimus, optimè omnium inservire. Id quod ostendere nunc nostrum est institutum.

In hunc finem inveniantur duæ æquationes diversæ, unam eandemque habentes quantitatem incognitam. Ad quas obtinendas, assumpto radio $\propto 1$, & latere Polygoni, cujus numerus angulorum sit dati duplus, $\propto x$, accipio duas æquationes ex jam inventis, quarum una inserviat divisioni anguli seu arcus in tot partes æquales, quot indicat minor semissis dati numeri angulorum; & altera eidem dividendo in tot partes, quot indicat ejusdem numeri major semissis. Quæ binæ si deinde ad eandem quantitatem qq revocentur, & in priori pro qq substituatur $2 - x$ & in posteriori pro qq substituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes diversæ, unam eandemque quantitatem incognitam habentes, quæ superiori modo reductæ dabunt æquationem simplicissimam quæsitam, in quâ incognita quantitas latus Polygoni designat, dupli angulorum numeri.

Ut ad describendum Pentagonum in circulo, quoniam, assumpto radio $\propto 1$, & latere Decagoni $\propto x$, minor semissis numeri angulorum 5, est 2, & major semissis 3, hinc duas accipio æquationes, ex supra inventis, nimirum: $qq \propto 4xx - x^4$ & $q \propto 3x - x^3$, quarum una inserviat dividendo angulo seu arcui in 2, & altera eidem dividendo in 3 æquales partes. Quæ binæ si ad eandem quantitatem qq revocentur, atque in æquationibus inde ortis $qq \propto 4xx - x^4$ & $qq \propto 9xx - 6x^4 + x^6$ pro qq in priori substituatur $2 - x$ & pro qq in posteriori substituatur $2 + x$: obtinebuntur duæ æquationes differentes ejusdem radicis, nempe $x^4 - 4xx - x + 2 \propto 0$ & $x^6 - 6x^4 + 9xx - x - 2 \propto 0$,

quæ,

quæ, modo ſupra explicato, reductæ dabunt $xx + x - 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam Decagoni.

Sic & ad deſcribendum Heptagonum in circulo, quoniam ipſius 7, numeri angulorum, minor ſemiſſis eſt 3, & major ſemiſſis 4, ideo aſſumptis binis æquationibus $q \propto 3x - x^3$ & $qq \propto -x^8 + 8x^6 - 20x^4 + 16xx$, quarum prior angulo ſeu arcui in 3, & poſterior eidem in 4 æquales partes dividendo inſervit: fit, ut ſi ipſæ deinde ad eandem quantitatem qq revocentur, ac in priori harum pro qq ſubſtituatur $2 - x$, & in poſteriori pro qq ſubſtituatur $2 + x$, duæ ejuſdem radicis æquationes, ſed tamen differentes, utputa $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 2 \propto 0$ & $-x^8 + {}^{8}x^6 - 20x^4 + 16xx - x - 2 \propto 0$, remaneant. Quæ ſi porrò, ut ſupra, reducantur, dabunt $x^3 - xx - 2x + 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam Tetradecagoni.

Haud ſecus ad deſcribendum Endecagonum in circulo, ex binis æquationibus ſuperioribus $q \propto 5x - 5x^3 + x^5$ & $qq \propto -x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ (quarum una ad angulum ſeu arcum in 5, & altera ad eundem in 6 æquales partes dividendum inſervit) duæ ejuſdem radicis æquationes differentes invenientur $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 2 \propto 0$ & $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx - x - 2 \propto 0$. Quæ, ut ante, reductæ dabunt $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3xx + 3x - 1 \propto 0$, æquationem ſimpliciſſimam 22goni.

Pari modo, ſi in circulo 13gonum ſit deſcribendum, ope æquationum $qq \propto -x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx$ & $q \propto 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$, quibus datus angulus ſeu arcus in 6 & 7 æquales partes dividitur, invenientur binæ ejuſdem radicis æquationes differentes $-x^{12} + 12x^{10} - 54x^8 + 112x^6 - 105x^4 + 36xx + x - 2 \propto 0$ & $x^{14} - 14x^{12} + 77x^{10} - 210x^8 + 294x^4 - 196x^4 + 49xx - x - 2 \propto 0$. Ex quibus deinde, reductione ante oſtenſâ, invenitur $x^6 + x^5 - 5x^4 - 4x^3 + 6xx + 3x - 1 \propto 0$, æquatio ſimpliciſſima 26goni. Atque ita de reliquis in infinitum.

Ubi notandum, præter æquationes inventas & alias inveniri poſſe, quarum reductione, ut ſupra, faciliùs ad æquationes Polygonorum ſimpliciſſimas pervenitur: nimirum, aſſumendo æquationem ſectionis anguli ſeu arcus in tot partes æquales, quot Polygonum habet angulos, & in locum q ſubſtituendo deinde binarium: habebiturque æquatio, cujus incognita quantitas deſignat latus polygoni dupli angulorum numeri. Quæ æquatio ſi porrò cum altera ex binis ſuperioribus, quæ non per multiplicationem ad qq eſt reducta, comparetur:

tur: reductione harum duarum quæsita simplicissima, breviùs quàm supra, obtinebitur.

Ut quoniam ad describendum in circulo Pentagonum æquatio sectionis anguli seu arcus in 5 æquales partes est $x^5 - 5x^3 + 5x - q \propto 0$, mutatâ q in 2, habebitur $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \propto 0$. Quæ est æquatio Decagoni. Hæc autem si cum $x^4 - 4xx - x + 2 \propto 0$, quæ altera est supra inventarum, multiplicatione ad qq non reducta, comparetur, præcedenti reductione simplicissimam Decagoni æquationem breviùs quàm supra manifestabit. Et sic de aliis in infinitum.

Ad hæc notandum, cum & aliæ æquationes existant, eidem Polygono in circulum describendo inservientes, quarum reductione, sive illæ inter se, sive cum aliis præcedentibus comparentur, æquatio simplicissima Polygoni inveniri queat: suffecerit id uno aut altero exemplo ostendisse. Quippe in Decagono præter tres superiores inventas, utpute $x^4 - 4xx - x + 2 \propto 0$, $x^6 - 6x^4 + 9xx - x - 2 \propto 0$, & $x^5 - 5x^3 + 5x - 2 \propto 0$, reperiuntur etiam $x^6 - 4x^4 + 4xx - 1 \propto 0$ & $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$.

Sic etiam in 14^{gono} præter tres $x^6 - 6x^4 + 9xx + x - 2 \propto 0$, $x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16xx + x + 2 \propto 0$, & $x^7 - 7x^5 + 14x^3 - 7x + 2 \propto 0$ inveniuntur etiam $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$, & $x^6 - 5x^4 + 6xx - 1 \propto 0$.

Haud secus in 22^{gono} præter tres $x^{10} - 10x^8 + 35x^6 - 50x^4 + 25xx + x - 2 \propto 0$, $x^{12} - 12x^{10} + 54x^8 - 112x^6 + 105x^4 - 36xx + x + 2 \propto 0$, & $x^{11} - 11x^9 + 44x^7 - 77x^5 + 55x^3 - 11x + 2 \propto 0$ invenitur etiam $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \propto 0$.

Præterea animadversione dignum, quòd, quemadmodum supra æquatio $x^{10} - 12x^8 + 54x^6 - 112x^4 + 105xx - 35 \propto 0$, una ex binis pro Heptagono inventis, divisa per $x^4 - 5xx + 5 \propto 0$, æquationem Pentagoni, dat $x^6 - 7x^4 + 14xx - 7 \propto 0$, æquationem simplicissimam Heptagoni; ita etiam hîc æquatio $x^5 - 4x^3 + 3x - 1 \propto 0$, una ex illis pro 14^{gono} inventis, divisa per $xx + x - 1 \propto 0$, æquationem Decagoni, exhibeat $x^3 - xx - 2x + 1 \propto 0$, æquationem simplicissimam 14^{goni}.

Sic etiam, quòd $x^9 - 8x^7 + 21x^5 - 20x^3 + 5x - 1 \propto 0$, una ex illis pro 22^{gono} inventis, divisa per $x^3 - 3x + 1 \propto 0$, æquationem 18^{goni}, exhibeat æquationem $x^6 - 5x^4 - x^3 + 6xx + 2x - 1 \propto 0$. quæ, prout per $x + 1 \propto 0$ divisa fuerit, ostendat $x^5 - x^4 - 4x^3 + 3xx + 3x - 1 \propto 0$, æquationem simplicissimam 22^{goni}.

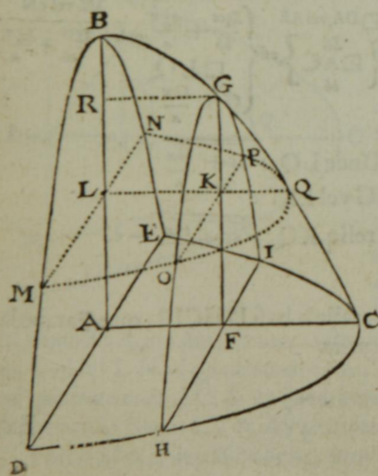
Ostendimus itaque regulas generales, quibus æquationes omnium sim-

ſimpliciſſimæ, tum ad angulum ſeu arcum in partes quotcunque æquales dividendum, tum ad deſcribenda in circulo quælibet Polygona regularia, inveniri queant. Ubi tandem advertendum, methodum hanc, quâ duæ aut plures æquationes differentes, unam tantùm eandemque quantitatem incognitam habentes, mutuâ reductione ſimpliciſſimam æquationum ſubminiſtrant, ad aliorum quoque difficiliorum Problematum æquationes ſimpliciſſimas inveſtigandas, inſervire poſſe.

SECTIO XXII.

De lineis curvis ſuperiorum generum, ex ſolidi ſectione ortis.

CUm curvarum linearum contemplatio per ſe jucunda pariter atque utilis exiſtat, ac illæ, quæ ſuperioris ſunt generis vel ultra Sectiones Conicas compoſitæ, à nullo (quod ſciam) hactenus ex ſolidi alicujus ſectione generari oſtenſæ ſint: viſum fuit, quæ circa hanc rem tribus abhinc annis ab ingenioſiſſimo ac amiciſſimo noſtro Huddenio excogitata & inventa ſunt, atque illarum cognitionem mirificè promovere valent, lubenti animo hîc impertiri.



Eſto DHCIE Parabola primi generis, (hoc eſt, qualis oritur ex ſectione Coni, uni laterum trianguli per axem parallelâ) cujus axis ſit AC, & ordinatim ad eum adplicata DAE. Erectâ autem ex A ſuper plano hujus Parabolæ perpendiculari AB, intelligantur ex B per ſingula puncta Parabolæ DHCIE deſcriptæ eſſe aliæ Parabolæ, habentes communem axem AB, ita ut DMBNE tota Parabola, & ABGQC ſemi-Parabola exiſtat. Quibus ita poſitis cum hoc pacto ſolidum

dum concipi possit, in quo sectio quævis per AB incedens, ut & quæ basi DHCIE sit parallela, Parabolæ existunt; atque in eo deinde sectio institui queat, ut HOGPI, quæ Parabolæ DMBNE sit parallela: dico sectionem hanc HOGPI curvam fore, quæ 2[di] est generis.

Ad quod demonstrandum supponatur planum basi DHCIE æquidistans, secans quidem planum curvæ HOGPI secundùm rectam lineam OKP, & planum Parabolæ DMBNE secundum rectam MLN, at planum semi-Parabolæ ABGQC secundùm rectam LKQ, quodque secans solidum in sectione faciat curvam MOQPN.

His igitur sic præsuppositis, cum GF axis curvæ HOGPI sit ipsi BA axi Parabolæ DMBNE parallelus, nec non rectæ MLN & OKP ipsis ordinatis DAE, HFI parallelæ: erunt & ipsæ MLN & OKP inter se parallelæ, & ad axes BA, GF ordinatæ. Deinde, ex G ductâ GR ipsi QKL vel CFA parallelâ, donec secet ARB in R, factâque GK ∞ x, OK vel KP ∞ y, AB ∞ a, AC ∞ b, DA vel AE ∞ g, & GR vel KL ∞ c, procedo, ut sequitur.

Ex natura Parabolæ

□AC □RG AB
$bb \ldots\ldots cc \ldots\ldots a$ | ad RB. $\frac{acc}{bb}$

Ex natura Parabolæ: AB a — adde LR vel KG. x — LB. $\frac{acc}{bb} + x$

□DA vel AE gg, □AC bb, ad □ML vel LN $\frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a}$, □LQ $cc + \frac{bbx}{a}$, unde ML vel LN $\sqrt{\frac{ggcc}{bb} + \frac{ggx}{a}}$.

Unde LQ. $\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}}$
subtr. RG vel LK. c
reliq. KQ. $\sqrt{cc + \frac{bbx}{a}} - c$.

Jam quia sectio MOQPN, parallela basi DHCIE, quæ Parabola est, etiam Parabola existit: erit rursus

Ex

Ex natura Parabolæ

$$\underset{\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}}{LQ} \ldots \underset{\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}},-c\,\ldots}{KQ} \underset{\frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}}{\square ML \text{ vel } LN} \Big| \text{ad} \underset{\frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-\frac{\frac{ggc^3}{bb}+\frac{cggx}{a}}{\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}}=yy.}{\square OK \text{ vel } Kp}$$

Hoc est, $yy = \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-\sqrt{\frac{ac^4g^4+g^4ccbbx}{ab^4}}$, vel $\sqrt{\frac{ac^4g^4+g^4ccbbx}{ab^4}} = \frac{ggcc}{bb}+\frac{ggx}{a}-yy$.

Unde, quadratis singulis partibus, demptisque æqualibus, invenitur

$$\frac{g^4ccx}{abb}+\frac{g^4xx}{aa}-\frac{2ggcc}{bb}yy-\frac{2ggx}{a}yy+y^4=0$$

$$\text{Seu } y^4 = \frac{2ggx}{a}yy+\frac{2ggcc}{bb}yy-\frac{g^4}{aa}xx-\frac{g^4cc}{abb}x.$$

Cum igitur in hac æquatione quantitas incognita y ad quatuor dimensiones ascendat, nec ipsa æquatio ad aliam reduci possit, in qua y pauciores habeat dimensiones, & in qua nullum simul signum radicale uni vel pluribus terminis præfigatur, in quibus reperitur x: sequitur sectionem HOGPI esse lineam curvam secundi generis.

Ut verò constet curvam MOQPN esse Parabolam, quemadmodum hactenus fuit suppositum, considerandum est, quadratum lineæ cujusque ex L ductæ ad aliquod in ea punctum, facientis cũ LM vel LN quemcunque angulum, eandem habere rationem ad quadratum lineæ ex A ad Parabolam DHCIE ductæ, eundem cum AD vel AE angulum facientis, quam BL habet ad BA. Proinde sumendo in adjuncta figura similes literas similes referre lineas, erit quadratũ ex LM vel LN ad quadratum ex AD vel AE, ut quadratum ex LQ ad quadratum ex AC, & ut quadratum ex LT ad quadratum ex AS; supponendo lineas LT & AS ad libitum esse ductas, sicut dictum est.

Porrò ad veri inquisitionem, demissis ex T & S super LQ & AC

 per-

perpendicularibus TX & SV, voco AD vel AE a, LM vel LN b, AC c, & AV x, ac poſtea ita pergo.

$$\begin{array}{llll} \square\text{AD vel AE} & \square\text{LM vel LN} & \square\text{AC} & \\ aa \text{———} & bb \text{———} & cc & \mid \text{ad } \square\text{LQ.} \dfrac{bbcc}{aa}, \text{ unde LQ fit } \dfrac{bc}{a}. \end{array}$$

Ex natura Parabolæ

$$\begin{array}{llll} \text{AC} & \text{VC} & \square\text{AD vel AE} & \\ c \ldots & c-x \ldots & aa & \mid \text{ad } \square\text{VS.} \dfrac{aac - aax}{c} \end{array}$$

$$\text{adde } \square\text{AV. } xx$$

$$\begin{array}{lll} \square\text{AD vel AE} & \square\text{LM vel LN} & \\ aa \ldots\ldots & bb \ldots & \square\text{AS.} \overline{\dfrac{aac-aax}{c} + xx} \mid \text{ad } \square\text{LT.} \dfrac{bbc-bbx}{c} + \dfrac{bb}{aa}xx \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} \square\text{AS} & \square\text{VS} & \square\text{LT} & \\ \dfrac{aac-aax}{a} + xx \ldots & \dfrac{aac-aax}{c} \ldots & \dfrac{bbc-bbx}{c} + \dfrac{bb}{aa}xx & \mid \text{ad } \square\text{XT.} \dfrac{bbc-bbx}{c} \end{array} \Bigg\} \text{ſubtr.}$$

$$\text{reliq. } \square\text{LX.} \dfrac{bb}{aa}xx$$

Ergo LX. $\dfrac{bx}{a}$, quæ ſubducta ex

LQ $\propto \dfrac{bc}{a}$, relinquit $\dfrac{bc-bx}{a}$,

pro XQ.

Jam ſi curva MOQPN Parabola exiſtat, erit ex natura Parabolæ LQ $\propto \dfrac{bc}{a}$ ad XQ $\propto \dfrac{bc-bx}{a}$, ut $\square$ LN $\propto bb$ ad $\square$ XT $\propto \dfrac{bb-bbx}{c}$; adeoque ſi $\dfrac{bc}{a}$ multiplicetur per $\dfrac{bbc-bbx}{c}$ debet productum æquari producto ex $\dfrac{bc-bx}{a}$ in bb. Unde cum utrobique reperiatur $\dfrac{b^3c-b^3x}{a}$, manifeſtum eſt, curvam MOQPN eſſe Parabolam. Quemadmodum erat propoſitum.

Denique ſi hæc ſectio HOGPI incedat perpendicularis per hujuſmodi inventas curvas 2^{di} generis perinde atque ipſa jam per Parabolas 1^{mi} generis tranſire ſuppoſita fuit, exſurget inde alia rurſus altioris generis curva linea. Per quas ſi denuo ſimili modo ſectio tranſire fingatur, alia iterum ſuperioris generis curva obtinebitur. Atque ita deinceps in infinitum, ſicut ſuperiori modo fit manifeſtum.

Cæ-

Cæterùm ut pateat, & aliâ ratione hujuſmodi curvas per ſolidi ſectionem generari poſſe, revocetur huc prima figura, in qua, ut ante, curvâ DHCIE exiſtente Parabolâ, cujus axis A C, & ordinatim adplicatâ DAE, recta AB ſit ad planum hujus Parabolæ D H CIE perpendicularis, & curva ABGQC ſemi-Parabola, cujus axis ſit B A, & ordinatim adplicatæ A C, LQ, RG. Deinde concipiatur Parabolam hanc DHCIE ſurſum moveri, ita ut, dum ejus planum continuè plano baſis eſt æquidiſtans, vertex ipſius C ſemper reperiatur in curva CQGB, & axis ejus A C in recta ALRB. Quibus ita poſitis, deſcribetur hâc ratione figura ſemi-Conoïdis D M B N E C, cui ſi altera ſimilis & æqualis figura adponatur, hæ binæ ſpeciem Conoïdis referent, cujus ideo ſemiſſis eſt DMBNEC. In qua Conoïde ſi porrò, ut ſupra, ſectio inſtituatur, qualis eſt H O G P I, exhibebit ipſa curvam lineam 2^{di} generis.

Etenim factâ eâdem, quâ prius, præparatione, erit K Q, ut ante, $\propto \sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}, -c$; adeoque □ O K vel K P (propter Parabolam DHCIE) $\propto \frac{gg}{b}\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}, -\frac{ggc}{b} \propto yy$. Quæ æquatio, à ſigno radicali liberata, dat $y^4 + \frac{{}^{2}ggc}{b}yy - \frac{g^4}{a}x \propto 0$. In hac verò cum incognita quantitas y ad quatuor dimenſiones aſcendat, nec ipſa, ut ante, reduci poſſit: ſequitur lineam curvam HOGPI eſſe 2^{di} generis.

Jam ſi, in locum deſcribendi ſemi-Conoïdem D M B N E C per Parabolam D H C I E, ipſa per hanc inventam curvam HOGPI deſcribatur, exurget inde alia altioris generis curva linea.

Ut patet, ſi in æquatione $y^4 + \frac{{}^{2}ggc}{b}yy - \frac{g^4}{a}x \propto 0$ in locum x ſubſtituatur $\sqrt{cc+\frac{bbx}{a}}, -c$, atque ipſa deinde à ſigno radicali liberetur: habebitur enim $y^8 + \frac{{}^{4}ggc}{b}y^6 \begin{matrix} +\frac{{}^{2}g^4c}{a} \\ +\frac{{}^{4}g^4cc}{bb} \end{matrix} y^4 + \frac{{}^{4}g^6cc}{ab}yy - \frac{g^8bbx}{a^3} \propto 0$. In quâ cum incognita quantitas y ad 8 dimenſiones aſſurgat, nec ipſa, ut ſupra, reduci poſſit: ſequitur, curvam hanc HOGPI fore quarti generis.

Eodem modo, ſi, ad deſcribendam hanc ſemi-Conoïdem DMBNEC,

D M B N E C, in locum præcedentis curvæ adhibeatur jam posterior hæc inventa curva, exhibebit sectio H O G P I aliam iterum altioris generis curvam, quæ octavi erit generis; atque hæc aliam rursus altiorem 16^{ti} generis. Et sic ulteriùs in Geometrica Progressione in infinitum.

Porrò si in locum describendi hanc semi-Conoïdem per Parabolam ipsa describatur per motum semi-Circuli, aut semi-Ellipsis, aut etiam Hyperbolæ, cujus axis sit A C, & ordinatim adplicata D A E: erit similiter sectio H O G P I linea curva secundi generis. Quæ singulæ rursus in locum semi-Circuli, semi-Ellipsis, aut Hyperbolæ adhibitæ alias similiter curvas quarti generis producent; & hæ denuò alias 8^{vi} generis, atque ita deinceps in infinitum, ut supra.

Similiterque si loco semi-Parabolæ ABGꝖC sumatur semi-Hyperbola, vel Ellipsis aut Circuli quadrans, sectio H O G P I pariter curvam lineam altioris generis exhibebit, & hæc rursus aliam altiorem, atque ita porrò in infinitum.

SECTIO XXIII.

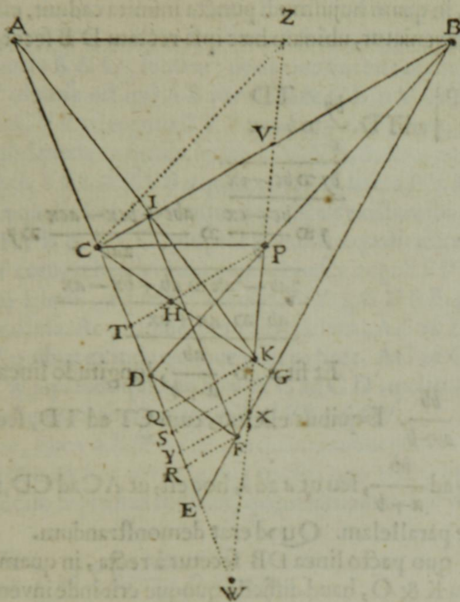
Demonstratio primi modi constructionis Problematis 7^{mi}, Appendicis, Problematum Simplicium.

QUoniam constructionis hujus veritas in profundo magis latère videatur, quàm ut ipsa à quovis, ut quidem aliarum constructionum, in eadem Appendice traditarum, demonstrationes inveniri possit, quæque idcirco à nobis, ne aliis exercendi materiam præriperemus, consultò sunt omissæ: non è re fuerit in ejusdem constructionis demonstrationem sequentia in medium afferre.

Esto AC $\infty\ a$
CD vel DE $\infty\ b$, eritꝗue CE $\infty\ 2b$
CB $\infty\ c$
CꝖ $\infty\ x$, eritꝗue AꝖ $\infty\ a+x$
& ꝖK $\infty\ y$.

AꝖ — ꝖK — AC
$a+x$ — y — a | ad CI seu RF $\frac{yy}{a+x}$. Unde SG erit $\frac{2ay}{a+x}$.

CB



$$\begin{array}{llll} CB & CE & SG & \\ c - 2b - & \dfrac{2ay}{a+x} & \Big| \text{ ad } SE. & \begin{array}{l} CE.\ 2b \\ \dfrac{4aby}{ca+cx} \end{array} \Big\} \text{ ſubtr.} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} QK & CQ & SG \\ y - x - & \dfrac{2ay}{a+x} & \Big| \text{ ad } CS.\ \dfrac{2ax}{a+x} \infty\ CS.\dfrac{{}^{2}abc + {}^{2}bcx - {}^{4}aby}{ca + cx}. \end{array}$$

$$acx \infty abc + bcx - {}^{2}aby$$

$${}^{2}aby \infty abc + bcx - acx$$

fit $y \infty \dfrac{abc + bcx - acx}{{}^{2}ab}$. Jam cum hæc æquatio id omne, quod puncti K vel O determinationem concernit, cujuſmodi illud hîc eſt inventum, includat, atque ipſa pari modo ad infinita alia determinanda (propter x vel y pro lubitu ſumendam) ſe

extendat, nec illa etiam ad xy aut xx vel yy ſeu altiùs aſſurgat: ſequitur, lineam, in quam hujuſmodi puncta infinita cadunt, eſſe rectam.

Hinc ut inveniatur, ubinam hæc ipſa rectam D B ſecet, ita procedatur:

CB CD TP | ad TD. TD
$c - b - y$ | ad TD. $\frac{by}{c} \propto b - x$

$$by \propto bc - cx$$

$$y \propto \frac{bc - cx}{b} \propto \frac{abc + bcx - acx}{2ab} \propto y$$

$$2ab - 2ax \propto ab + bx - ax$$

$$ab \propto ax + bx$$

Et fit $x \propto \frac{ab}{a+b}$, longitudo lineæ CT. unde TD erit $\propto \frac{bb}{a+b}$. E quibus elicitur, cum CT ad TD, ſeu BP ad PD ſit, ut $\frac{ab}{a+b}$ ad $\frac{bb}{a+b}$, ſeu ut a ad b, hoc eſt, ut AC ad CD, rectam CP ipſi AB eſſe parallelam. Quod erat demonſtrandum.

Oſtenſis quo pacto linea DB ſecetur à recta, in quam cadunt inventa puncta K & O, haud difficile quoque erit inde invenire, quâ ratione lineæ CB, AB, EB, ut & AE, ſeu prout producta eſt, ab hac eadem recta ſecentur; id quod corollarii loco ſubjungere hîc viſum fuit.

Quocirca ut innoteſcat, quo in loco linea CB ab hac recta interſecetur, fiat $x \propto 0$: eritque $2aby \propto abc$
& fit $y \propto \frac{1}{2}c$. Id quod monſtrat, lineam C B à recta, in quam cadunt puncta K & O, bifariam dividi.

Deinde ad inveſtigandum, ubinam linea AE, ſeu, prout producta eſt, ab hac eadem recta ſecetur, ponatur $y \propto 0$

eritque $0 \propto abc + bcx - acx$

ſeu $acx - bcx \propto abc$

& fit CW $\propto x \propto \frac{ab}{a-b}$. Hoc eſt, erit ut $a - b$ ad a, ita b ad x.

Ideoque aſſumptâ CY æquali CA, ſi ipſis DY, YC, & DC quæratur

ratur 4ta proportionalis C W: erit W punctum interſectionis quæſitum.

Porrò ut conſtet, quâ ratione linea AB à recta, in qua reperiuntur puncta inventa K & O, ſecetur: opùs tantùm erit conſiderare, poſtquam C P oſtenſa eſt ipſi A B parallela & C B in V bifariam diviſa, triangulum C V P triangulo B V Z, per 26 primi Elem., eſſe æquale. hoc eſt, quòd præter æqualia latera C V, V B, & duos angulos V C P & P V C, ipſis V B Z & Z V B æquales, etiam latera P V & V Z, ut & C P & Z B æqualia ſint. His enim æqualibus exiſtentibus, erunt & in triangulis P V B & Z V C, propter laterum æqualitatem, angulos ad verticem V comprehendentium, qui ad baſes anguli B P V & V Z C, per 4 Primi Elem., æquales; adeoque C Z ipſi D P B, per 27 Primi Elem., parallela. Ac proinde, per 2 ſexti Elem., A Z ad Z B, ſicut A C ad C D. E quibus exinde quoque inferre licet, A C ad C D eſſe, ſicut A W ad C W: quandoquidem tam A C ad C D, quàm A W ad C W eandem rationem habet, quam A Z ad Z B vel C P.

Denique, lineæ E B & rectæ, in quam cadunt puncta inventa K & O, interſectio eodem inveſtigatur pacto, quo rectæ hujus & lineæ D B interſectio ſupra fuit inventa, quemadmodum hîc videre licet.

CB CE YX

$c - 2b - y$ | ad Y E. $\frac{2by}{c} \propto 2b - x$

$2by \propto 2bc - cx$

$y \propto \frac{2bc - cx}{2b} \propto \frac{abc + bcx - acx}{2ab} \propto y$

$2ab - ax \propto ab + bx - ax$

$ab \propto bx$

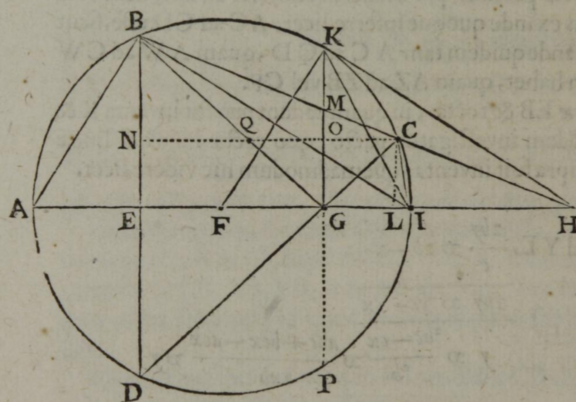
fit C Y $\propto x \propto a$. Id quod oſtendit, ſumptâ C Y, ut ante, æquali C A, ſi ex Y agatur Y X ipſi C B parallela, hoc eſt, ut E B ſecetur in X, ita ut E X ad X B ſit, ſicut E Y ad Y C, punctum inventum X fore quæſitum.

SECTIO XXIV.

Ratio disquirendi proprietates circa objecta Mathematica.

CUm ad contemplationem naturæ eorum, quæ in his scientiis proponi queunt, non modò jucundum sed etiam utile sit intelligere, quâ ratione plures proprietates detegantur: visum fuit hoc loco exponere modum, quo illas in circulo (ut hinc de aliis objectis judicium fiat) indagavimus atque invenimus, sicut videre est in sequenti Porismate.

PORISMA.



Sit AE ∞ *a*
EG ∞ *b*
GI ∞ *c*
DE ∞ EB ∞ *d*
DG ∞ GB ∞ *e*
GC ∞ *f*
BM ∞ *g*
MC ∞ *h*
BH ∞ *i*
CH ∞ *k*
AH ∞ *l*
IH ∞ *m*
FG ∞ *n*
GM ∞ *p*
PG ∞ GK ∞ *q*
KH ∞ *r*

ABKCIPD *est circulus*
AH *est recta linea, ducta per centrum* F
BD *est perpendicularis ad* AH
DC *est linea ad libitum ducta secans diametrum* AI *in* G
BCH *est recta linea, ducta ex* B *per* C, *donec occurrat ipsi* AH *in* H
GK *est linea ducta ex* G *ad angulos rectos super* AH
AB, BG, BI, IC, IK, *&* KH *sunt rectæ lineæ*
Investigare quænam circa hæc contingant.

Mult.

Mult. AE. *a* Mult. DE. *d*
per EI. *b+c* per EB. *d*

▭ AEI. *ab+ac* ∞ ▭ DEB. *dd.* per 35. 3 Elem.

ac ∞ *dd — ab*

Mult. AG. *a+b* Mult. DG. *e*
per GI. *c* per GC. *f*

▭ AGI. *ac+bc* ∞ ▭ DGC. *ef*, & fit $\frac{ac+bc}{f}$ ∞ *e*, ac $\frac{ackk+bckk}{f}$ ∞ *ekk*.

℞ 35. 3 Elem. *ac* ∞ *ef — bc* ∞ *dd — ab* ∞ *ac*

ef+ab ∞ *dd+bc*

Hoc eſt,

▭ DGC + ▭ AEG eſt ∞ ▭ DEB + ▭ EGI.

Corollarium.

Hinc ſi ſupponatur AE ∞ GI, hoc eſt, *a* ∞ *c*, erit *ef+bc* ∞ *dd+bc*; adeoque *ef* ∞ *dd*. Hoc eſt, ▭ DGC ∞ ▭ DEB.

Fiat propter ſimilia △[la] EBH, LCH
ut BH ad BE, ita CH ad CL
i —— *d* ——— *k* | $\frac{dk}{i}$

Rurſus, quia △ DEG, vel ipſi æquale
BEG, eſt ſimile △[lo] CLG: erit
ut DG vel GB ad DE vel EB, ita GC ad CL
e ———— *d* ———— *f* | $\frac{dk}{i}$

Et fit $\frac{ek}{i}$ ∞ *f*. Hoc eſt, erit *i* (BH) ad *k* (HC), ſicut *e* (DG vel GB) ad *f* (GC).

vel $\frac{if}{e}$ ∞ *k*. Hoc eſt, erit *e* (cB) ad *i* (BH), ſicut *f* (GC) ad *k* (CH).

Hinc reſultat, cum BG ad GC etiam ſit, ut EG ad GL, id eſt, ut NO ad OC, aut ut BM ad MC: eſſe quoque BH ad HC, ſicut BM ad MC; vel etiam MB ad BH, ſicut MC ad CH. Unde ſimul emanat Prop. 3[tia] libr. 6 Elem. videlicet, BG eſſe ad GC, ſicut BM ad MC, quando angulus BGC per rectam GK bifariam dividitur: quemadmodum hic patet, auferendo à rectis angulis AGK & IGK æquales angulos EGB & LGC.

à BH. i ad BM. g
ſubtr. CH. k add. MC. h
BC. $\overline{i-k} \propto$ BC. $\overline{g+h}$
dele k

$$i - \frac{if}{e} \propto g + h$$

GB BH BG-GC BC

$ei - if \propto eg + eh$. Hoc eſt, erit e ad i, ſicut $e-f$ ad $g+h$.

$$i \propto \frac{eg+eh}{e-f}$$

GC CH BG-GC BC

Vel etiam, quia e eſt ad i, ſicut f ad k: erit item f ad k, ſicut $e\text{-}f$ ad $g+h$.
Similiter quia ex ſimilitudine △rum GOC, DNC eſt
ut GC ad GO vel CL, ita DC ad DN

$$f \text{———} \frac{dk}{i} \text{———} e+f \mid d + \frac{dk}{i}$$

Erit item GC ad CH, ſicut BG+GC ad BH+HC

$$f \text{——} k \text{————} e+f \mid i+k.$$

Hinc patet rationes GB ad BH, GC ad CH, BG-GC ad BC, & BG+GC ad BH+HC omnes inter ſe eaſdem eſſe.

Mult. BI. i Mult. AH. l
per HC. k per HI. m
▭ BHC. $\overline{ik} \propto$ ▭ AHI. $\overline{lm}$. p 36. 3 *Elem.*

$$i \propto \frac{lm}{k}$$

$$f \quad f$$

$$fi \propto \frac{flm}{k} \propto ek \propto fi$$

$$ekk \propto \frac{ackk+bckk}{f} \propto flm \propto ekk.$$

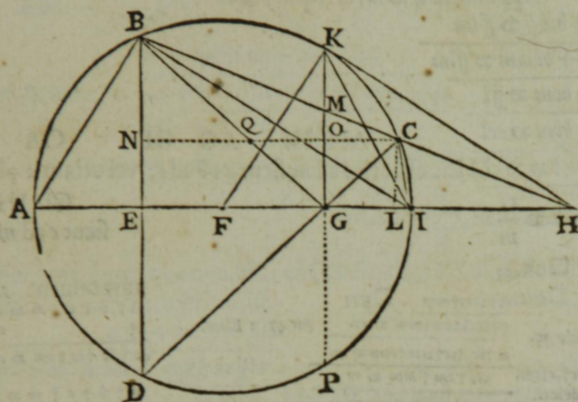
□GC □CH ▭AGI ▭AHI ▭BHC

$ackk + bckk \propto fflm$. Hoc eſt, erit ff ad kk, ſicut $ac+bc$ ad lm vel ik.

□GC ▭AGI vel □GK CH HB

vel ff ad $ac+bc$ vel qq, ſicut k ad i.

Hinc liquet, cum ſupra quoque inventum ſit GB eſſe ad B H, ſicut GC ad CH: fore ſimiliter □ GB ad □ BH, ſicut ▭ AGI ad ▭ AHI.



$ac + bc \infty ef$

$\frac{ac+bc}{e} \infty f$

$i \quad i$

$fi \infty ek \infty \frac{aci+bci}{e} \infty fi$

▭AGI vel □GK □GB CH HB

$eek \infty aci + bci$. Hoc eſt, erit $ac + bc$ vel qq ad ee, ſicut k ad i.

Hinc patet, cum □GC ad □GK ſit, ut CH ad HB; itemque □GK ad □GB, ut CH ad HB: quòd tria quadrata ex GC, GK, & GB proportionalia ſint; adeoque tres rectæ GC, GK, & GB.

▭BGC □GK ▭AGI AG GB

Unde fit ut ef ſit ∞ qq, aut etiam $ac + bc$, hoc eſt, ut $a + b$ ſit ad e, ſi-

GC GI

cut f ad c.

E quibus inde per 6. 6 Elem. ſequitur: △ ABG ſimile eſſe △lo GCI.

Similiter liquet, cum BM ad MC inventa ſit, ut BH ad HC, eſſe quoque BM ad MC, ſicut □BG ad □GK, vel □GK ad □GC.

Mult PM. $q + p$ Mult. BM. g

per MK. $q - p$ per MC. h

▭PMK. $qq - pp \infty$ ▭BMC. gh. per 35.3 Elem.

$qq \infty pp + gh$. Hoc eſt, □GK eſt ∞ □GM + ▭BMC.

dele qq $ef \infty pp + gh$. Hoc eſt, ▭BGC eſt ∞ □GM + ▭BMC.

Sup-

Supponatur $k \infty m$, eritque $f \infty c$.

$ackk + bckk \infty fflm$

$acmm + bcmm \infty fflm$

$acm + bcm \infty ffl$

$acm + bcm \infty ccl$

AH HI AG GI GA AH

$am + bm \infty cl$. Hoc eſt, erit l ad m, ſicut $a+b$ ad c; vel etiam $a+b$ ad l,

GI IH

ſicut c ad m.

$$a+b \infty \frac{cl}{m}$$

Add. { □GK. qq
{ □CH. $cc + 2cm + mm$ □KH

$qq + cc + 2cm + mm \infty rr$. per 47. 1 Elem.

dele qq. $ac + bc, + cc + 2cm + mm \infty rr$.

dele $ac + bc + cc + cm$. $cl, + cm + mm \infty rr$

dele cl. $am + bm, + cm + mm \infty rr$

vel $ml \infty rr$

AE+EG+GI+IH AH

$a + b + c + m \infty l$

c c

$ac + bc + cc + cm \infty cl$

$a + b + c + m \infty l$

m m

$am + bm + cm + mm \infty ml$

Hoc eſt,

▭ AHI eſt ∞ □ KH. Unde ſequitur lineam KH, per 37. 3 Elem., tangere circulum in K; hoc eſt, angulum FKH eſſe rectum.

Ubi notandum, quòd, ſicut ▭[la] AGI & BGC æqualia ſunt ac ſingula æqualia ex GK, in quo deſinunt, perinde etiam ▭[la] AHI & BHC æqualia ſint ac ſingula æqualia quadrato ex KH, in quo ſimiliter hæc ipſa deſinant.

FG GK GH

per Cor. 8. 6. Elem. n — q — $c+m$, ſunt 3 proportionales

Et fit $nc + nm \infty qq$. per 16. 6 Elem.

HG GA IG GF

dele qq. $nc + nm \infty ac + bc$. Hoc eſt, erit $c+m$ ad $a+b$, ſicut c ad n.

$nc \infty ac + bc - nm$.

$2nc \infty 2ac + 2bc - 2nm$

$$i \infty \frac{lm}{k} \infty \frac{eg + eh}{e - f} \infty i$$

Hoc eſt,

GB-GC ſeu QB CH ▭GBC ▭AHI ▭BAC □KH

erit $e-f$ ... ad ...... k, ſicut $eg + eh$ ad lm vel ik vel rr.

Add.

Add. $\begin{cases} \square FG.\ nn \\ \square GK.\ qq \end{cases}$ $\square$FK vel FI

$nn + qq \;\text{ꝏ}\; nn + 2nc + cc$

dele qq & $2nc$. $ac + bc \;\text{ꝏ}\; {}^2ac + {}^2bc - {}^2nm, + cc$

$ac + bc \;\text{ꝏ}\; {}^2mn - cc$

GI IH GF FI

$\frac{ac + bc + cc}{2} \;\text{ꝏ}\; mn$. Hoc eſt, erit c ad m, ſicut n ad $\frac{a+b+c}{2}$.

HI IF IG GF

vel m ad $\frac{a+b+c}{2}$, ſicut c ad n.

Hinc cum ſupra quoque HG ad GA ſit, ſicut IG ad GF: erit ſimiliter HG ad GA, ſicut HI·ad IF.

$ackk + bckk \;\text{ꝏ}\; fflm$

dele $ac + bc$, & lm. $qqkk \;\text{ꝏ}\; ffrr$

GK KH GC CH

$qk \;\text{ꝏ}\; fr$. Hoc eſt, erit q ad r, ſicut f ad k.

Quocirca, cum ſupra etiam ſit G B ad B H, ſicut G C ad C H, erit pariter GB ad BH, ſicut GK ad K H.

$qqkk \;\text{ꝏ}\; ffrr$

dele qq. $efkk \;\text{ꝏ}\; ffrr$

BG GC $\square$KH $\square$CH.

$ekk \;\text{ꝏ}\; frr$. Hoc eſt, erit e ad f, ſicut rr ad kk. Quoniam autem B G ad G C ſupra quoque fuit inventa ut B M ad MC, vel etiam ut BH ad CH: erit pariter BM ad MC, vel BH ad HC, ſicut $\square$KH ad $\square$CH.

$ackk + bckk \;\text{ꝏ}\; fflm$

dele $a+b$. $\frac{cl, ckk}{m} \;\text{ꝏ}\; fflm$

$cckk \;\text{ꝏ}\; ffmm$

GI IH GE CH

$ck \;\text{ꝏ}\; fm$. Hoc eſt, erit c ad m, ſicut f ad k.

Hinc cum ſupra quoque ſit GB ad BH, ut & GK ad KH, ſicut GC ad CH; & GC ad CH, nec non GF ad FI, ſicut GI ad IH: erunt rationes GF ad FI, GC ad CH, GB ad BH, GK ad KH, & GI ad IH omnes inter ſe eædem. Ex quibus porrò, per 3. 6 Elem., ſequitur, rectas IB, IK, & IC ſecare angulos GBH, GKH, & GCH bifariam.

Atque ita porrò, comparando intèr ſe quantitates, ſic ut aliæ atque aliæ ſemper obtineantur æquationes, licebit circa ea, quæ propoſita ſunt, invenire proprietates innumeras.

SECTIO XXV.

Specimina de Algebræ præſtantia.

CUm in Algebra ad modum ſolutionis indagandum alicujus Problematis, imponendo nomina quantitatibus tum datis, tum quæſitis, difficultas tota eò ſit reducenda, ut inveniatur Æquatio, atque illud ipſum ad hoc tanquam jam factum ſupponatur: facilè conſtat, quòd, dum illa omnes determinationes ſive conditiones includit, quæcunque circa Æquationis conſtructionem aut ſolutionem conſideranda veniunt, etiam ad modum, quo Problema reſolvendum ſit, pertineant. Quocirca, cum infinita Problemata ſint, quæ licèt toto genere diverſa videantur, ad eandem tamen Æquationem recurrant, hacque ratione pro eodem Problemate haberi poſſint: ita quoque contingit, ut unus idemque conſtructionis aut ſolutionis modus omnibus illis ſimul conveniat. Id quod ſequentibus Problematibus ceu exemplis patefacere non injucundum duximus.

Probl. 1. Trianguli rectanguli datâ baſe ∞ a, & aggregato hypotenuſæ & perpendicularis ∞ b: invenire hypotenuſam ∞ x.

Probl. 2. Trianguli rectanguli datâ baſe ∞ a, & differentiâ inter hypotenuſam & perpendicularem ∞ b: invenire hypotenuſam ∞ x.

Probl. 3. E termino datæ rectæ ∞ a erectâ ſuper ipſam perpendiculari indefinitâ, invenire longitudinem lineæ rectæ x, ex altero termino ad hanc ducendæ, quæ ſit æqualis perpendiculari abſciſſæ unà cum ipſius datæ a ſegmento præfinito contermino b.

Probl. 4. Datam rectam lineam ∞ b producere, ita ut quadratum productæ x unà cum quadrato datæ rectæ a ſit æquale quadrato totius lineæ $b+x$.

Probl. 5. Datam rectam lineam ∞ b ſecare in duo ſegmenta, ita ut quadratum minoris ſegmenti x unà cum quadrato datæ rectæ a ſit æquale quadrato majoris ſegmenti $b-x$.

Probl. 6. Datam rectam lineam ∞ b ſecare in duo ſegmenta x & $b-x$, ita ut differentia quadratorum ex ipſis ſit æqualis dato ſpacio aa. Quæritur majus ſegmentum ∞ x.

Probl. 7. Invenire numerum x, à cujus quadrato xx ſi auferatur datus quadratus aa, relinquatur quadratus $xx - 2bx + bb$. Fit x ∞ $\frac{bb + aa}{2b}$.

Igi-

Igitur assumendo ad arbitrium alium atque alium numerum pro b, inveniri hinc poterunt infinita triangula rectangula, eandem, datamque altitudinem habentia, quorum latera exprimantur per numeros rationales. Etenim si altitudo illa, sive perpendicularis data, fuerit a, hypotenusa erit $\frac{bb + aa}{2b}$. *Vnde basis fiet* $\frac{bb = aa}{2b}$.

Vbi porrò liquet, si quis tot triangula rectangula invenire velit quot libuerit, quorum singula latera exprimantur per numeros rationales integros, multiplicandum esse tantùm ubique per denominatorem communem 2b, & fiet 2ab pro perpendiculari, bb + aa pro hypotenusa, & bb = aa pro basi.

Hinc si a sit 1, & b sit 2, perpendicularis erit 4, hypotenusa 5, & basis 3. At si a sumatur ∞ 3, & b ∞ 2, perpendicularis erit 12, hypotenusa 13, & basis 5. Et sic de aliis in infinitum.

Idem quoque obtinere licet beneficio 1^{mi}, 2^{di}, 3^{tii}, 4^{ti}, *aut* 5^{ti} *Problematis, atque etiam beneficio* 6^{ti}, *si datum spacium fuerit quadratum.*

Datis duobus numeris *b* & *a*, invenire tertium *x*, minorem majore *b*, majorem autem minori *a*; ita ut, si ipsi minor addatur atque etiam ab eo auferatur, summa per reliquum multiplicata tantundem producat ac si excessus, quo major quæsitum superat, in se multiplicetur. *Probl. 8.*

In symposio fuerunt *x* pueri, *b* ∞ 8 mulieres, & *a* ∞ 12 viri. Quorum quilibet virorum tot expendit stufros, quot ipsi sunt; similiterque quævis mulier tot stufros, quos sunt mulieres. Comperitur autem, si pueri singuli tot stufros solvissent, quot existunt mulieres, quòd numerus stufrorum, quos soluturi fuissent, tantum excessisset mulierum stufros, quantum idem numerus minor est numero stufrorum, à viris expensorum. Quæritur quot pueri adfuerint? *Probl. 9.*

Datæ rectæ lineæ *b + a*, sectæ in duo inæqualia segmenta *a* & *b*, majus segmentum *b* rursus secare in duo alia segmenta *x* & *b — x*; ita ut rectangulum contentum sub *x + a*, aggregato minoris segmenti *a* & intermedii *x*, & *x — a*, excessu quo idem medium segmentum *x* superat minus *a*, sit æquale quadrato reliqui segmenti *b — x*. *Probl. 10.*

Datam rectam lineam *a + b*, sectam in 2 partes *a* & *b*, producere ad alterutram partem rectâ *x*; ita ut quadrata trium partium totius simul sumpta æquentur rectangulo contento sub producta *x*, & compositâ ex producta & duplo conterminæ partis. *Probl. 11.*

Probl. 12. Datam rectam lineam ∞b sectam in 3 partes proportionales, ita ut aggregatum quadratorum ex illis sit æquale dato spacio aa: invenire summam extremarum partium ∞x.

Probl. 13. Rectanguli datâ differentia laterum ∞b, & differentiâ quadratorum ex ipsis ∞aa: invenire latus majus ∞x.

Probl. 14. In triangulo æquicruri obtusangulo, cujus utrumque crus datur ∞b, & latus 3tium ∞a, demissâ ex vertice super alterutro crure producto perpendiculari: quæritur x, aggregatum majoris segmenti & semissis basis?

Probl. 15. Similiter: In triangulo æquicrure acutangulo, cujus utrumque crus datur ∞b, & 3tium latus ∞a, demissâ ex vertice super crus alterutrum perpendiculari: quæritur x, aggregatum minoris segmenti ex semissis basis?

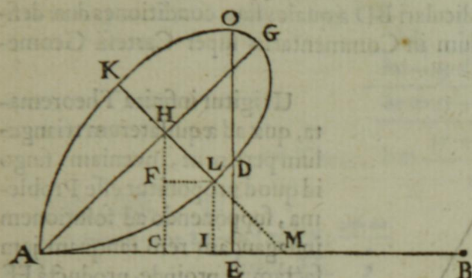
In his omnibus Problematîs cum x fiat $\infty \frac{bb+aa}{2b}$, idemque similiter in infinitis aliis contingat: manifestum est ad illa simul omnia solvenda, & quantitatem x inveniendam, nil aliud faciendum esse quàm addere quadrata datarum quantitatum b & a, & earum summam dividere per duplum ipsius b. Adeò ut hinc constet Algebram, cum æquationis beneficio infinita Problemata pro uno habeat eaque simul resolvat, & ex datis notisvé quantitatibus quæsitas ignotasvé cujuslibet generis doceat invenire, haud immeritò veram Logicam ac inveniendi artem, quâ mens in cognitionem rerum Mathematicarum & inde dependentium perducatur, existimandam esse: ac proinde eam non sine ratione Artem Magnam & divinam Scientiam ab aliis fuisse appellatam.

Patet itaque ex allatis Algebræ præstantia ac utilitas. Verùm ut utrumque cuivis magis adhuc obvium sit, vellem Lector consideret ea, quæ hoc tractatu à me exposita sunt, ut & Problemata tam diversa, quæ sparsim per totum librum soluta reperiuntur, quorumque solutiones, paucis exceptis, per Algebram sunt inventæ; sicut etiam illa, quæ à Vieta ac præsertim Cartesio in sua Geometria, & aliis denique præcellentibus Mathematicis ejusdem beneficio præstita sunt ac perfecta. Vix enim futurum confido, ut, qui eximiæ hujus scientiæ infallibili fretus certitudine sedulus hæc mecum perpenderit, de veritate mearum conclusionum in hac Sectione ullatenus sit dubitaturus. Verùm tamen ut rei colophonem addam, sequens Problema in medium afferre lubet unà cum ejusdem constructione, qualem

lem

lem eam subtilissimus ac præclarè doctus vir Juvenis D. Johannes Huddenius, Amst. Batavus, atque amicus meus integerimus, haud ita pridem adinvenit.

PROBLEMA.



Est curva linea, cujus hæc est proprietas, ut, assumpto ubicunque puncto E in recta AB, si ex E ad curvam ducatur perpendicularis EO vel ED, voceturque AE ∞ x, & EO vel ED ∞ y, & data sit recta linea AB ∞ n, habeatur $xxx + yyy$ ∞ xyn: Oportet autem ducere KL, quæ curvæ maximam latitudinem designet.

Constructio.

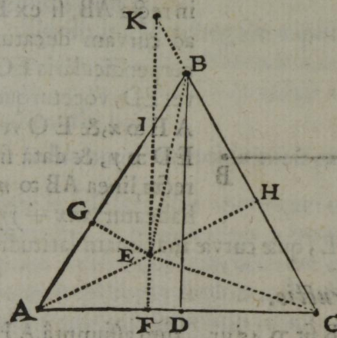
Duco AG, ita ut angulus GAB sit ∞ 45 gr., tum assumptâ AH ∞ $\sqrt{\frac{1}{6}nn}$: erit KHL, secans AG ad rectos angulos in H, maxima latitudo quæsita.

Quomodo autem Problematis hujus constructio præter Algebram inveniri possit, non video. Cum enim curva hæc ex nullo Theoremate prædemonstrato, quod eam concernit, definiri aut describi hîc intelligatur, quippe illa omnia huc spectantia adhuc ignorantur; sed ex sola æquatione $x^3 + y^3$ ∞ xyn determinetur & ab hac dependeat: manifestum est, ea, quæ circa hanc curvam construenda aut cognoscenda veniunt, ex hac ipsa æquatione esse deducenda, adeoque eam illorum omnium esse quasi fontem seu pro primo Theoremate habendam.

Cæterùm ut pateat quo pacto ex præsupposito aliquo Theoremate aut etiam ex sola subjecti definitione, infinita alia Theoremata per Algebram eliciantur: placet hîc ulteriùs ea, quæ circa hanc rem ingeniosissimus noster Huddenius olim mihi communicavit, lubenti animo impertire.

Cum verò illa ad quasvis quæstiones, sive determinatas,

ſive indeterminatas, ſe extendant; atque etiam in iiſdem perinde ſit ſive una, ſive duæ, ſive plures conditiones deſint: ſuffecerit, ut hæc ipſa per exemplum explicemus, utendo ad hoc triangulo æquilatero ABC, in quo ad determinationem puncti E, ad tres ex eo perpendiculares EF, EG, & EH ad oppoſita latera demittendas, quæ ſimul ipſi perpendiculari BD æquales ſint, conditiones duæ deficiunt. Quemadmodum in Commentariis ſuper Carteſii Geometriam ante explicui.



Ut igitur infinita Theoremata, quæ ad æquilaterum triangulum pertinent, inveniam, fingo id quod proponitur eſſe Problema, ſupponendo ad ſolutionem indagandam rem tanquam jam factam. ac proinde, productâ FE donec ſecet AB in I, & cum CB productâ conveniat in K, junctiſque AE, EB, & EC, facio AD vel DC $\infty\ a$ (eritque AB, BC, vel AC $\infty\ 2a$), DB $\infty\ b$, AF $\infty\ x$, (eritque FC $\infty\ 2a - x$) FE $\infty\ y$, EG $\infty\ v$, & EH $\infty\ z$.

Quibus ita poſitis, fingendo, ad quæſiti inventionem, aliquam ex hiſce lineis eſſe inveſtigandam, ut, verbi gratiâ DB, quam vocavi b: quæro quot modis diverſis ipſa enunciari poſſit, hoc eſt, quot æquationes differentes, quæ ſingulæ valorem ejus exprimant, reperiri contingat, quippe quælibet ex illis peculiare Theorema exhibet.

Quocirca ad inveniendam 1^{mam} æquationem, cum tria triangula AEC, AEB, & BEC ejuſdem baſis exiſtant, atque ſimul ſumpta toti triangulo ABC ſint æqualia: erit

$$ay + av + az \infty ab,$$

adeoque $y + v + z \infty b$. Quod eſt primum Theorema.

Reliqua ſequens calculus indicabit.

AD

AD DB AF

$a - b - x \mid$ ad FI. $\frac{bx}{a}$

subtr. FE. y

AB AD EG EG

$2a - a -$ EI. $\frac{bx}{a} - y \mid$ ad $\frac{bx}{2a} - \frac{1}{2}y \infty v$

$$bx - ay \infty 2av$$

$$bx \infty ay + 2av$$

2dum Theor. $b \infty \frac{ay + 2av}{x}$.

DC DB FC

$a - b - 2a - x \mid$ ad FK. $\frac{2ab - bx}{a}$

subtr. FE. y

BC CD EH EH

$2a - a -$ EK. $\frac{2ab - bx}{a} - y \mid$ ad $\frac{2ab - bx}{2a} - \frac{1}{2}y \infty z$

$$2ab - bx - ay \infty 2az$$

$$2ab - bx \infty ay + 2az$$

3tium Theor. $b \infty \frac{ay + 2az}{2a - x}$. Nota.

Ex FK. $\frac{2ab - bx}{a}$

subtr. FI. $\frac{bx}{a}$

rel. IK. $\frac{2ab - 2bx}{a}$

Ex EK. $2z$

subtr. EI. $2v$

∞ rel. IK. $2z - 2v$

$$2ab - 2bx \infty 2az - 2av$$

$$ab - bx \infty az - av$$

4tum Theor. $b \infty \frac{az - av}{a - x}$.

Hoc Theorema à 2do in eo tantùm differt, quòd quantitas b hîc inveniatur ex $a, x, y,$ & z, & in 2do ex $a, x, v,$ & y. Aliàs autem ratio quærendi b utrobique eadem eſt.

EI EG EK EH EH

$\frac{bx}{a} - y \ldots v \ldots \frac{2ab - bx}{a} - y \mid$ ad $\frac{2abv - bvx - avy}{bx - ay} \infty z$

$$2abv - bvx - avy \infty bxz - ayz$$

$$2abv - bvx - bxz \infty avy - ayz$$

5tum Theor. $b \infty \frac{avy - ayz}{2av - vx - xz}$.

1. Apparet itaque DB, quam vocavi b, quintupliciter poſſe enunciari. Nam præter terminorum inæqualitatem, eorumque diverſimodam

dam connexionem primus modus caret terminis a & x, 2^{dus} z, 3^{tius} v, 4^{tus} y, & 5^{tus} nullo caret. Atque ideo 5 habemus Theoremata diſtincta, quorum 2^{dum}, 3^{tium}, & 4^{tum} ejuſdem cùm 1mo ſunt naturæ, hoc eſt, Loci ad Superficiem; at verò 5^{tum} Loci ad Solidum.

II. Inventis autem quinque hiſce Theorematîs, poterunt exinde diverſis modis infinita alia inveniri. 1mo. Per additionem & diviſionem, utpote dividendo ſummam 1^{mi} & 2^{di}, 1^{mi} & 3^{tii}, 1^{mi} & 4^{ti}, 1^{mi} & 5^{ti}, 2^{di} & 3^{tii}, 2^{di} & 4^{ti}, &c. per 2. erit enim quotiens $\propto b$. Similiter addendo tres, quatuor, aut quinque, &c., & ſummam dividendo per 3, 4, aut 5, &c. 2do. Sicut autem jam infinita ope additionis & diviſionis invenimus, ita & infinita beneficio multiplicationis & extractionis inveſtigare licet. Etenim ſi duæ, tres, aut quatuor, &c. diverſæ iſtarum ſummæ in ſe invicem ducantur, atque ex producto extrahatur $\sqrt{}$Q. $\sqrt{}$C, aut $\sqrt{}$QQ, &c: erit ſimiliter radix inventa ipſi b æqualis. 3^{tio}. Per multiplicationem & diviſionem, quippe multiplicando duas, tres, aut quatuor, &c. diverſas, & productum dividendo per 1, 2, aut 3, &c. alias; ſive ad id una ſola ſumatur, eaque in ſe ducatur quadratè, aut cubicè, &c.; ſive ad hoc ipſum ſumantur 2, aut 3, &c. diverſæ, diviſioque per earum productum inſtituatur: quoniam ſemper quotiens ipſi b æqualis eſt. 4to. Per additionem & ſubtractionem, quemadmodum per ſe manifeſtum eſt. 5to. Ex quibus infinitis ſummis demum ope dictæ additionis, ſubtractionis, multiplicationis, diviſionis & extractionis rurſus infinitæ aliæ pro b inveniri poterunt.

III. Hinc ſicut infinitos modos exprimendi valorem lineæ DB ſeu b invenimus, ita & infinitos alios quærere licet linearum AD vel DC, AF, FE, EG, EH, quas vocavimus a, x, y, v, z: Sumendo nempe quamlibet ſummam pro b inventam, in quâ a, x, y, v, vel z, quarum valores inveſtigare volumus, reperitur; ac deinde ex illa quærendo valores ipſarum a, (x, y, v, & z). Quemadmodum hîc liquet.

1.

$$\frac{ay + 2av}{x} \propto b$$

$$ay + {}^{2}av \propto bx$$

$$\text{Ergo } a \propto \frac{bx}{y + {}^{2}v}$$

2.

$$b \propto \frac{ay + {}^{2}az}{{}^{2}a - x}$$

$${}^{2}ab - bx \propto ay + {}^{2}az$$

$${}^{2}ab - {}^{2}az - ay \propto bx$$

$$\text{Ergo } a \propto \frac{bx}{{}^{2}b - {}^{2}z - y}$$

3.

$$b \propto \frac{az - av}{a - x}$$

$$ab - bx \propto az - av$$

$$ab + av - az \propto bx$$

$$\text{Ergo } a \propto \frac{bx}{b + v - z}.$$

Atque ita de aliis.

IV. Jam ſicut omnia hæc Theoremata invenimus, quatenus conſideravimus lineas in triangulo hîc ductas; ita quoque idem obtineri poteſt circa alias; adeò ut ſolummodò aliam atque aliam linearum poſitionem in eo excogitare opùs ſit, ad infinitis modis, ut ſupra, alia infinita Theoremata, quæ à ſe invicem diſtincta ſint, omniaque æquilaterum triangulum concernant, invenienda. Id quod de his ſimiliter circa alias figuras cum rectilineas tum curvilineas intelligi debet, & ſe ad Circuli, Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipſis, aliarumque ſuperiorum generum curvarum linearum ut & ſolidorum inde ortorum proprietates inveſtigandas extendit, neque ſolo æquilatero triangulo hoc limitatur.

Liquet itaque quâ ratione infinitis modis ex præſuppoſito aliquo Theoremate aut etiam ſolâ figuræ vel ſubjecti definitione, quâ ipſius natura omnino determinetur, infinita deduci poſſint Theoremata, quæ omnia primo intuitu aut ex definitione illa, aut unum ex alio, niſi paucis fortè exceptis, non eliciantur; tam parùm, quin imò minùs, quàm ex natura circuli Theoremata omnia, quæ in 3^{tio} & 4to libro Elementorum continentur, deducta fuerint. Quod autem reverâ Theoremata exiſtant, de eo quidem dubitari nequit, cum Theorema nil niſi Propoſitio, quæ aliquam ſubjecti proprietatem continet ac declarat, cenſeri debeat.

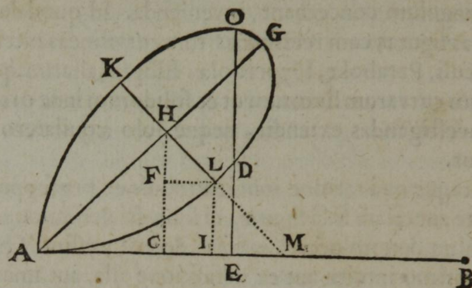
Ad hæc ſi Geometriæ præſtantiam, in demonſtrandis multis pulcherrimis ac admirabilibus Theorematis, (hoc eſt, quæ (meo quidem judicio) primâ fronte è ſubjecti natura haud ita facilè deducantur, ſed per complures conſequentias ſecundùm artis regulas ex eâ elici debeant), conſiſtere, à quovis fermè hactenus judicatum eſſe, perpendatur: ſatis obvia cuivis erit Algebræ præſtantia ac utilitas, quippe quæ levi negotio innumera nobis admirabiliorum Theorematum ſubminiſtrare poteſt volumina. Unde facilè judicare licet, quanta laus Illuſtri Viro Renato des Cartes meritò conferenda ſit, è cujus Methodo hæc quaſi ultrò emanant, & his longè majora maximeque utilia ad nos redundant.

SECTIO XXVI.

Inveſtigatio Conſtructionis, præcedenti ſectione traditæ.

QUandoquidem cõſtructio Problematis, pręcedenti Sectione expoſita, una ex ſimpliciſſimis exiſtit, quę circa id inveniri queunt:

non ingratum fore existimavi, si modum eandem investigandi, qualem eum acutissimus Vir-Juvenis D. Johannes Huddenius, Gerh. Fil., omnium artificiosissimè excogitavit, sequenti calculo exhiberem.



Angulum G A B esse 45 graduum, convincitur ex æquatione $y^3 - nyx + x^3 \propto 0$, in qua y & x eodem modo reperiuntur. Unde porrò concluditur, suppositis AI $\propto x$, IL $\propto y$, & AM $\propto z$, quòd IM sit $\propto y$, & AM $\propto z \propto x + y$, id est, $z - x \propto y$, quæ 2[da] est æquatio; ac deinde, quòd AC vel CH sit $\propto \frac{1}{2}z$, adeoque FH $\propto \frac{1}{2}z - y \propto ſ$, omnium intellige hujusmodi linearum maximæ. Quæ 3[tia] est æquatio.

Quibus ita existentibus, si in 1[ma] & 3[tia], nimirum, $y^3 \propto nyx - x^3$ & $\frac{1}{2}z - y \propto ſ$, in locum y substituatur $z - x$, habebitur $z^3 - 3zzx + 3zxx - x^3 \propto nzx - nxx - x^3$ vel $z^3 - 3zzx + 3zxx \propto nzx - nxx$, & $x \propto ſ + \frac{1}{2}z$. Cætera calculus manifestabit.

$$z^3 - 3zzx + 3zxx \propto nzx - nxx$$

dele x.

$$\frac{1}{4}z^3 + 3zſſ \propto \frac{1}{4}nzz - nſſ$$

Mult. per $3 \quad 1 \quad 2$ — per Huddenii methodum de Maximis & Minimis.

$$\frac{3}{4}zz + 3ſſ \propto \frac{1}{2}nz$$

dele $ſ$.

$$3zz + 12ſſ \propto 2nz$$

$$6zz + 12xx - 12zx \propto 2nz$$

$$12xx \propto 12zx + 2nz - 6zz$$

$$xx \propto zx + \frac{1}{6}nz - \frac{1}{2}zz$$

$$z^3 - 3zzx + 3zxx \propto nzx - nxx$$

$$3zxx + nxx \propto nzx + 3zzx - z^3$$

$$xx \propto zx - \frac{z^3}{3z + n}$$

zx—

$$zx - \frac{z^3}{3z+n} = zx + \tfrac{1}{6}nz - \tfrac{1}{2}zz$$

$$\tfrac{1}{2}zz = \frac{z^3}{3z+n} + \tfrac{1}{6}nz$$

$$3zz = \frac{6z^3}{3z+n} + nz$$

$$9z^3 + 3nzz = 6z^3 + 3nzz + nnz$$

$$3zz = nn$$

fit $z = \sqrt{\tfrac{1}{3}nn}$

Ergo $AH = \sqrt{\tfrac{1}{6}nn}$.

SECTIO XXVII.

De investigatione angulorum trianguli plani, cujus latera sunt nota, absque demissione perpendicularis.

QUò ad planorum triangulorum dimensionem expeditiorem haud quidquam deficiat, lubet hoc loco in medium afferre quatuor Theoremata seu regulas, quibus ex cognitis lateribus trianguli cujuscunque plani, absque ejusdem in rectangula triangula divisione, quilibet angulus quadrupliciter investigari possit: qualia illa ab eorum inventore D. Guilielmo Pursero, Mathematum peritissimo, Dublinii quondam addiscere licuit. Sunt autem omnia Logarithmorum usui accommodata, ut, vitato multiplicationis, divisionis, atque extractionis tædio, operatio omnis per additionem, subtractionem, & bipartitionem procederet.

THEOREMA I.

Ut rectangulum sub duobus lateribus, angulum quæsitum comprehendentibus, ad rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera basin superant; ita quadratum radii, ad quadratum sinus semissis anguli, quæsito adjacentis.

THEOREMA II.

Ut rectangulum sub duobus lateribus, angulum quæsitum comprehendentibus, ad rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum basi superat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum sinus semissis anguli quæsiti.

THEOREMA III.

Ut rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum basi superat latus primum, ad rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ illa duo latera basin superant; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis semissis anguli, quæsito adjacentis.

THEOREMA IV.

Ut rectangulum sub semisse omnium laterum & dimidiâ differentiâ, quâ duo latera basin superant, ad rectangulum sub dimidiâ differentiâ, quâ latus unum unà cum basi superat latus alterum, & dimidiâ differentiâ, quâ latus illud alterum unà cum basi superat latus primum; ita quadratum radii, ad quadratum tangentis semissis anguli quæsiti.

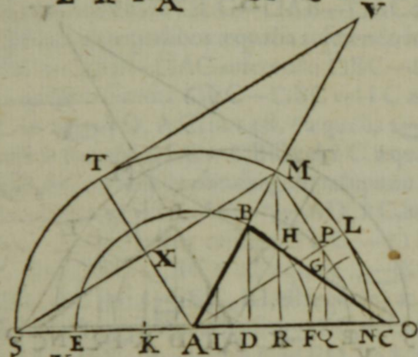
Voco angulum adjacentem alterius, eum, qui cum illo semicirculum complet vel illius ad 180 gr. est differentia; basin verò latus illud, quod angulo quæsito opponitur. Denique triangulum hîc intelligitur rectangulum, acutangulum, vel obtusangulum, prout quæsitus angulus est rectus, acutus, vel obtusus.

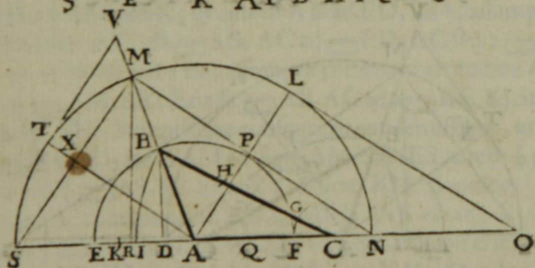
Sit triangulum ABC, in quo ex notis lateribus eliciendus sit angulus A.

Deducatur ex B in AC, vel in ipsam, hinc inde productam, perpendicularis BD; atque radio AB describatur ex A semicirculus

EBF,

EBF, ſecans AC in E & F, tum ex C intervallo FC arcus FG, ſecans BC in G; ſeceturque BG bifariam in H. Rurſus centro C intervallo





C B alius deſcribatur arcus B I, ſecans A C in I, & E I bifariam ſecetur in K. Porrò ex A deſcripto alio quovis ſemicirculo, ut S M L N, ſe-

cante AC in S & N, ipsam autem AB, vel eam productam in M, bifariam secentur arcus NM & MS in L & T, junganturque AL, AT, & NM, MS, se mutuò secantes in P & X. Denique ductis LO, TV tangentibus semicirculum SMLN in L & T, secantibus verò AC,

AB

AB in O & V, demittantur ex P & M in AC perpendiculares PQ, MR.

His ita positis, constat KI dimidiam esse differentiam, quâ bina latera AB, AC superant basin BC; at verò semissem omnium laterum esse KC. Deinde etiam patet, sumendo AM pro radio, sinum semissis anguli quæsito BAC adjacentis esse SX vel XM.

Dico igitur 1mo loco rectangulum BAC esse ad rectangulum CKI, ut quadratum AM ad quadratum SX vel XM.

Quoniam enim [a] □EC—□EA vel AB—□AC æquatur 2▭EA, AC; & in acutangulo quidem triangulo [b] □AC + □AB — □BC æquetur 2▭AD, AC; in rectangulo autem [c] □AC + □AB—□BC æquetur nihilo; at verò in obtusangulo [d] □BC — □AB — □AC æquetur 2▭AD, AC: fiet, æqualibus æqualia addendo in acutangulo & rectangulo, hoc est, ad □EC—□AB—□AC addendo □AC + □AB—□BC; & ab æqualibus æqualia auferendo in obtusangulo, hoc est, à □EC — □AB — □AC auferendo □BC—□AB—□AC, in acutangulo quidem summa □EC—□BC vel IC æqualis summæ 2▭EA, AC + 2▭AD, AC, hoc est, [e] æqualis 2▭ED, AC; in rectangulo autem summa □EC—□BC vel IC æqualis 2▭EA, AC vel 2▭ED, AC; at verò in obtusangulo reliquum □EC—□BC vel IC æquale reliquo 2▭EA, AC—2▭AD, AC, hoc est, [f] æquale 2▭ED, AC. Tribus igitur casibus □EC — □IC æquale est 2▭ED, AC. Sed □EC—□IC [g] est æquale 4▭KC, KI. Quare etiam 2▭ED, AC ipsi 4▭KC, KI est æquale, ac proinde & semissis semissi, hoc est, ▭ED, AC ipsi 2▭KC, KI. Porrò cum AB sit ad ED, ut AM ad SR; ut autem AB ad ED, ita [h], assumptâ communi altitudine AC, est ▭AB, AC ad ▭ED, AC seu 2▭KC, KI; at verò ut AM ad SR, ita, assumptâ communi altitudine AM, est □AM ad ▭AM, SR: Erit ut ▭AB, AC ad 2▭KC, KI, ita □AM ad ▭AM, SR. Sumptisque consequentium semissibus, ut ▭AB, AC ad ▭KC, KI, ita □AM ad $\frac{1}{2}$▭AM, SR. Est autem $\frac{1}{2}$▭AM, SR, hoc est, $\frac{1}{2}$▭AS, SR æquale □SX vel XM: siquidem [i], propter similitudinem triangulorum ASX, MSR, AS est ad SX, ut MS ad SR, aut ut $\frac{1}{2}$MS, hoc est, SX vel XM ad $\frac{1}{2}$SR. Quare erit ut ▭AB, AC ad ▭KC, KI, ita □AM ad □SX vel XM. Quod primò erat ostendendum.

a p. 4 Secundi Elem.
b p. 13 Secundi Elem.
c p. 47 Primi Elem.
d p. 12 Secundi Elem.
e p. 1 Secundi Elem.
f p. 1 Secundi Elem.
g p. 8 Secundi Elem.
h p. 1 Sexti Elem.
i p. 4 & 16 Sexti Elem.

Porrò constat, dimidiam differentiam, quâ latus unum AC unà cum base CB superat latus alterum AB esse HC; & dimidiam differen-

rentiam, quâ latus alterum AB unà cum base CB superat latus primum AC esse BH. Deinde etiam patet, sumendo AM pro radio, sinum semissis anguli quæsiti BAC esse MP vel PN.

Dico igitur 2do loco rectangulum BAC esse ad rectangulum BHC, ut quadratum AM ad quadratum MP vel PN.

k p 7 Secundi Elem. Quoniam enim [k] □AC + □AF vel AB − □FC æquatur 2▭AF, AC; & in acutangulo quidem triangulo [l] □AC + □AB − □BC *l p 13 Secundi Elem.* æquetur 2▭AD, AC; in rectangulo autem [m] □AC + □AB − *m p 47 Primi Elem.* □BC æquetur nihilo; at verò in obtusangulo [n] □BC − □AB − □AC æquetur 2▭AD, AC: fiet, ab æqualibus æqualia auferendo *n p 12 Secundi Elem.* in acutangulo & rectangulo, hoc est, à □AC + □AB − □FC auferendo □AC + □AB − □BC, & æqualibus æqualia addendo in obtusangulo, hoc est, ad □AC + □AB − □FC addendo □BC − □AB − □AC; in acutangulo quidem reliquum □BC − □FC vel *o p 1 Secundi Elem.* CG æquale reliquo 2▭AF, AC − 2▭AD, AC, hoc est, [o] æquale 2▭DF, AC; in rectangulo autem reliquum □BC − □FC vel CG æquale reliquo 2▭AF, AC vel 2▭DF, AC; at verò in obtusangulo summa □BC − □FC vel CG æqualis summæ 2▭AF, AC *p p 1 Secundi Elem.* + 2▭AD, AC, hoc est, [p] æquale 2▭DF, AC. Triplici igitur casu □BC − □CG æquale est 2▭DF, AC. Sed □BC − □CG *q p 8 Secundi Elem.* [q] est æquale 4▭BH, HC. Quare etiam 2▭DF, AC ipsi 4▭BH, HC est æquale, adeoque & semissis semissi, hoc est, ▭DF, AC ipsi 2▭BH, HC. Porrò cum AB sit ad DF, ita AM ad RN; ut autem *r p 1 Sexti Elem.* AB ad DF, ita, [r] assumptâ communi altitudine AC, est ▭AB, AC ad ▭DF, AC seu 2▭BH, HC; at verò ut AM ad RN, ita, assumptâ communi altitudine AM, est □AM ad ▭AM, RN: Erit ut ▭AB, AC ad 2▭BH, HC, ita □AM ad ▭AM, RN. Sumptisque consequentium semissibus, ut ▭AB, AC ad ▭BH, HC, ita □AM ad $\frac{1}{2}$▭AM, RN. Est autem $\frac{1}{2}$▭AM, RN, hoc est, $\frac{1}{2}$▭AN, RN *s p 4 & 16 Sexti Elem.* æquale □MP vel PN: siquidem [s] propter similitudinem triangulorum ANP, MNR, AN est ad PN, ut MC ad RN, aut ut $\frac{1}{2}$MC, hoc est, MP vel PN ad $\frac{1}{2}$RN. Quare erit ut ▭AB, AC ad ▭BH, HC, ita □AM ad □MP vel PN. Quod secundò erat ostendendum.

Præterea constat, sumendo AT pro radio, tangentem semissis anguli quæsito BAC adjacentis esse TV.

Dicô igitur 3^tio loco rectangulum BHC esse ad rectangulum IKC, ut □AT ad □TV.

Cum enim ex proximè demonstratis ▭AB, AC sit ad ▭BH, HC,

HC, ſicut □AM ad □MP vel PN: permutando erit [t] ut ▭AB, AC ad □AM, ſic ▭BH, HC ad □MP vel PN, ſeu AX. Ruſus cum paulò ante oſtenſum ſit ▭AB, AC ad ▭KC, KI eſſe, ſicut □AM ad □SX vel XM: ſimiliter permutando erit, ut ▭AB, AC ad □AM, ſic ▭KC, KI ad □SX vel XM. Unde [u] erit ut ▭BH, HC ad □AX, ſic ▭KC, KI ad □XM: & rurſus permutando ut ▭BH, HC ad ▭KC, KI, ita □AX ad □XM, ſeu □AT ad □TV. Quod tertiò erat oſtendendum.

t p 16 Quinti Elem.

u p 11 Quinti Elem.

Denique conſtat, ſumendo AL pro radio, tangentem ſemiſſis anguli quæſiti BAC, eſſe LO.

Dico igitur 4to loco rectangulum IKC eſſe ad rectangulum BHC, ut □AL ad □LO.

Etenim cum oſtenſum ſit ▭BH, HC eſſe ad ▭KC, KI, ſicut □AX ad □XM: convertendo erit [x] ut ▭KC, KI ad ▭BH, HC, ita □XM ad □AX, vel □AP ad □PN, ſeu □AL ad □LO. Quod quartò ac ultimò erat oſtendendum.

x p Cor. 4 Quinti Elem.

Illuſtratio per numeros.

Trianguli ABC eſto latus AB 5915②, & latus AC 91⓪, baſis verò BC 9555②. Quæritur angulus BAC.

Siquidem igitur angulus hic per præcedentes regulas quatuor modis inveniri poteſt, ſuffecerit ſi eum per 1mam regulam inveſtigemus: cum reliquarum elucidatio huic parùm diſſimilis habenda ſit. Ut autem operatio tota per additionem, ſubtractionem, & bipartitionem abſolvatur: loco numerorum multiplicandorum & dividendorum accipiantur eorum Logarithmi, quales illos Clariſſimi Briggii tabula nobis ſuppeditat, quam Vir induſtrius ac de Matheſi practica optimè meritus D. Adrianus Vlaccus ad umbilicum poſtea perduxit, replendo Logarithmos numerorum à 20.000 ad 90 000, in ſerie naturali ab 1 ad 100.000 ante deſideratos. Cui porrò tabulæ, ad quæſiti anguli inveſtigationem, altera adhibenda eſt, Logarithmos continens ſinuum, quos idem Vir Clariſſimus ad graduum centeſimas conſtruxit, aſſumpto radio circuli 1000000000000000 partium, qualis illa in opere abſolutiſſimo, quod Trigonometria Britannica inſcribitur, contenta eſt; vel etiam illa, quam Vir laudandus Adr. Vlaccus, (ſequendo uſitatam hactenus graduum in ſexagenas partes diviſionem) pro ſinubus & tangentibus ad decades ſecundorum ſcrupulorum condidit, ſtatuendo radium 10000000000 par-

partium, ſicut illam in opere, cui Trigonometriæ Artificialis titulum fecit, videre licet. Quarum tabularum ope quæcunque ad faciliorem & perfectiorem quorumvis triangulorum dimenſionem ſpectant, calculo facillimo expediuntur.

Hinc additis AB 5915② & AC 91⓪, ſi à ſumma EC 15015② auferatur CB 9555② : erit reliqui ſemiſſis KI 273①. Cui addendo IC vel CB 9555②, habebitur KC 12285②.

Deinde cum ▭ AB, AC ſit ad ▭ KC, KI, ſicut □ AM ad □ SX vel XM, atque Logarithmi multiplicationem & diviſionem mutent in additionem & ſubtractionem, extractionem verò in bipartitionem: fiet, ut, ſi loco multiplicandi ▭ KC, KI per □ AM ad ipſarum KC, KI Logarithmos addamus duplum radii AM Logarithmum, & in locum dividendi productum per ▭ AB, AC ab hac ſumma auferamus ſummam Logarithmorum ipſarum AB, AC, reliquum 197945417 ſit Logarithmus quadrati ex SX vel XM. Cujus ſumendo ſemiſſem, loco extrahendi è □ SX vel XM radicem quadratum, habebitur 98972708, pro Logarithmo ipſius SX vel XM. Vnde cum utraque hæc ſinus exiſtat ſemiſſis anguli, quæſito BAC adjacentis, ſi in tabula quæratur cujus ſinus Logarithmo inventus numerus 98972708 proximè conveniat: reperietur SX vel XM fore ſinum graduum 5213② ſeu 52$\frac{13}{100}$, vel etiam 52 gr. 7′, & 48″. Cujus ideo duplum, ut $104\underline{26}$, vel 104 gr. 15′, & 36″, erit quantitas anguli adjacentis. Quo ſubducto ex 180 gradibus, relinquetur quæſitus BAC $75\underline{74}$, vel 75. 44′. 24″.

Vbi demum notandum, ſi pro Logarithmis auferendis addantur eorum complementa ad radium, non aliâ opùs fore ſubtractione. Vt liquet inferiùs ex collatione utriuſque praxeos.

			Logarithmi.	Logarithmi
Add. { AB.	59	15	1.7719.547	Compl. 8.2280.453
Add. { AG.	91		1.9590.414	Compl. 8.0409.586
ſumma EC.	150	15	ſumma 3.7309.961	
ſubtr. IC vel CB.	95	55		
reliquum EI.	54	6		
ſemiſſis EK vel KI.	27	3	1.4361.626	1.4361.626
add. IC.	95	55		
ſumma KC.	122	85	2.0893.752	2.0893.752
			20.0000.000	
			ſumma 23.5255.378	
differentia ſummarum			19.7945.417	ſumma 19.7945.417
ſemiſſis			9.8972.708	ſemiſsis 9.8972.708. Log. Sin.

52,13 gr.

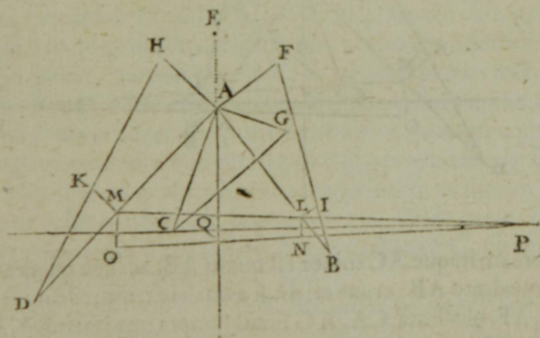
	graduum	
	52	13, vel 52.7.48
duplum	104	26, vel 104.15.36. ang. adjacens
reliq. ex 180gr.	75	74, vel 75.44.24. angulus quæsitus BAC.

SECTIO XXVIII.

Ratio Geometrica inveniendæ lineæ meridianæ.

QUâ ratione ex tribus obſervationibus umbræ Solis, uno die in plano Horizontali factis, Geometricè inveniatur linea Meridiana, oſtendit mihi Pariſiis ante aliquot annos Mathematum peritiâ non minùs quàm omni virtute inſignis D. Claudius Mylon, J.C, cum quo tunc temporis familiariſſimè ſum verſatus, ac etiamnum amicitiam arctam colo. Quam quidem rationem ſe didiciſſe ait ex libro Italico, cui titulus : *Gli Horologi Solari nelle ſuperficie piane : Trattato di Mutio Oddi da Vrbino.* Verùm cum ipſa abſque demonſtratione ſit allata, placuit demonſtrationem qualem adinveni, unà cum Autoris methodo hîc ſubjicere.

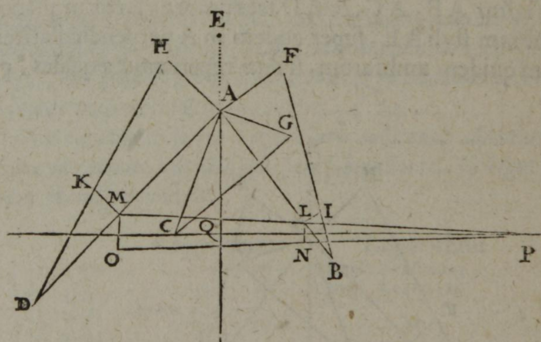
Sint igitur AB, AC, & AD tres umbræ, factæ in plano uno die per umbram ſtyli AE, ſuper eodem in A perpendiculariter erecti. Quarum quidem umbrarum, ſi duæ reperiantur æquales, patet, li-



neam à puncto A perpendiculariter demiſſam in eam, quæ conjungit illarum extrema, eſſe lineam Meridianam.

Si autem omnes tres sint inæquales, ut si A C ponatur minima, erigendæ erunt in puncto A super A B, A C, & A D perpendiculares A F, A G, & A H, ipsi stylo A E æquales, jungendæque F B, G C, & HD. Hinc quoniam AC minor est quàm AB, erit & G C minor quàm FB. Ob eandem rationem erit quoque GC minor quàm HD. Quocirca oportebit ex F B & H D auferre F I & HK ipsi G C æquales, & ex punctis I & K super A B, A D deducere perpendiculares I L, KM; inde verò ex punctis L & M super rectam hæc puncta jungentem alias duas perpendiculares erigere, ut L N & M O, quæ ipsis L I & M K sint æquales. Siquidem autem duæ umbræ A B, A D inæquales sunt, erunt similiter F B, HD inæquales. Cum verò FI & HK æquales sint ex constructione, sequitur L I, K M seu L N, M O inæquales fore, adeoque, cum ipsæ sint parallelæ, rectam, quæ puncta O & N conjungit cum recta ML producta concurrere. Concurrant igitur in punctum P, quo juncto cum puncto C, ex A in P C perpendicularis demittatur AQ, eritque linea Meridiana quæsita.

Atque hic ferè sensus Autoris est, sequitur demonstratio.



Quoniam itaque AC minor est quàm AB, ac ideo quadratum AC minus quadrato AB: erunt etiam, si æqualia utrinq; addantur quadrata A G, AF, quadrata CA, A G simul sumpta quadratis B A, A F simul sumptis minora. Sunt autem per 47 primi Elem. quadrata C A, A G æqualia quadrato GC; at verò quadrata B A, A F æqualia quadrato FB. Quare & quadratum GC quadrato FB minus erit, adeoque GC minor

nor quàm FB. Eodem modo GC minor ostenditur quàm HD; ut &, cùm AB & AD inæquales ponuntur, quòd FB & HD inæquales sint: adeò ut, si AD major fuerit quàm AB, HD quoque major sit futura quàm FB. è quibus si porrò æquales auferantur HK, FI, relinquetur etiam KD major quàm IB.

Siquidem igitur KD major est quàm IB, habebit, per 8 Quinti Elem., HK ad KD minorem rationem, quàm FI ad IB. Unde & componendo, per 28 Quinti Elem., HD ad DK minorem rationem habebit quàm FB ad BI. Sed ut HD ad DK, ita est per 4 Sexti Elem. HA ad KM; & ut FB ad BI, ita est FA seu HA ad IL. Quamobrem & HA ad KM minorem rationem habebit quàm HA ad IL: unde, per 10 Quinti Elem., major erit KM quàm IL, sive MO quam LN, ac proinde ML & ON productæ concurrent in P.

Intelligantur jam tria triangula ABF, ACG, & ADH perpendiculariter erecta ad subjectum planum super rectas AB, AC, & AD. Quo fiet, ut tria puncta F, G, & H in unum coïncidant punctum, ut E, in verticem nempe styli AE; & ut rectæ FB, GC, & HD sint in Conica superficie umbræ, quam Sol motu suo eo die describit; cujus vertex sit punctum E. Quocirca si in ipsis rectis sumantur rectæ FI, GC, & HK inter se æquales, cadent puncta I, C, & K in circuli circumferentiam, cujus planum plano Æquatoris est parallelum. Ideoque si per puncta K & I in ejusmodi positione recta linea concipiatur, ad planum Horizontale producta, concurret illa cum ML producta in punctum P, ubi videlicet ON producta cum ipsa concurrit. Adeò ut, puncto P existente in plano illius circuli atque etiam in subjecto plano, nec non puncto C in utroque plano, recta linea per puncta P & C ducta communis intersectio utriusque plani sit futura. Quoniam verò hæc duo plana ad Meridiani planum recta sunt, erit etiam illorum communis intersectio PC, per 19 undecimi Elem., ad idem Meridiani planum recta, ac proinde etiam ad lineam Meridianam, per 3 defin. undecimi Elementorum. Unde patet, lineam AQ perpendiculariter demissam ex A super rectam PC, lineam Meridianam esse. Quod erat demonstrandum.

Notandum autem porrò est, rationem hanc inveniendæ lineæ Meridianæ, non solùm locum habere in planis Horizontalibus, verùm etiam in verticalibus & in inclinatis, sicut ex demonstratione colligere licet.

Quòd si verò supra dictum planum plano Æquatoris parallelum pro-

pro ipſo Æquatoris plano ſumatur, referet linea P C in omni alio plano lineam Æquinoctialem; perpendicularis autem A Q lineam Subſtilarem. Quod quidem adnotaſſe viſum fuit operæ pretium.

SECTIO XXIX.

Ratio deſcribendi horologia ſciatherica per triangulum iſoſceles.

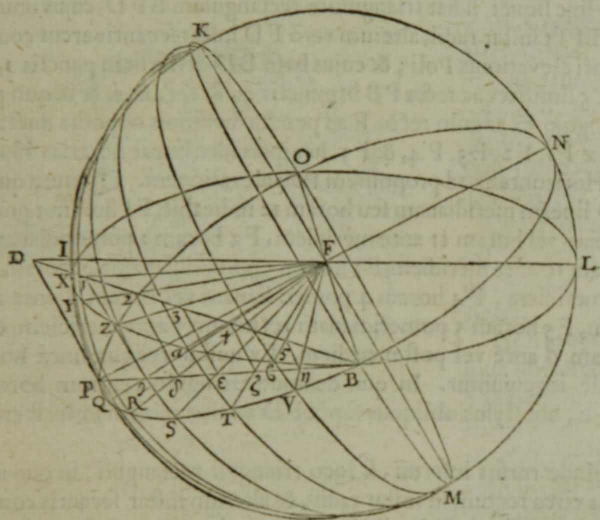
CUm ad deſcribenda horologia ſciatherica modum ingenioſiſſimum, qui ope trianguli iſoſcelis perficitur, jam ante annos aliquot excogitârit Vir eruditus D. Samuel Forſterus, apud Londinenſes in Collegio Greſhamenſi Aſtronomiæ Profeſſor: viſum fuit eum, qualem Dublinii primùm apud Purſerum videre mihi contigit; unà cum ſcalarum conſtructione, quibus in finem illum utitur, paucis hîc exponere; præmittens ad ejuſdem demonſtrationem, hoc, poſtmodum à me inventum,

LEMMA.

Eſto circulus IKLM meridianus, cujus pariter atque mundi centrum ſit F: ſitqúe circulus IBLO horizon, linea verò I L plani horizontis & meridiani communis interſectio ſeu linea meridiana: & puncta K & M poli mundi: at KM axis: circulus autem B NO P æquinoctialis; cujus quidem & meridiani communis ſectio ſit PN; ipſius autem & horizontis BO. Circuli porrò horarii à meridie ſeu ſecantes ſunto KQM, KRM, KSM, KTM, KVM, & KBM, qui ſecent æquinoctialem quidem in Q, R, S, T, V, & B; horizontem verò in X, Y, Z, α, β, & B: ducanturqúe FQ, FR, FS, FT, FV, & FB, nec non FX, FY, FZ, Fα, Fβ, & FB. Deniquè junctâ B P, & ex P ductâ PD ipſi FK parallelâ, conveniente cum L I productâ in D, connectatur BD. Dico hanc ſecari à planis circulorum ſecantium in eadem ratione, in quâ recta BP ab iiſdem ſecta eſt.

Secent enim rectæ F Q, F R, F S, F T, & F V rectam BP in punctis

ctis γ, δ, ϵ, ζ, & η, eruntque ipsa in quibus plana circulorum secantium secant rectam BP. Eodem modo, rectæ FX, FY, FZ, Fα, & FB, secantes rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, erunt hæc ipsa puncta intersectionum, in quibus recta BD secatur à planis eorun-



dem circulorum. Dico igitur rectam BD in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 similiter sectam esse atque recta BP in punctis γ, δ, ϵ, ζ, & η.

Quoniam enim PD parallela est ipsi FK, atque FK ad planum circuli BNOP recta, erit quoque PD eidem plano ad rectos angulos, per 8 undecimi Elementorum. Jam verò si per ipsam & rectam PB vel BD planum transire intelligatur, utpote planum trianguli BPD, erit utique & illud ad planum circuli BNOP rectum, per 18 undecimi Elementorum. Porrò, siquidem omne planum quod per FK du-

NOP rectum est, concipiatur planum per

æc igitur duo plana

KPM, KQM,

ersectiones sint

rectæ

rectæ P D, γ 1, δ 2, ε 3, ζ 4, & η 5, sequitur rectas hasce axi F K ut & inter se esse parallelas, per 16 & 9 undecimi Elementorum. Quare per 2 Sexti Elem. vel per ea, quæ demonstrantur Prop^{ne} 10 ejusdem libri, B D in eandem rationem secabitur in punctis 1, 2, 3, 4, & 5, in quam recta B P in punctis γ, δ, ε, ζ, & η secta est. Quod erat propositum.

Hinc liquet, si fiat triangulum rectangulum B F D, cujus unum latus BF sit instar radii; alterum verò F D instar secantis arcus complementi elevationis Poli; & cujus basis B D divisa sit in punctis 1, 2, 3, 4 & 5 similiter ac recta P B in punctis γ, δ, ε, ζ, & η; & in quo porrò triangulo ex angulo recto F ad puncta divisionis opposita ductæ sint rectæ F 1, F 2, F 3, F 4, & F 5, has ipsas fore lineas horarias Horologii Horizontalis ad propositam Poli elevationem. Quarum quidem F D lineam meridianam seu horam 12 indicabit, F I horam 1 pomeridianam vel horam 11 ante meridiem, F 2 horam 2 pomeridianam vel horam 10 ante meridiem, F 3 horam 3 pomeridianam vel horam 9 ante meridiem, F 4 horam 4 pomeridianam vel horam 8 ante meridiem, F 5 horam 5 pomeridianam vel horam 7 ante meridiem, & F6 horam 6 ante vel post meridiem. Ex quibus reliquæ lineæ horariæ facilè inveniuntur. In quo denique triangulo centrum horologii erit E, ubi stylus obliquus supra F D ad altitudinem Poli est erigendus.

Unde rursus infertur, si loco trianguli rectanguli, in quo unum latus circa rectum sit instar radii, & alterum instar secantis complementi elevationis Poli, aliud assumatur triangulum rectangulum; cujus unum latus circa rectum sit instar sinus elevationis Poli, & alterum instar radii (siquidem sinus arcus alicujus est ad radium, ut radius ad secantem complementi ejusdem arcus); cujusque basis rursus dividatur similiter ac recta PB: idem obtineri, quod diximus.

Quibus præmissis perceptisque accedimus porrò ad constructionem scalarum, quæ sic se habet.

Centro A intervallo quocunque describatur circulus, qui diametris BD, CE ad angulos rectos sese decussantibus in quatuor quadrantes dispescatur. Horum autem B C & C D in 90 gradus dividantur, & à puncto E ad gradus tricenos oppos[illegible]
quæ secent rectam [illegible]
Deinde dividat[illegible]
positâque regu[illegible]

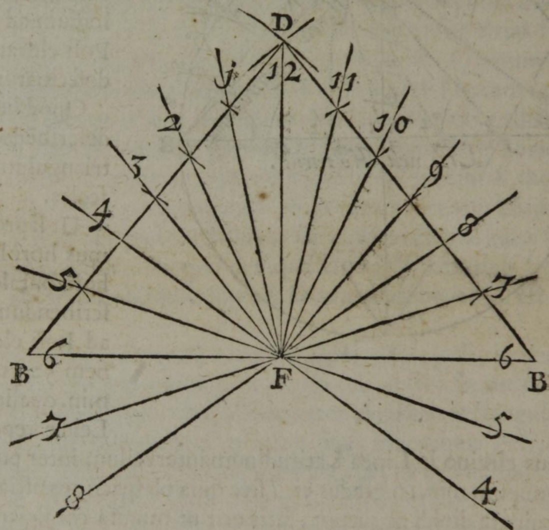
pertingat ad circumferentiam, quadrans B C in alias 90 partes diſpeſcatur, quæ numerationem à B versùs C accipiant. Quibus peractis, ſi à puncto B ad ſingula hæc interſectionum puncta rectæ lineæ ductæ concipiantur, ipſæque à B in recta BC notentur: erit BC ſic deſignata Linea Latitudinum appellata.

Præparatis igitur hiſce duabus ſcalis, ſupereſt ut oſtendamus, quâ ratione earundem beneficio Horologium ad datam Poli elevationem deſcribatur.

Quod fiet utiq; deſcribẽdo ad hoc triangulum iſoſceles.

Ut ſi proponamus horologium horizontale deſcribendum eſſe ad Poli elevationem 52 grad. 10 min. qualis ea hîc Leidæ reperitur: capiamus circino in Linea Latitudinum intervallum inter punctum B & terminum min. 10 gradus 52, (ſive quia ob ſpacii anguſtiam gradus in minuta dividi nequeunt, ſatis erit ut minuta conjiciamus ob exiguam differentiam quæ inde relinquitur), eoque notato in rectâ aliquâ indefinitâ à puncto F hinc inde uſque ad punctum B: capiamus porrò B D Lineam Horarum atque ad ejus intervallum ex utroque puncto B arcum decircinemus, quorum alter alterum ſecet in D, ita ut triangulum conſtituant iſoſceles BDB. In quo denique ſi denotemus ſuper æqualibus lateribus puncta omnia in Linea Horarum deſignata, atque ex puncto B per hæc ipſa rectas lineas ducamus, deſcriptum erit horologium quæſitum. Nam ut habeantur lineæ horariæ, quæ horas indicant ante 6tam matutinam, vel poſt 6tam veſ-

pertinam, oportet tantùm jam inventas producere ex parte puncti F. Cujus quidem descriptionis ratio ex superiori Lemmate perspicua est. Liquet enim ex constructione, si triangulum rectangulum B D F circulo B C D E inscriptum fuerit, ita ut latus ejus D F secet radium A C in G, tunc quidem A G sinum fore grad. 52. min. 10. datæ videlicet Poli elevationis. In quo præterea triangulo latus unum B F est ad latus alterum F D, ut G A ad A D, hoc est, ut sinus elevationis Poli ad radium; & in quo basis B D similiter secta est in punctis 1, 2, 3, 4, & 5 sicut superiùs recta BP in punctis γ, δ, ε, ζ, & η à planis circulorum secantium, &c.

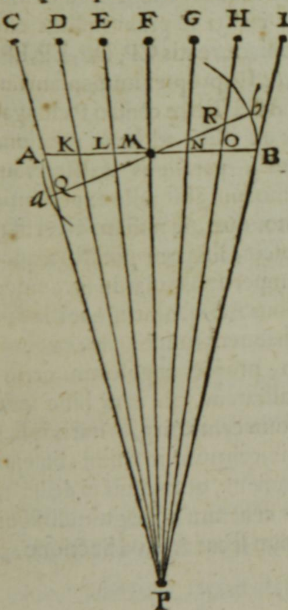


Operæ pretium duxissem reliquorum pariter horologiorum generum descriptionem hîc ostendere, verùm cum in Angliam postea reversus Londini tractatum ea de re à Forstero ipso vernaculâ linguâ conscriptum invenerim, ac anno 1638 in lucem editum, cui titulus: *The Art of Dialling by à new, easye and most speedii way*, quem adire licet: animum immutavi, sufficere existimans me ea hîc, quibus cætera innituntur, fundamenta demonstrasse.

SECTIO XXX.

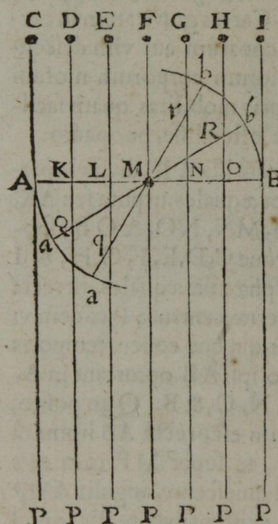
Quemadmodum centrum gravitatis in magnitudinibus mobile sit intelligendum.

GRavitatis centrum in unoquoque corpore non fixum existere, ex proprio principio ante complures annos deduxit Vir illustris Renatus des Cartes in tractatu suo de Mechanica, ubi naturam Vectis persequitur. Quoniam autem eo nondum edito centri hujus naturam cuivis ex illo perspicere haud obvium est, visum fuit hoc loco aliam ejusdem centri explicationem, quâ natura ejus perfacilè ab unoquoque intelligatur, in medium afferre; Qualem eam ingeniosissimus ac sæpiùs laudatus D. Joh. Huddenius Ger. Fil. excogitavit, mihique illius participem fecit, statuens cum D. des-Cartes gravitatem in corpore, quod grave dicitur, nil esse præter conatum aut vim descendendi versùs Terræ centrum, qui per aliorum corporum motum causetur. Quocirca ut centri hujus gravitatis mobilitas quàm facillimè percipiatur, suffecerit id in recta linea ostendisse, hoc pacto:



Esto recta illa A B, divisa in partes aliquot æquales, utputa sex AK, KL, LM, MN, NO, & O B; supponanturque C, D, E, F, G, H, & I septem sphærulæ æquales, in recta versùs Terræ centrum P eâdem vi tendentes, quęque eodem temporis momento ipsi A B occurrant in A, K, L, M, N, O, & B. Quo posito, manifestum est, rectâ AB immotâ existente, ac super M P cum ejus medio M quiescente, angulis AMP & P M B existentibus rectis, quòd per hunc motum sphærularum causari non possit, ut terminorum A, B alter altero priùs descendat: quandoquidem vis, quæ illud præstaret, utrinq; omnino eadem existit. Adeò ut AB eo casu in æquilibrio permanere teneatur, punctumq; M pro illius centro gravitatis sit habendum.

Quòd si verò ipsi AB alia positio tribuatur, ut hîc *a* M *b*, debet necessario pars una *a* M, quæ Terræ centro P vicinior est, plus semper ponderare quàm pars altera M *b*, quæ à centro P est remotior: quoniam prædicta vis hâc ratione inæqualis redditur, atque illa hoc pacto in inferiorem partem *a* M accrescit, dum in eam non solùm plures sphærulæ impingunt, sed ipsæ etiam in angulis, ad rectos magis accedentibus, occurrunt; ac proinde in eam fortiùs agunt. Ita ut recta *a* M *b* aliam positionem appetere teneatur, parsque M *b* ipsâ parte *a* M major sumenda sit, quò ipsa in eodem statu seu æquilibrio permaneat; ac idcirco ejus centrum gravitatis non fixum sed mobile existere. Cujus quidem ad corpora adplicatio ex se manifesta est.



Cæterùm sciendum, differentiam hanc, ex ingenti horum corporum à Terræ centro distantiâ, cum eorundem magnitudine comparatâ, esse planè imperceptibilem seu insensibilem; ac proinde considerationem hujus mutabilitatis centri in praxi nullius esse usus. Quoniam, rectis CP, DP, EP, FP, GP, HP, & IP, propter immensam hujus lineæ AB à Terrę centro P elongationem & ex illius ad hanc relatione parvitatem, parallelis existentibus (quemadmodum absq; ullo experientię detrimento, quæ hîc nullam diversitatem agnoscit, supponi potest) æquemultæ semper sphærulæ in utramque partem ipsius AB, quamcunque illa positionem habuerit, impingunt; eædemque etiam, propter angulorum utrinque æqualitatem, in eam hinc inde æquè fortiter agunt. Adeò ut M punctum centrum gravitatis ipsius A B existens ejusdem quoque gravitatis centrum in omni alia ejus positione existat, ipsaque positionem omnem, quam quis ei dederit, retineat. Indicans quo sensu gravitatis centrum in magnitudinibus immobile seu fixum sit intelligendum non secus ac illud Sectione 19 à nobis cum aliis fuit acceptum.

AD

AD LECTOREM.

POstquam finem exercitationibus hisce imponere decreveram, diversa mihi alia, Amice Lector, jucundissimæ ac perpulchræ contemplationis argumenta superesse deprehendi, quæ, si pro eorum dignitate pertractata Sectionibus hisce adjunxissem, non parùm & meis laboribus ornamenti, & tuis fortè studiis adjumenti commodiqúe attulissent; sed tam labor quam opus in immensum accrevisset. Quocirca cum inter alia, præcedentibus Sectionibus pertractata, modum, quo, elegantiores & sublimiores quædam Propositiones, partim ab Antiquis, partim à præstantissimis hujus sæculi Mathematicis ingeniosissimè inventæ, ab ipsis investigatæ fuerint, illævé Analyticæ artis præsidio inveniri possint, ostenderim: haud alienum ab instituto judicavi, si, ad uberiorem hujus artis usum, ea, quæ Nobilissimus atque Clarissimus D. CHRISTIANUS HUGENIUS nuper de Ratiociniis in aleæ ludo adinvenit mihiqúe conscripta communicavit, hîc unà cum ipsius literis, reliquorum, quæ mihi supersunt, loco, adjicerem.

Quem igitur illius tractatum vel eò tibi acceptiorem fore confido, quò ea quæ inibi traduntur & ſubtiliora & à vulgo remotiora eſſe invenies; præſertim cum ad horum inveſtigationem eâdem mecum Analyſi, cujus olim fundamenta à me edoctus eſt, utatur; atque ita ejus ſtudioſis viam ad conſimiles quæſtiones reſolvendas aperiat. In quibus ſi cum reliquis noſtris laboribus amplam tibi ſatis, Benevole Lector, in hoc ſtudiorum genere exercitationis anſam præbuiſſe videar; animum exinde meum tui ſtudioſiſſimum (ut ſpero) agnoſces, ac noſtram proinde operam in tui & Reïpublicæ Literariæ bonum ſuſceptam in bonam partem interpretaberis. Vale.

CHRISTIANUS HUGENIUS

Clarissimo Viro,

D. FRANCISCO SCHOTENIO

S. D.

Cum in editione elegantissimorum ingenii tui monumentorum, quam præ manibus nunc habes, Vir Clarissime, id inter cætera te spectare sciam, ut varietate rerum, quarum tractationem instituisti, ostendas quàm latè se protendat divina Analytices scientia, facilè intelligo etiam illa plurimùm proposito tuo inservire posse, quæ de aleæ ratiociniis conscripsimus; quantò enim minus rationis terminis comprehendi posse videbantur, quæ fortuita sunt atque incerta, tantò admirabilior ars censebitur, cui ista quoque subjacent. Quare cum in tui gratiam primùm illa exponenda susceperim, túque digna existimes, quæ simul cum subtilissimis tuis inventis in lucem exeant, adeò tibi non refragabor, ut etiam è re mea esse existimem hàc potissimùm ratione ipsa in manus hominum pervenire. Quippe cum in re levi ac frivola operam collocasse videri alioqui possem, non tamen prorsus utilitatis expers ac nullius pretii censebitur, quòd tu veluti inter tua adoptaveris, nec sine multo labore è vernacula lingua nostra in Latinam converteris. Quanquam, si quis penitiùs ea quæ tradimus examinare cœperit, non dubito quin continuò reperturus sit rem non ut videtur ludicram agi, sed pulchræ subtilissimæqúe contemplationis fundamenta explicari. Et Problemata quidem quæ in hoc genere proponuntur, nihilo minus profundæ indaginis visum iri confido, quàm quæ Diophanti libris continentur, voluptatis autem aliquantò plus habitura, cum non, sicut illa, in nuda numerorum consideratione terminentur. Sciendum verò, quod jam pridem inter præstantissimos totâ Galliâ Geo-

metras

metras calculus hic agitatus fuerit, ne quis indebitam mihi primæ inventionis gloriam hac in re tribuat. Cæterùm illi, difficillimis quibusque quæstionibus se invicem exercere soliti, methodum suam quisque occultam retinuêre, adeò ut à primis elementis universam hanc materiam evolvere mihi necesse fuerit. Quamobrem ignoro etiamnum an eodem mecum principio illi utantur; at in resolvendis Problematîs pulchrè nobis convenire sæpenumero expertus sum. Horum Problematum nonnulla in fine operis addidisse me invenies, omissa tamen analysi, cum quòd prolixam nimis operam poscebant, si perspicuè omnia exequi voluissem, tum quòd relinquendum aliquid videbatur exercitationi nostrorum, si qui erunt, Lectorum. Vale.

Dat. Hagæ Com.
27 Apr. 1657.

DE



DE
RATIOCINIIS
IN
LUDO ALEÆ.

ETsi lusionum, quas sola sors moderatur, incerti solent esse eventus, attamen in his, quanto quis ad vincendum quàm perdendum propior sit, certam semper habet determinationem. Ut si quis primo jactu unâ tesserâ senarium jacere contendat, incertum quidem an vincet; at quantò verisimilius sit eum perdere quàm vincere, reipsâ definitum est, calculoque subducitur. Ita quoque, si cum aliquo certem hâc ratione, ut ternis lusibus constet victoria, atque ego jam unum lusum vicerim, incertum adhuc uter nostrum prior tertii victor sit evasurus. Verùm quanti exspectatio mea, & contra quanti illius, æstimari debeat, certissimo ratiocinio consequi licet, atque hinc definire, si ludum uti est imperfectum linquere inter nos convenerit, quantò major portio ejus quod depositum est mihi quàm adversario meo tribuenda esset: vel etiam si quis in locum sortemque meam succedere cupiat, quo pretio me eam ipsi vendere æquum sit. Atque hinc innumeræ quæstiones exoriri possunt inter duos, tres, pluresve collusores. Cumque minimè vulgaris sit hujusmodi supputatio, & sæpe utiliter adhibeatur, breviter hîc quâ ratione aut methodo expedienda sit exponam, ac deinde etiam, quæ ad aleam sive tesseras propriè pertinent, explicabo.

Hoc autem utrobique utar fundamento: nimirum, in aleæ ludo tanti æstimandam esse cujusque sortem seu expectationem ad ali-

quid obtinendum, quantum si habeat, possit denuo ad similem sortem sive expectationem pervenire, æquâ conditione certans. Ut, exempli gratiâ, si quis me inscio alterâ manu 3 solidos occultet, alterâ 7 solidos, mihique optionem det ex utra manu solidos accipere malim; hoc tantundem mihi valere dico, ac si 5 solidi mihi dentur. Quoniam quinque solidos habens, denuo eò pervenire possum, ut æquam expectationem nanciscar ad 3 vel 7 solidos obtinendos: idque æquo lusu contendens.

PROPOSITIO I.

Si a vel b expectem, quorum utrumvis æquè facilè mihi obtingere possit, expectatio mea dicenda est valere $\frac{a+b}{2}$.

Ad hanc regulam non solùm demonstrandam, verùm etiam primitùs eruendam posito x pro eo quod æquivalet expectationi meæ, oportet me, quum x habeo, rursus ad similem sortem pervenire posse, æquâ conditione certantem. Ponatur itaque lusus esse talis, ut cum altero certem hâc conditione, ut quisque deponat x, ac ut victor victo traditurus sit a. Hic autem lusus justus est, & patet me hâc ratione æquam habere sortem ad obtinendum a, si lusum perdam scilicet; aut $2x - a$, si vincam: tum enim obtineo $2x$, id nempe quod depositum est, de quo alteri erogandum est a. Quòd si autem $2x - a$ tantundem valeret atque b, æqua mihi sors obtingeret ad a quàm ad b. Pono itaque $2x - a \infty b$, & fit $x \infty \frac{a+b}{2}$, pro valore meæ expectationis. Cujus demonstratio facilis est. Etenim habens $\frac{a+b}{2}$ possum cum alio certare, qui etiam $\frac{a+b}{2}$ deponere volet, hâc conditione ut vincens victo sit traditurus a. Quâ ratione similis expectatio mihi obtinget ad obtinendum a, si perdam, aut ad obtinendum b, si vincam; tum enim obtineo $a + b$, id nempe quod depositum est, alterique inde concedo a.

In numeris. Si ad 3 vel 7 æqua sors mihi obtingat, tum expectatio mea per hanc Propositionem valet 5; & certum est me 5 habentem rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Si enim cum alio certans 5 deponam, atque ille similiter 5 deponat, hâc conditione, ut, qui vincit, alteri sit daturus 3; erit hic lusus omnino justus, & patet

tet mihi æquam obtingere sortem ad obtinendum 3, si perdam, aut 7, si vincam: quoniam tunc obtineo 10, de quo alteri concedo 3.

PROPOSITIO II.

Si a, b, vel c expectem, quorum unumquodque pari facilitate mihi obtingere possit, expectatio mea æstimanda est $\frac{a+b+c}{3}$.

Ad quod rursus inveniendum, ponatur, ut ante, x pro valore expectationis meæ. Oportet ergo me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse justo lusu. Ponatur lusus esse talis, ut cum duobus aliis ludam hâc conditione, ut quisque nostrum trium deponat x, & ut cum uno hoc pactum aggrediar, si ipse victor evadat, mihi sit daturus b, & ego ipsi traditurus sim b, si idem mihi obtingat. Cum altero autem hanc ineam conditionem, ut ille ludum vincens mihi traditurus sit c, aut ego ipsi sim daturus c, si ego vincam. Et patet hunc ludum justum esse. Æquam autem hâc ratione sortem habebo ad obtinendum b, si nimirum primus vincat, aut c, si secundus vincat, aut etiam $3x-b-c$ si ego vincam; tunc enim obtineo $3x$, quod depositum est, de quo uni concedo b, & alteri c. Quòd si $3x-b-c$ æquale fuerit ipsi a, eadem mihi obtingeret expectatio ad obtinendum a, quæ ad b, aut ad c. Pono itaque $3x-b-c \infty a$, & fit $x \infty \frac{a+b+c}{3}$, pro valore meæ expectationis. Eodem modo invenitur, si ad a, b, c, aut d æqua sors mihi obtingat, id tanti valoris esse, quanti $\frac{a+b+c+d}{4}$. Atque ita porrò.

PROPOSITIO III.

Si numerus casuum, quibus mihi eveniet a, sit p, numerus autem casuum quibus mihi eveniet b sit q, sumendo omnes casus æquè in proclivi esse: expectatio mea valebit $\frac{pa+qb}{p+q}$.

Ad hanc regulam eruendam, ponatur rursus x pro valore expectationis meæ: ergo oportet me, cùm x habeo, ad eandem expectationem pervenire posse, ut ante, justo lusu. Ad hoc autem tot collusores sumam, ut unà mecum numerum ipsius $p+q$ efficiant, quorum

 deponat

deponat quisque x, ita ut depositum sit $px + qx$, & quisque sibi ludat æquâ expectatione ad vincendum. Porrò cum tot ex hisce collusoribus, quot indicat numerus q, sigillatim hoc pactum inibo, ut eorum qui vincat mihi sit daturus b, aut ego contra ipsi idem b, si vincam. Similiter cum reliquis collusoribus, constituentibus $p - 1$ sigillatim hanc conditionem aggrediar, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus a, & ego tantundem (a scilicet) ipsi, si ego vincam. Et patet hunc lusum hâc conditione justum esse, nemine videlicet injuriam patiente. Deinde patet me nunc q expectationis habere ad b, & $p - 1$ expectationes ad a, & 1 expectationem (me nempe vincente) ad $px + qx - bq - ap + a$, tunc enim obtineo $px + qx$, id quod depositum est, de quo tradere debeo b unicuique q lusorum, & a unicuique $p - 1$ lusorum, quæ simul conficiunt $ab + pa - a$. Si itaque $qx + bx - bq - ap + a$ æquale esset ipsi a, haberem p expectationes ad a, (quandoquidem jam $p - 1$ expectationes ad id habebam) & q expectationes ad b, & sic ad priorem meam exspectationem rursus pervenissem. Quocirca porrò $px + qx - bq - ap + a \infty a$, & fit $x \infty \frac{ap + bq}{p + q}$, pro valore expectationis meæ, omnino ut in initio positum fuit.

In numeris. Si 3 mihi expectationes forent ad 13, & 2 expectationes ad 8, haberem per hanc regulam tantundem ac 11. Et facile est ostendere, me, si 11 habeam, rursus ad eandem expectationem pervenire posse. Ludens enim contra 4 alios, & quisque nostrum quinque deponens 11, cum duobus ex illis sigillatim pactum inibo, ut horum qui vincat mihi sit daturus 8, aut ego ipsi idem 8, si vincam. Similiter cum duobus reliquis, ut eorum quisque, qui ludum vincit, mihi sit daturus 13, aut ego ipsi tantundem, si ego vincam. Qui quidem lusus justus est. Et patet me hoc modo duas habere expectationes ad 8, nimirum si alteruter eorum, qui mihi 8 promiserunt, vincat, & 3 expectationes ad 13, nimirum si alteruter reliquorum duorum, qui mihi 13 tradere debent, vincat, aut si ipse ludum vincam: ego enim ludum vincens obtineo depositum, id est, 55, de quo unicuique duorum tradere debeo 13, & unicuique reliquorum duorum 8, ita ut & mihi relinquatur 13.

PRO-

PROPOSITIO IV.

Vt igitur ad primò propositam quæstionem veniamus, nimirum, de facienda distributione inter diversos collusores, quando eorum sortes inæquales sunt, opùs est ut à facilioribus incipiamus.

Sumpto itaque me cum aliquo certare, hoc pacto: ut qui priùs ter vicerit, quod depositum est, lucretur, & me jam bis vicisse, alterum verò semel. Scire cupio, si lusum prosequi non velimus, sed pecuniam, de qua certamus, prout æquum est, partiri, quantum ejus mihi obtingeret.

Primò considerare oportet lusus, qui utrobique deficiunt. Certum enim est, si inter nos convenerit, verbi gratiâ, ut quod depositum est lucretur is, qui priùs vigesies vicerit, & ego decies & novies vicero, at alter decies & octies, tantò meliorem fore eo casu sortem meam quantò hîc melior est, ubi à tribus lusibus binos consequutus sum, ille verò unum duntaxat: quia nimirum utrobique mihi unus tantummodo lusus sed ipsi duo deficiunt.

Porrò ad inveniendum quanta pars utrique debeatur, advertendum est quid fieret, si in lusu pergeremus. Certum enim est, si primum ludum vincerem, me præscriptum numerũ impleturum & omne depositum consecuturum, id quod vocetur a. Quod si autem alter primum ludum vinceret, tunc æquata utriusque sors foret, (quippe utrique uno adhuc deficiente ludo,) adeoque cederet cuique $\frac{1}{2}a$. Manifestum autem est me æquam habere sortem ad primum ludum vincendum aut perdendum, ita ut mihi nunc æqua sit expectatio ad obtinendum a aut $\frac{1}{2}a$: quod ipsum per 1^{mam} Propositionem tantum est ac si utriusque sortis dimidium, id est, $\frac{3}{4}a$, haberem; & relinquitur alteri meo collusori $\frac{1}{4}a$, quæ ipsius portio statim ab initio eodem modo reperiri potuisset. Unde patet, eum, qui ludum meum in se recipere vellet, mihi $\frac{3}{4}a$ pro eo tradere debere; ac proinde semper tria contra unum deponere eum posse, qui unum ludum vincere contendat, priusquàm alter duos vincat.

PROPOSITIO V.

Ponamus unum mihi deficere ludum & collusori meo tres lusus. Oportet hîc facere distributionem.

Advertamus itaque rursus, in quo essemus statu, si ego vel ipse primum vinceret lusum. Si ego vincerem, obtinerem depositum, id est, a; quòd si autem ille primum ludum vinceret, deficerent ipsi duo lusus & mihi unus; ac proinde in eodem statu essemus, qui in præcedenti Propositione positus fuit, mihique obtingeret $\frac{3}{4}a$, ut ibi ostensum est. Itaque pari facilitate vel a mihi obtinget vel $\frac{3}{4}a$, id quod tantum est, per 1mam Propositionem, ac $\frac{7}{8}a$. Et relinquitur $\frac{1}{8}a$ collusori meo; ita ut mea sors ad sortem illius se habeat, sicut 7 ad 1.

Quemadmodum autem ad hunc calculum requisitus est præcedens, ita rursus hicce inservit sequenti: nimirum, si ponamus mihi unum ludum deficere & collusori meo 4or lusus. Et invenitur eodem modo, mihi deberi $\frac{15}{16}$ istius quod depositum est, & ipsi $\frac{1}{16}$.

PROPOSITIO VI.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo tres lusus.

Fiet itaque primo lusu; vel ut mihi unus lusus deficiat & ipsi tres (unde mihi per præcedentem Propositionem obtinget $\frac{7}{8}a$); vel ut cuique nostrum adhuc duo lusus deficiant, unde mihi debebitur $\frac{1}{2}a$, quandoquidem sic utrique æqua sors futura est. Est mihi autem æqualis facilitas ad primum ludum vincendum aut perdendum; ita ut mihi æqua sit expectatio ad obtinendum $\frac{7}{8}a$ aut $\frac{1}{2}a$, id quod mihi valet $\frac{11}{16}a$, per 1mam Propositionem. Et debentur mihi 11 partes ejus quod depositum est, & collusori meo 5 partes.

PROPOSITIO VII.

Ponamus mihi deficere duos lusus & collusori meo quatuor.

Fiet itaque, ut, si primum ludum vincam, unum ludum vincere debeam & alter quatuor; vel, si eundem perdam, duos & alter tres. Ita ut æqua mihi sors obtingat ad $\frac{15}{16}a$ aut $\frac{11}{16}a$, id quod tantum valet ac $\frac{13}{16}a$, per 1mam Propositionem. Unde patet, eum meliorem habere sortem, qui duos lusus vincere debet dum alter quatuor, quàm eum, qui unum dum alter duos. In hoc enim posteriori casu, nimirum ipsius 1 ad 2, portio mea, per 4tam Propositionem, est $\frac{3}{4}a$, quæ minor est quàm $\frac{13}{16}a$.

PRO-

PROPOSITIO VIII.

Nunc verò ponamus tres esse collusores, quorum primo ut & secundo unus lusus deficiat, sed tertio duo lusus.

Ut igitur inveniatur primi pars, rursus advertendum est, quid ipsi deberetur, si vel ipse vel alter reliquorum duorum primum lusum vinceret. Si ipse vinceret, haberet depositum, id quod sit a. Quòd si secundus vinceret, primus nihil haberet, quoniam secundus sic lusui finem imposuisset. At si tertius vinceret, tunc cuique trium adhuc unus deficeret lusus, ideóque tam primo quàm utrique reliquorum deberetur $\frac{1}{3}a$. Et fit primo una expectatio ad a, una ad o, & una ad $\frac{1}{3}a$, (quandoquidem æquè facilè contingere potest cuique trium ut primum ludum vincat,) quod ipsi tantundem valet ac $\frac{4}{9}a$, per 2dam Propositionem. Et fit similiter secundo $\frac{4}{9}a$, & remanet tertio $\frac{1}{9}a$. Cujus pars separatim etiam inveniri potuerat, atque inde reliquorum partes determinari.

PROPOSITIO IX.

Ut tot collusorum, quot quis voluerit, ex quibus uni plures & alii pauciores lusus deficiunt, cujusque pars inveniatur, considerandum est, quid illi, cujus partem invenire volumus, deberetur, si vel ipse, vel quislibet reliquorum primum sequentem ludum vinceret. Horum autem partes si in unam summam colligantur, & aggregatum per numerum collusorum dividatur, quotiens ostendet unius quæsitam partem.

Ponamus tres esse collusores A, B, & C, & ipsi A unum ludum deficere; ipsi B duos lusus, & ipsi C similiter duos lusus. Invenire oportet, quid ipsi B, ejus quod depositum est, debeatur. Id quod vocetur q.

Primò examinandum est, quid ipsi B deberetur, si vel ipse, vel A, vel C primum sequentem ludum vinceret.

Si A vinceret, ludo finem imposuisset, ac per consequens ipsi B deberetur o. Si ipse B vinceret, deficeret illi adhuc unus lusus, & ipsi A unus lusus, at ipsi C duo lusus. Quocirca ipsi B hoc in casu deberetur $\frac{4}{9}q$, per 8vam Propositionem.

Denique si C primum sequentem ludum vinceret, tunc ipsis A & C sin-

C singulis unus deficeret lusus, sed ipsi B duo lusus, ac per consequens ipsi B deberetur $\frac{1}{9}q$, per eandem Propositionem 8^{vam}. Nunc autem in unam summam colligendum est, id quod in tribus hisce casibus ipsi B deberetur: nimirum, o, $\frac{4}{9}q$, $\frac{1}{9}q$: quorum summa est $\frac{5}{9}q$. Quod ipsum divisum per 3, numerum collusorum, dat $\frac{5}{27}q$. Quæ ipsius B quæsita pars est. Demonstratio autem hujus patet ex 2da Propositione. Quoniam enim B æquam habet sortem ad obtinendum o, $\frac{4}{9}q$, vel $\frac{1}{9}q$, habet per 2^{dam} Propositionem tantundem ac $\frac{c + \frac{4}{9}q + \frac{1}{9}q}{3}$, id est, $\frac{5}{27}q$. Et certum est, hunc divisorem 3 esse numerum collusorum.

Ut autem inveniatur, quid cuipiam debeatur in quolibet casu, videlicet si vel ipse vel aliquis reliquorum primum sequentem ludum vincat: oportet simpliciores casus primò investigare, & horum medio sequentes. Nam sicut hic ultimus casus solvi non potuit priusquam ille octavæ Propositionis calculo subductus esset, in quo deficientes lusus erant 1, 1, 2, ita etiam cujusque pars supputari nequit in tali casu, ubi deficientes lusus sunt 1, 2, 3, quin primùm calculo subductus sit casus deficientium lusuum 1, 2, 2, quemadmodum jam fecimus, & præterea ille, in quo lusus deficientes sunt 1, 1, 3; qui similiter per 8^{vam} Propositionem supputari potuisset. Atque hoc quidem pacto consequenter supputare licet casus omnes, qui in sequenti tabula comprehenduntur, & infinitos alios.

Tabula pro 3 collusoribus.

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 1 . 2	1 . 2 . 2	1 . 1 . 3	1 . 2 . 3
Eorum partes.	4 . 4 . 1	17 . 5 . 5	13 . 13 . 1	19 . 6 . 2
	9	27	27	27

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 1 . 4	1 . 1 . 5	1 . 2 . 4	1 . 2 . 5
Eorum partes.	40 . 40 . 1	121 . 121 . 1	178 . 58 . 7	542 . 179 . 8
	81	243	243	729

Lusus, qui ipsis deficiunt.	1 . 3 . 3	1 . 3 . 4	1 . 3 . 5
Eorum partes.	65 . 8 . 8	616 . 82 . 31	629 . 87 . 13
	81	729	729

Lusus, qui ipsis deficiunt.	2 . 2 . 3	2 . 2 . 4	2 . 2 . 5	2 . 3 . 3	2 . 3 . 4	2 . 3 . 5
Eorum partes.	34 . 34 . 13	338 . 338 . 53	353 . 353 . 23	133 . 55 . 55	451 . 195 . 83	1433 . 635 . 119
	81	729	729	243	729	2187

Quod

Quod ad tesseras attinet, de iis hæ quæstiones proponi possunt: videlicet, quotâ vice unâ tesserâ senarium jacere periclitandum sit, aut aliquod reliquorum punctorum. Item quotâ vice duos senarios duabus tesseris, aut tres senarios tribus tesseris jacere sit tentandum. Et plures aliæ hujusmodi quæstiones.

Ad quas solvendas advertendum est. Primò unius tesseræ sex esse jactus diversos, quorum quivis æquè facilè eveniat. Sumo enim tesseram habere figuram cubi perfectam. Porrò duarum tesserarum 36 esse diversos jactus, quorum similiter quivis æquè facilè obtingere potest. Nam ratione cujusque jactus unius tesseræ potest unus sex jactuum alterius tesseræ simul contingere. Et sexies 6 efficiunt 36 jactus. Item trium tesserarum esse 216 jactus diversos. Nam ratione cujusque 36 jactuum duarum tesserarum potest unus sex jactuum, qui in 3[tia] sunt, evenire. Et sexies 36 efficiunt 216 jactus. Eodem modo patet, quatuor tesserarum jactus esse sexies 216, id est, 1296; atque sic ulteriùs jactus quotlibet tesserarum supputari posse, sumendo semper pro accessione unius tesseræ sexies jactus præcedentis.

Porrò notandum, duarum tesserarum unum duntaxat esse jactum, qui 2 aut 12 puncta efficiat, duos verò jactus, qui 3 aut 11 puncta efficiant. Si enim tesseras vocemus A & B, patet, ad 3 puncta jacienda in A unum & in B duo, vel in B unum & in A duo puncta reperiri posse. Similiter ad 11 puncta jacienda in A quinque & in B sex, vel in A sex & in B quinque puncta patêre posse. Quatuor punctorum tres sunt jactus, videlicet, ipsius A 1 & B 3 puncta; vel ipsius A 3 & B 1 punctum; vel ipsius A 2 & B 2 puncta.

Decem punctorum similiter tres sunt jactus.

Quinque vel novem punctorum 4[or] sunt jactus.

Sex vel octo punctorum 5[que] sunt jactus.

Septem punctorum 6 sunt jactus.

In tribus tesseris reperiuntur	3 vel 18	punctorum	1	jactus.
	4 vel 17		3	
	5 vel 16		6	
	6 vel 15		10	
	7 vel 14		15	
	8 vel 13		21	
	9 vel 12		25	
	10 vel 11		27	

PROPOSITIO X.

Invenire, quot vicibus suscipere quis possit, ut unâ tesserâ 6 puncta jaciat.

Si quis primâ vice senarium jacere contendat, apparet unum esse casum, quo vincat, habeatque id, quod pignoris loco depositum est; quinque verò esse casus, quibus perdat, & nihil habeat. Sunt enim 5 jactus contra ipsum, & tantùm unus pro ipso. Quod autem depositum est vocetur *a*. Est itaque ipsi unica expectatio ad obtinendum *a*, sed quinque ad obtinendum 0; id quod per 2dam Propositionem tantundem valet ac $\frac{1}{6}a$. Et manet pro eo qui ipsi hunc casum offert $\frac{5}{6}a$. Ita ut tantummodo 1 contra 5 deponere possit, qui primâ vice suscipere velit.

Qui duabus vicibus semel senarium jacere certet, sors ejus hoc pacto computatur. Si primâ vice 6 jaciat, obtinet *a*. Si diversum eveniat, unus ipsi restat jactus, qui ex præcedenti tantum valet, quantum $\frac{1}{6}a$. Atqui ut primâ vice 6 jaciat, unus tantùm casus est, & quinque casus, quibus diversum eveniat. Itaque ab initio unus casus est, qui det ipsi *a*; & quinque qui dent $\frac{1}{6}a$, id quod per 2dam Propositionem valet $\frac{11}{36}a$. Unde contracertanti lusori cedit reliquum $\frac{25}{36}a$; adeò ut sors utriusque sive æstimatio expectationis eam servet rationem, quam 11 ad 25; id est minus quàm 1 ad 2.

Hinc eodem modo calculo subducitur, quòd sors ejus, qui tribus vicibus semel senarium jacere suscipit, sit futura $\frac{91}{216}a$; ita ut 91 contra 125 deponere possit; id est, paulò minus quàm 3 ad 4.

Qui quatuor vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{671}{1296}a$; ita ut 671 contra 625 deponere possit; id est, plùs quam 1 ad 1.

Qui quinque vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{4651}{7776}a$, & potest 4651 contra 3125 deponere; id est, paulò minus quàm 3 ad 2.

Qui sex vicibus idem suscipit, sors ejus est $\frac{31031}{46656}a$, & potest 31031 contra 15625 deponere; id est, paulò minus quàm 2 ad 1.

Atque ita consequenter quilibet jactuum numerus inveniri potest. Sed licet majori compendio progredi, ut in sequenti Propositione ostendetur; sine quo calculus aliàs multò prolixior foret.

PRO-

PROPOSITIO XI.

Invenire, quot vicibus ſuſcipere quis poſſit, ut duabus teſſeris 12 puncta jaciat.

Si quis primâ vice duos ſenarios jacere contendat, apparet unum eſſe caſum, quo vincat, id eſt, ad obtinendum a; & 35 eſſe caſus, quibus perdat ſive nihil habeat, quoniam 36 ſunt jactus. Itaque habet, per 2dam Propoſitionem, $\frac{1}{36}a$.

Qui duabus vicibus idem ſuſcipit, ſi primâ vice duos ſenarios jaciat, obtinebit a; ſi verò primâ vice diverſum eveniat, unus ipſi reſtat jactus, id quod ipſi, per illud quod jam dictum eſt, valet $\frac{1}{36}a$.

Atqui ut primâ vice duos ſenarios jaciat, unus tantum eſt caſus, ſed 35 caſus, quibus diverſum eveniat. Itaque ab initio unus caſus eſt, qui det ipſi a, & 35 qui dent $\frac{1}{36}a$; id quod per 2dam Propoſitionem valet $\frac{71}{1296}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1225}{1296}a$.

Ex his invenire licet, qualis ſit ei ſors aut pars, qui idem ſuſcipit quaternis jactibus, prætereundo caſum eum, cùm quis illud ternis jactibus ſuſcipit.

Etenim, qui 4or vicibus duos ſenarios jacere contendit, ſi illud 1ma aut 2da vice faciat, obtinet a; ſin minùs, reſtant ipſi duo jactus, qui per illud quod ſuperiùs dictum eſt, valent $\frac{71}{1296}a$. Sed propter eandem rationem habet etiam 71 caſus, ut ex duobus primis jactibus ſemel duos ſenarios jaciat, contra 1225 caſus, quibus diverſum eveniat. Habet itaque ab initio 71 caſus, qui ipſi dent a, & 1225 caſus, qui dent ipſi $\frac{71}{1296}a$. Quod ipſi per 2dam Propoſitionem valet $\frac{178991}{1679616}a$. Et remanet contracertanti $\frac{1500625}{1679616}a$. Id quod oſtendit eorum ſortes eſſe ad ſe invicem, ut 178991 ad 1500625.

E quibus porrò eâdem ratione invenitur expectatio ejus, qui 8 vicibus ſemel duos ſenarios jacere certat. Ac inde rurſus expectatio ejus, qui idem ſuſcipit 16 vicibus. Atque ex hujus expectatione, ut etiam ex expectatione illius, qui iſtud 8 vicibus ſuſcipit, invenitur expectatio ejus, qui illud 24 vicibus in ſe recipit. In qua operatione, quoniam præcipuè quæritur in quo numero jactuum æqualis ſors incipiat, inter eum qui id ſuſcipit & eum qui offert, licebit à numeris, qui alioquin in immenſum excreſcerent, poſteriores aliquot characteres auferre. Atque ita quidem reperio ei, qui illud 24 vicibus ſuſcipit, adhuc aliquid deficere; tumque demum eum potiorem conditionem inire, cùm 25 jactibus aggreditur.

PROPOSITIO XII.

Invenire quot tesseris suscipere quis possit, ut primâ vice duos senarios jaciat.

Hoc autem tantundem est, ac si quis scire velit, quoto jactu quispiam unâ tesserâ suscipere possit, ut bis senarium jaciat. Quòd si quis duobus jactibus susciperet, obtingeret ei, per ea quæ ante ostensa sunt, $\frac{1}{36}a$. Qui illud tribus jactibus in se reciperet, si primus ejus jactus senarius non foret, haberet adhuc duos jactus, quorum uterque senarius esse deberet, id quod tantundem valere dictum est ac $\frac{1}{36}a$. At verò primo ejus jactu existente senario, opùs est ut ex duobus jactibus non nisi semel senarium jaciat. Quod per 10 Propositionem tantundem valet ac si $\frac{11}{36}a$ haberet. Atqui certum est ipsum unum habere casum, quo primâ vice senarium jaciat, & quinque casus quibus diversum eveniat. Habet itaque ab initio unum casum ad $\frac{11}{36}a$, & 5 casus ad $\frac{1}{36}a$, id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem valet ac $\frac{16}{216}a$ seu $\frac{2}{27}a$. Hoc pacto assumendo continuè unum jactum ampliùs, invenitur 10 jactibus unâ tesserâ, aut 10 tesseris primo jactu suscipi posse, ut duo senarii jaciantur, idque cum lucro.

PROPOSITIO XIII.

Si cum alio ludam duabus tesseris unum solummodo jactum, hâc conditione, ut, si septenarius eveniat, ego vincam; at ille, si denarius obtingat; si verò quidquam aliud accidat, ut tum id quod depositum est æqualiter dividamus: Invenire qualis istius pars cuique nostrum debeatur.

Quoniam 36 jactuum, qui duabus tesseris proveniunt, 6 jactus existunt septem punctorum, & 3 jactus decem punctorum, restant adhuc 27 jactus, qui ludum æquare possunt; id quod si fiat, cuique nostrum debebitur $\frac{1}{2}a$. Verùm si id non obtingat, habebo 6 casus, quibus vincam, id est, ut a habeam; & 3 casus, quibus diversum eveniat, nihilque habeam: id quod per 2^{dam} Propositionem tantundem est ac si tali casu $\frac{2}{3}a$ haberem. Habeo itaque ab initio 27 casus ad $\frac{1}{2}a$ & 9 casus ad $\frac{2}{3}a$, id quod, per 2^{dam} Propositionem, tantundem est ac $\frac{13}{24}a$. Et remanet contracertanti $\frac{11}{24}a$.

PRO-

PROPOSITIO XIV.

Si ego & alius duabus teſſeris alternatim jaciamus, hâc conditione, ut ego vincam ſimul atque ſeptenarium jaciam, ille verò quàm primùm ſenarium jaciat; ita videlicet, ut ipſi primum jactum concedam: Invenire rationem meæ ad ipſius ſortem.

Ponatur, ſortem meam valere x, & id quod depoſitum eſt vocari a; eritque ſors alterius $= a - x$. Et patet, quandocunque ipſius vices jaciendi revertuntur, ſortem meam tum rurſus debere eſſe $= x$. At quandocunque meæ vices ſunt ut jaciam, ſors mea pluris æſtimanda eſt. Ponatur itaque pro ejus valore y. Iam quoniam ex 36 jactibus reperiuntur 5 in 2 teſſeris, qui colluſori meo ſenarium dare luſuſque victorem reddere poſſunt; & 31 jactus, quibus diverſum eveniat, id eſt, qui meas jaciendi vices promovent: habebo, priuſquam jacit, 5 caſus ad obtinendum 0, & 31 caſus ad obtinendum y. id quod per 3tiam Propoſitionem valet $\frac{31y}{36}$. Poſuimus autem caſum meum à principio eſſe $= x$. Quocirca erit $\frac{31y}{36} = x$, adeoque $y = \frac{36x}{31}$. Deinde poſitum fuit, vicibus meis venientibus, ſortem meam valere y. Ego verò jacturus, habeo 6 caſus ad obtinendum a, quandoquidem 6 jactus reperiuntur 7 punctorum, qui me victorem reddunt; habeoque 30 caſus, quibus vices colluſoris mei revertuntur, id eſt, ut mihi obtineam x. id quod per 3tiam Propoſitionem valet $\frac{6a + 30x}{36}$. Hoc autem cum ſit $= y$, erit, invento, ut ante, $\frac{36x}{31} = y$, $\frac{30x + 6a}{36} = \frac{36x}{31}$. Unde invenitur $x = \frac{31a}{61}$, valor meæ ſortis. Et per conſequens colluſoris mei erit $\frac{30a}{61}$; ita ut ratio ſortis meæ ad illius ſortem ſit, ut 31 ad 30.

Coronidis loco ſubjungantur ſequentia Problemata.

A & B unà ludunt duabus teſſeris, hâc conditione, ut A vincat, ſi ſenarium jaciat, at B ſi ſeptenarium jaciat. A primò unum jactum inſtituet; deinde B duos jactus conſequenter; tum rurſus A duos jactus, atque ſic deinceps, donec hic vel ille victor evadat. Quæritur ratio ſortis ipſius A ad ſortem ipſius B? Reſp. ut 10355 ad 12276. *Probl.* I.

Probl. 2. Tres collusores A, B & C assumentes 12 calculos, quorum 4 albi & 8 nigri existunt, ludunt hâc conditione: ut, qui primus ipsorum velatis oculis album calculum elegerit, vincat; & ut prima electio sit penes A, secunda penes B, & tertia penes C, & tum sequens rursus penes A, atque sic deinceps alternatim. Quæritur, quænam futura sit ratio illorum sortium?

Probl. 3. A certat cum B quòd ipse ex 40 chartis lusoriis, id est, 10 cujusque speciei, 4 chartas extracturus sit; ita ut ex unaquaque specie habeat unam. Et invenitur ratio sortis A ad sortem B ut 1000 ad 8139.

Probl. 4. Assumptis, ut ante, 12 calculis, 4 albis & 8 nigris, certat A cum B, quòd velatis oculis 7 calcul[illegible] ex iis exempturus sit, inter quos 3 albi erunt. Quæritur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B.

Probl. 5. A & B assumentes singuli 12 nummos ludunt tribus tesseris hâc conditione: ut, si 11 puncta jaciantur, A tradat nummum ipsi B; at si 14 puncta jaciantur, B tradat nummum ipsi A; & ut ille ludum victurus sit, qui primùm omnes habuerit nummos. Et invenitur ratio sortis ipsius A ad sortem ipsius B, ut 244140625 ad 282429536481.

FINIS.



Errata quæ irrepsêre Benevolus Lector sic corrigat.

Pag. 10. lin. 11 omissa sunt hæc verba : *& triplo plures aurei quàm solidi.* P. 13. l. penult. lege *& 6 poma.* P. 16 in fine Prop. 26 lege 75 2^dæ^ *molæ,* & supra hosce numeros scribe *modii.* Pag. 25 in margine lege *ad 22 Prop.* P. 26 in fine Prop. 39 lege *C.* 3520. P. 34 ad sinistram in margine lege *flor.* 17017016 (3). P. 45 & 46 in 2 fig. loco superioris literæ D scribe B. P. 50. l. 12 lege *& ED, DF.* P. 52. l. 3 lege *sub AC, ◡AB.* P. 53. l. 13 lege *& FE.* ibid. loco literæ E, quæ prope I reperitur, scribe F. ibid. l. 14 lege *◡GB &c.* P. 55. l. 4 lege *CK;* 26 (I). P. 74. l. 11 lege *Prop.* 11ma. P. 79. l. 4 lege *Vnde LB erit* 16. P. 100. l. 9 lege ABD 27. P. 108 in sinistra duarum superiorum figurarum literæ M & N sunt una in alterius locum collocandæ. P. 145 tolle superiùs *Simplicium Problematum.* P. 151. l. 3 lege *quàm est Crux.* P. 153. l. 7 lege *versus D.* P. 200. l. ult. scribe in margine 3. Pag. 204. l. 1. Pag. 206. l. 9. Pag. 208. l. penult. P. 211. l. 1. Pag. 213. l. 6. Pag. 215. l. ult. Pag. 218. l. 1. Pag. 220. l. 17. & Pag. 314. l. 14 lege *in rectam lineam.* Pag. 204. l. 9. Pag. 207. l. 1. Pag. 209. l. 13. Pag. 211. l. antep. Pag. 214. l. 1. Pag. 216. l. 13. Pag. 218. l. penult. Pag. 221. l. 5 *lege in circuli circumferentiam.* P. 208. l. 3 lege *sunt.* P. 213. in fig. ad dextram loco superioris literæ C scribe G. P. 220. l. penult. pro BD scribe BG. Pag. 221 in fig. inferiori, quæ est ad sinistram, omissa est lit. I. P. 227. l. 6 lege *Prop.* 33. P. 228. l. penult. lege *in circumferentiam.* P. 245. l. 18 lege *inventum.* P. 265. l. 11 lege *datam AB.* P. 295. l. 27 lege *descriptio.* P. 300. l. 30 lege *in lapideis.* ib. l. antep. lege, *requisitis.* P. 313. l. ult. dele *m.* P. 316. l. 25 lege *secans EM.* P. 404. l. 5 lege *Sectione* 25. P. 479. infra lin. 25 lege $\frac{254c}{4}$, & dele lineam subductam. P. 488 in fine lege ⊏ BHC.

